ТЕХНОЛОГИЯ МАШИНОСТРОЕНИЯ

УДК 514.182

К.Л. Панчук, А.С. Нитейский

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ОБРАЗОВАНИЯ РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Во многих областях практической деятельности человека применяются линейчатые поверхности: в судостроении при выполнении обшивки корпуса судна, в самолетостроении при построении теоретических моделей элементов горизонтального оперения, в архитектурно-строительном проектировании, при проектировании пространственно-шарнирных механизмов, используемых в конструкциях роботов и манипуляторов, при разработке орудий почвообработки и др. Множественным применениям линейчатых поверхностей соответствуют теоретические исследования в области образования и конструирования этих поверхностей. Одно из недостаточно изученных направлений исследований связано с образованием развертывающихся поверхностей.

В дифференциальной геометрии известно построение всевозможных развертывающихся поверхностей по их пространственной ортогональной траектории [1]. Для общего случая, когда кривая на развертывающейся поверхности не является ее ортогональной траекторией, образование этой поверхности не рассматривалось.

Целью данной работы является получение математической модели образования развертывающейся поверхности по принадлежащей ей пространственной кривой для общего случая.

Рассмотрим пространственную кривую, не содержащую особых точек. В произвольной точке кривой укажем ее сопровождающий трехгранник и прямую линию с ортом, проходящую через вершину трехгранника (рис.1).

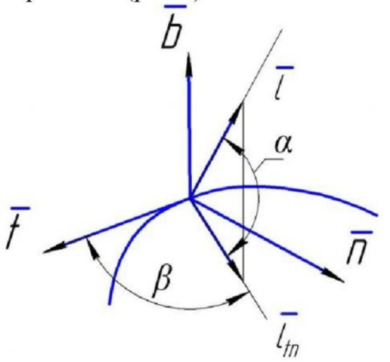

Рис.1. Положение образующей прямой в подвижном трехграннике кривой линии

Как следует из схемы на рис.1, положение орта определяется векторным уравнением

$$\bar{l} = (\bar{t}\cos\beta + \bar{n}\sin\beta)\cos\alpha + \bar{b}\sin\alpha \quad (1)$$

При перемещении трехгранника вдоль кривой прямая линия описывает линейчатую поверхность. Будем считать, что угловые параметры α и β прямой зависят от лонгального параметра s кривой. Введение двух параметров $\alpha = \alpha(s)$ и $\beta = \beta(s)$ выделяет из комплекса прямых, пересекающих данную кривую, определенную линейчатую поверхность. Выделение развертывающейся поверхности из множества линейчатых поверхностей комплекса прямых происходит по известному в теории линейчатых поверхностей [1] условию

$$(\bar{t}, \bar{l}, \frac{d\bar{l}}{ds}) = 0\,. \quad (2)$$

Из уравнения (1) можно получить выражение для векторной производной единичного орта

$$\frac{d\bar{l}}{ds} = -\bar{t}\left[\sin\beta\cos\alpha\left(\frac{d\beta}{ds} + k\right) + \cos\beta\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds}\right] + \\ +\bar{n}\left[\cos\beta\cos\alpha\left(\frac{d\beta}{ds} + k\right) - \sin\alpha\left(\sin\beta\frac{d\alpha}{ds} + \chi\right)\right] \\ +\bar{b}\cos\alpha\left(\chi\sin\beta + \frac{d\alpha}{ds}\right). \quad (3)$$

Получение уравнения (3) основано на использовании известных в дифференциальной геометрии пространственной кривой формул Френе, в которых приняты следующие обозначения: k и χ - соответственно кривизна и кручение кривой.

Уравнение (2), с учетом (1) и (3), после соответствующих преобразований, принимает вид

$$(\bar{t}, \bar{l}, \frac{d\bar{l}}{ds}) = \sin\beta\frac{d\alpha}{ds} - \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta \times \\ (k + \frac{d\beta}{ds}) + \chi(1 - \cos^2\alpha\cos\beta^2) = 0. \quad (4)$$

Из последнего уравнения, при $\beta=\pi/2$ получаем выражение $d\alpha = -\chi(s)ds$, представляющее собой необходимое и достаточное условие существования развертывающейся поверхности, образуемой по ее ортогональной траектории [1].

Для случая плоской кривой ($\chi=0$, $\alpha\neq0$, $\alpha\neq\pm\pi/2$, $\beta\neq0$) получаем формулу

$$\frac{d\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}-ctg\beta(kds+d\beta)=0\,, \qquad (5)$$

которая может быть положена в основу образования развертывающейся поверхности по принадлежащей ей плоской кривой. Этот случай рассмотрен в [2].

В уравнении (4) присутствуют переменные $\alpha(s)$, $\beta\ (s)$, $k(s)$ и $\chi(s)$, что говорит о множественности образуемых развертывающихся поверхностей, определяемых как геометрией исходной кривой линии, так и положением образующей прямой линии относительно сопровождающего трехгранника этой кривой.

Примем для определенности следующие условия: $\beta=const$ и $\chi=\lambda k$, где λ – коэффициент с определенным числовым значением. В таком случае, принимая $sin\beta=A$, $cos\beta=B$, получаем уравнение

$$kds=A\frac{d\alpha}{B\sin\alpha\cos\alpha-\lambda(1-B^2\cos^2\alpha)}\,. \qquad (6)$$

Введем для $\alpha(s)$ замену: $t(s)=tg(\alpha(s))$, получая преобразованное выражение (6)

$$kds=p\frac{dt}{t^2+bt+m}\,, \qquad (7)$$

где

$$p=-\frac{A}{\lambda};b=-\frac{B}{\lambda};m=1-B^2\,. \qquad (8)$$

Интегрирование (7) приводит к уравнению

$$\int kds=\int d\varphi=\varphi=\frac{p}{h}arctg(\frac{t+b/2}{h})+C\,, \quad (9)$$

где $h=(\frac{1}{2})\sqrt{4m-b^2}$, φ – текущий параметр – угол наклона касательной к исходной кривой. Полагая C=0 и учитывая $t(s)=tg(\alpha(s))$, из (9) получаем уравнение

$$\alpha=arctg\left[h\cdot tg(\frac{h}{p}\cdot\varphi)-\frac{b}{2}\right], \qquad (10)$$

которое при текущем изменении углового параметра φ, на основании уравнения (1) позволяет описать развертывающуюся поверхность. Следует отметить, что значения h в уравнении (10) ограничены, поскольку $4m-b^2\geq 0$ и зависят от значений углового параметра β и коэффициента λ.

Рассмотрим пример. Пространственная кривая, на основе которой будет образована развертывающаяся поверхность, описывается уравнением

$$\bar{r}=\bar{i}x_0+\bar{j}\frac{x_0^2}{2a}+\bar{k}\frac{x_0^3}{6a^2}\,, \qquad (11)$$

где a =*const*. Определим первые три производные радиус-вектора (11) по переменной x_0:

$$\bar{r}'=\bar{i}+\bar{j}\frac{x_0}{a}+\bar{k}\frac{x_0^2}{2a^2}\,;\ \bar{r}''=\bar{j}\frac{1}{a}+\bar{k}\frac{x_0}{a^2}\,;$$

$$\bar{r}'''=\bar{k}\frac{1}{a^2}\,. \qquad (12)$$

На основании уравнений (12) определим орты сопровождающего трехгранника кривой:

$$\bar{t}=\frac{\bar{r}'}{|\bar{r}'|}=m_1\bar{r}'\,;\bar{n}=\frac{\bar{r}''}{|\bar{r}''|}=m_2\bar{r}''\,;$$

$$\bar{b}=\frac{[\bar{r}',\bar{r}'']}{|[\bar{r}',\bar{r}'']|}=m_3[\bar{r}',\bar{r}'']\,. \qquad (13)$$

В формулах ортов переменные параметры определяются следующим образом:

$$m_1=\frac{2a^2}{x_0^2+2a^2}\,;m_2=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+x_0^2}}\,;\ m_3=\frac{2a^3}{x_0^2+2a^2}\,. \qquad (14)$$

Определим кривизну и кручение исходной кривой линии:

$$k=\frac{|[\bar{r}',\bar{r}'']|}{|\bar{r}'|^3}=\frac{4a^3}{(2a^2+x_0^2)^2}\,;$$

$$\chi=\frac{(\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}''')}{[\bar{r}',\bar{r}'']^2}=\frac{4a^3}{(2a^2+x_0^2)^2}\,. \qquad (15)$$

Очевидно $\chi=\lambda k$, λ=1, что указывает на принадлежность кривой линии к классу линий откоса, характеризующихся постоянным значением отношения $\chi(s):k(s)$ [1]. Таким образом, параметры (8) в случае (λ=1) принимают значения

$$p=-A;\ b=-B;$$

$$h=(\frac{1}{2})\sqrt{4m-b^2}=(\frac{1}{2})\sqrt{5A^2-1}\,.$$

Для постоянного параметра h очевидно ограничение $A=\sin\beta\geq\sqrt{0{,}2}$. В итоге для исходной кривой формула (10) принимает вид:

$$\alpha=arctg\left[htg(\frac{h}{A}\varphi)-B\right]. \qquad (16)$$

Если отсчитывать лонгальный параметр s кривой в сторону возрастания переменной x_0, то для его элемента можно записать уравнение

$$ds=\sqrt{1+(y_0'(x_0))^2+(z_0'(x_0))^2}\cdot dx_0\,,$$

для рассматриваемого примера принимающее вид

$$ds=\frac{2a^2+x_0^2}{2a^2}\cdot dx_0\,. \qquad (17)$$

В этом случае формула для элемента угла наклона касательной будет следующей:

$$d\varphi=kds=\frac{2a}{2a^2+x_0^2}\cdot dx_0\,. \qquad (18)$$

Интегрируя выражение $d\varphi$, получаем

$$\varphi=\int_0^{x_{0T}}\frac{dx_0}{a+\frac{x_0^2}{2a}}+\varphi_0=2uarctg(\frac{u}{a}x_0)\Big|_0^{x_{0T}}+\varphi_0\,.$$

Поскольку $\varphi_0 = 2uarctg(\frac{u}{a}\cdot 0) = 0$, где $x_{OT}(0)$=0, то окончательно формула для углового параметра φ принимает вид

$$\varphi = 2u\cdot arctg(\frac{u}{a}x_{0T}), \qquad (19)$$

где x_{OT} – текущее значение абсциссы вершины сопровождающего трёхгранника кривой; u = 0, 7071. Формулы (19), (16), (13) и (1) позволяют получить развертывающуюся поверхность для рассматриваемого примера. В работе уравнения этой поверхности получены с помощью Maple-программы и имеют следующий вид:

$$x(t,T) = t + T\left(\begin{array}{l}\left(4.3\left(t^2+8.0\right)^{-1} + 3.4\dfrac{t}{t^2+8.0}\right)/\\ /\left(\sqrt{1.0+(\mathrm{M})^2}\right) - \\ -1.0\dfrac{(\mathrm{M})t^2}{\sqrt{1.0+(\mathrm{M})^2}\left(t^2+8.0\right)}\end{array}\right),$$

$$y(t,T) = -0.25t^2 + T\left(\begin{array}{l}\left(-2.2\dfrac{t}{t^2+8.0} + 0.84\dfrac{8.0-1.0t^2}{t^2+8.0}\right)/\\ /\left(\sqrt{1.0+(\mathrm{M})^2}\right) - \\ -4.0\dfrac{(\mathrm{M})t}{\sqrt{1.0+(\mathrm{M})^2}\left(t^2+8.0\right)}\end{array}\right)$$

$$(20)$$

$$y(t,T) = -0.25t^2 + T\left(\begin{array}{l}\left(-2.2\dfrac{t}{t^2+8.0} + 0.84\dfrac{8.0-1.0t^2}{t^2+8.0}\right)/\\ /\left(\sqrt{1.0+(\mathrm{M})^2}\right) - \\ -4.0\dfrac{(\mathrm{M})t}{\sqrt{1.0+(\mathrm{M})^2}\left(t^2+8.0\right)}\end{array}\right)$$

где $\mathrm{M} = -0.80tg\left(1.3\mathrm{arc}\,tg(0.35t)\right) - 0.27$, a = -2; β=1 рад.; λ=1; параметр x_0 и текущий параметр положения точки на прямолинейной образующей обозначены соответственно t и T.

Для определения стрикции полученной поверхности развертывающейся поверхности необходимо воспользоваться ее уравнением [1]

$$\bar{\rho} = \bar{r} - \frac{\bar{r}'\cdot\bar{l}'}{(\bar{l}')^2}\cdot\bar{l}, \qquad (21)$$

в котором векторная производная есть производная сложной функции

$$\bar{l}' = \frac{d\bar{l}}{dx_0} = \frac{d\bar{l}}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx_0}. \qquad (22)$$

После ввода обозначений

$$\frac{h}{A} = q;\ \frac{u}{a} = \upsilon;\qquad \frac{B}{2} = \omega$$

формулы (16) и (19) принимают вид

$$\varphi = 2u\cdot arctg(\upsilon\cdot x_0)\quad . \qquad (23)$$

$$\alpha = arctg\left[\omega - h\cdot tg(q\varphi)\right]. \qquad (24)$$

Определяя по формулам по формулам (23) и (24) производные $\dfrac{d\varphi}{dx_0}$ и $\dfrac{d\alpha}{d\varphi}$, а по формулам (13) векторные производные

$$\bar{t}' = \frac{d\bar{t}}{dx_0};\ \bar{n}' = \frac{d\bar{t}}{dx_0};\ \bar{b}' = \frac{d\bar{b}}{dx_0},$$

после подстановки их с учетом формул (11) и первой из формул (13) в итоговую формулу (21), получим в координатной форме параметрические уравнения стрикции развертывающейся поверхности, образованной на основе линии (11). Ввиду громоздкости этих уравнений, которые также получены при помощи Maple-программы, они не приводятся. На представленной на рис. 2 визуализации отсека полученной поверхности (20) исходная кривая (11) и стрикция (кривая, касательная ко всем образующим прямым линиям поверхности) изображены как кривые, выходящие за пределы отсека поверхности.

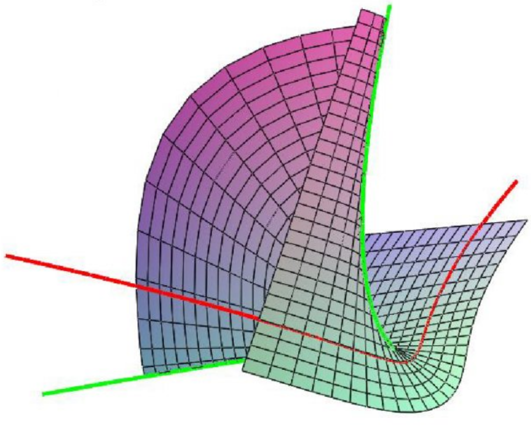

Рис. 2. Визуализация развертывающейся поверхности

В заключение отметим возможность обобщения рассмотренной геометрической модели для образования, как косых, так и собственно развертывающихся линейчатых поверхностей. Как известно, прямая линия в пространстве определяется четырьмя независимыми параметрами, например, α, β, γ и δ. Введем в пространстве сопровождающего трехгранника кривой некоторую группу линейных преобразований, например, шести параметрическую группу движений. Для одного из движений этой группы установим зависимость его параметров от лонгального параметра s кривой. В этом случае получаем возможность непрерывно изменять параметры положения $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\gamma(s)$ и $\delta(s)$ образующей прямой линии относительно сопровождающего трехгранника кривой линии, то есть в каждом фиксированном положении трехгранника будем получать фиксированное в нем положение прямой линии и разным положениям трехгранника будут взаимно однозначно соответствовать разные в нем положения прямой линии. Введение дополнительно условия развертываемости позволяет получать развертывающиеся поверхности в рассматриваемой обобщенной геометрической модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рашевский, П. К.* Курс дифференциальной геометрии. – М.: Гостехиздат, 1956. – 420 с.

2. *Нитейский, А. С.* Конструирование торсовой поверхности методом подвижного трехгранника Френе // Омский научный вестник. – 2013. – № 2(120). – С. 151-153.

3. *Двайт, Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука. – 1978. – 224с.

Авторы статьи

Панчук
Константин Леонидович;
докт.техн.наук, доц., зав. каф. проф.
каф. «Инженерная геометрия и
САПР» (Омский государственный
технический университет),
e-mail: Panchuk_KL@mail.ru

Нитейский
Антон Сергеевич;
аспирант каф.«Инженерная геометрия и САПР» (Омский государственный технический университет),
e-mail: antongth@gmail.com.