

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

А.С. Сорокин

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОБОБЩЁННОГО УРАВНЕНИЯ ЛЁВНЕРА НА ОТОБРАЖЕНИЯ ОДНОЛИСТНЫЕ В КОНЕЧНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

В последнее время удалось построить ряд интегральных представлений регулярных и однозначных в многосвязной круговой области функций, являющихся решением задач Шварца и Келдыша-Седова в этой области, с явным заданием ядерных функций [1-4]. В связи с необходимостью преодоления эффектов многозначности, проявляющихся из-за многосвязности области, указываются дополнительные условия разрешимости задач. Предложенное здесь обобщенное уравнение Лёвнера является непосредственным обобщением уравнения типа Лёвнера на семейства конечносвязных областей, полученного ранее для семейства односвязных областей П.П.Куфаревым [5], а для двусвязных – И.А.Александровым [6].

Теорема. Пусть семейство $(n+1)$ -связных областей $G(w,t)$, $t \in (\tau_0, 0]$ таково, что $\infty \notin G(w,t)$; $w_0 \in G(w,t)$; $G(w,t_1) \subset G(w,t_2)$ при $t_1 > t_2$, $t_1, t_2 \in (\tau_0, 0]$; Границные компоненты $C_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, n$, области $G(w,t)$ являются простыми замкнутыми кривыми Жордана $\zeta = \Omega_k(\vartheta, t)$, равномерно относительно θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$, дифференцируемы по t на $(\tau_0, 0]$. Тогда функция $w = \Phi(z, t)$, $\Phi(z_0, t) = w_0$, отображающая пересечение круга $|z| < R_0(t)$ с внешностью кругов $|z - a_k| \leq R_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, на $G(w,t)$ удовлетворяет на $(\tau_0, 0)$ уравнению

$$\begin{aligned} \Phi_t(z, t_0) = z\Phi_z(z, t_0) &\left\{ \frac{1}{4\pi} \Psi_0(2\pi, t_0) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4\pi} \Psi_n(2\pi, t_0) - iD - \right. \end{aligned} \quad (1)$$

$$- \sum_{k=0}^n \frac{\delta_k}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_k[a_k + R_k(t)\ell^{i\vartheta}, w] d\Psi_k(\vartheta, t_0) \},$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_k(\vartheta, t_0) = & \quad (2) \\ - \lim_{\rho_k \rightarrow 1} \int_0^\vartheta \frac{\partial}{\partial t} L_n \left| \frac{F\{\Psi[a_k + \rho_k R_k(t)\ell^{i\vartheta}, t], t_0\}}{R_k(t)} \right|_{t=t_0} d\vartheta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_m(2\pi) = \sum_{k=0}^n \lim_{\rho_k \rightarrow 1} \delta_k \int_0^{2\pi} B_k[\vartheta, \rho_k R_k(t_0)] d\Psi_k(\vartheta, t_0), \\ m = 1, \dots, n, \quad (3) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} B_k[\vartheta, \rho] = & \frac{\rho \ell^{i\vartheta}}{a_k + \rho \ell^{i\vartheta}} S_k[a_k + \rho \ell^{i\vartheta}], \\ F(w, t) = & \Phi^{-1}(z, t). \end{aligned} \quad (4)$$

Доказательство. Пусть функция $w = \Phi(z, t)$, $\Phi(z_0, t) = w_0$, отображает пересечение круга $|z| < R_0(t)$ с внешностью кругов $|z - a_k| \leq R_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, на область $G(w, t)$. Вместе с тем она отображает пересечение круга $|z| < \rho_0 R_0(t)$ с внешностью кругов

$$\begin{aligned} |z - a_k| \leq \rho_k R_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \rho_0 < 1, \\ \rho_k > 1, \quad k = 1, \dots, n, \quad (5) \end{aligned}$$

на область $G(t, \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n)$, лежащую в $G(w, t)$, содержащую точку w_0 , если ρ_k , $k = 1, \dots, n$, достаточно близки к единице, и ограниченную аналитическими кривыми

$$\begin{aligned} \Omega_k(\vartheta, t, \rho_k) = & \Phi[a_k + \rho_k R_k(t)\ell^{i\vartheta}, t], \\ k = 1, \dots, n, \quad (6) \end{aligned}$$

Из дифференцируемости функций $\Phi(z, t)$, $R_k(t)$ по t на $(\tau_0, 0]$ следует, что функции $\Omega_k(\vartheta, t, \rho_k)$, $k = 1, \dots, n$, равномерно относительно ϑ дифференцируемы по t .

При любом $t \in (\tau_0, 0]$ для точек, принадлежащих пересечению (5), с помощью теоремы о дифференцируемости по параметру семейства регулярных однолистных в n -связных областях обратных функций [1] можно записать следующие соотношения

$$\Phi_t(z, t_0) = z\Phi_z(z, t_0) \left[\frac{1}{4\pi} \int_{|z|=\rho_0 R_0(t_0)} Z_0(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4\pi i} \int_{|z|=\rho_n R_n(t_0)} Z_n(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} - \\
& - \frac{1}{4\pi i} \int_{|z|=\rho_0 R_0(t_0)} Z(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{4\pi i} \int_{|z|=\rho_n R_n(t_0)} Z(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} - \\
& - \sum_{k=0}^n \frac{\delta_k}{2\pi i} \int_{|z|=\rho_k R_k(t_0)} Z_k(\zeta) H_k(\zeta, z) \frac{d\zeta}{\zeta}, \\
& \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a_m|=\rho_m R_m(t_0)} Z_m(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta-a_m} = \\
& = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \frac{\delta_k}{2\pi i} \int_{|z-a_k|=\rho_k R_k(t_0)} Z_k(\zeta) S_k(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}, \\
& m = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{7}$$

На окружности $\zeta = a_k + \rho_k R_k(t_0) \ell^{i\vartheta}$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, значение функции $Z_k(\zeta)$ определяется формулой

$$Z_k(a_k + \rho_k R_k(t_0) \ell^{i\vartheta}) = -\frac{d}{dt} \ln \left| \frac{F[\Omega_k(\vartheta, t, \rho_k), t_0]}{R_k(t)} \right|_{t=t_0}.$$

Функция

$$\Psi_k(\vartheta, t_0, \rho_k) = - \int_0^\vartheta \frac{d}{dt} \ln \left| \frac{F[\Phi(\rho_k R_k(t) \ell^{i\vartheta}, t), t_0]}{R_k(t)} \right|_{t=t_0} d\vartheta, \quad t > t_0,$$

имеет ограниченную вариацию. Установленный Альфорсом [7 стр. 307] для регулярных в конечносвязных областях функций аналог Шварца позволяет убедиться, что полные изменения функций $\Psi_k(2\pi, t_0, \rho_k)$ ограничены в совокупности при

$\rho_k \rightarrow 1$. Так как

$$\int_{|z-a_k|=\rho_k R_k(t_0)} Z_k(\zeta) H_k(\zeta, z) \frac{d\zeta}{\zeta} =$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Александров И.А., Сорокин А.С. О распространении вариационного метода Г.М.Голузина- П.П.Куфарева на многосвязные области. ДАН СССР, 1967, т.175, № 6, с. 1207- 1210.
- Сорокин А.С. Вариационный метод Г.М.Голузина- П.П.Куфарева и формула М.В.Келдыша-Л.И.Седова. ДАН СССР, 1989, т.308, № 2, с. 273- 277.
- Сорокин А.С. Задача М.В.Келдыша-Л.И.Седова для многосвязных круговых областей. ДАН СССР, 1987, т.293, № 1, с. 41- 44.
- Сорокин А.С. Задача М.В.Келдыша-Л.И.Седова для многосвязных круговых областей. ДАН СССР, 1987, т.296, № 4, с. 801- 804.
- Куфарев П.П. Об однопараметрических семействах аналитических функций. Матем. сб. Т.13 (55), № 1, (1943), с.87-118.
- Александров И.А. Вариационные формулы для однолистных функций в двусвязных областях. Сиб. матем. журн., Т.4, №5, (1963), с. 961-976.
- Аленицын Ю.Е. О некоторых оценках для функций, регулярных в конечносвязной области (в книге: Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. -М.: Физматгиз, 1961 .

□Автор статьи:

Сорокин Андрей Семенович
канд. физ.-мат.наук, доцент, ст.н.с.. (филиал Куз-
ГТУ , г. Новокузнецк),тел.: 8(3843) 772459

$$= i \int_0^{2\pi} H_k(a_k + \rho_k R_k(t_0) \ell^{i\vartheta}, z) d\Psi_k(\vartheta, t_0, \rho_k),$$

то, по теореме Хелли о предельном переходе под знаком интеграла Римана - Стильтьеса, получаем

$$\begin{aligned}
& \lim_{\rho_k \rightarrow 1} \int_{|z-a_k|=\rho_k R_k(t_0)} Z_k(\zeta) H_k(\zeta, z) \frac{d\zeta}{\zeta} = \\
& = i \int_0^{2\pi} H_k(a_k + R_k(t_0) \ell^{i\vartheta}, z) d\Psi_k(\vartheta, t_0), \\
& k = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Полагая в (7) и (8) $\rho_k \rightarrow 1$, получаем соответственно (1) и (3). Этим и доказана теорема.

Следствие 1. Если в формулах (1) и (3) положить $n=1$, то получаем обобщенное уравнение Лёвнера для семейств вложенных двусвязных областей, данное И.А.Александровым [6].

Следствие 2. Если в условиях следствия 1 устремить $R_1(t_0)$ к нулю, положить $R_0(t_0)=1$ и $D=0$, в итоге будем иметь обобщенное уравнение Лёвнера для семейств вложенных односвязных областей $G(w, t)$, $G(w, t_1) \subset G(w, t_2)$ при $t_1 > t_2$, полученное П.П. Куфаревым [5]:

$$\Phi_t(z, t_0) = -\frac{z\Phi_z(z, t_0)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\ell^{i\vartheta} + z}{\ell^{i\vartheta} - z} d\Psi(\vartheta, t_0),$$

где

$$\Psi(\vartheta, t_0) = -\lim_{\rho \rightarrow 1} \int_0^\vartheta \frac{\partial}{\partial t} \left| F[\Psi(\rho \ell^{i\vartheta}, t), t_0] \right|_{t=t_0} d\vartheta.$$