

УДК 622.272: 516.02

С.В. Черданцев

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ВИНТОВОЙ КРЕПИ

Полученная в работе [1] система уравнений в вариациях

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Q}_j}{ds} + \varepsilon_{jki} \left(\kappa_k \bar{Q}_i + \frac{\bar{M}_k}{A_{kk}} Q_i \right) + \bar{q}_j &= 0, \\ \frac{d\bar{M}_j}{ds} + \varepsilon_{jki} \left(\kappa_k \bar{M}_i + \frac{\bar{M}_k}{A_{kk}} M_i \right) - \delta_{2j} \bar{Q}_3 + \delta_{3j} \bar{Q}_2 &= 0 \\ \frac{d\bar{\vartheta}_j}{ds} + \varepsilon_{jki} \kappa_k \bar{\vartheta}_i - \frac{1}{A_{jj}} \bar{M}_j &= 0, \\ \frac{d\bar{u}_j}{ds} + \varepsilon_{jki} \kappa_k \bar{u}_i - \delta_{2j} \bar{\vartheta}_3 + \delta_{3j} \bar{\vartheta}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} \bar{Q}_j(0) = 0, \bar{M}_j(0) = 0, \\ \bar{\vartheta}_j(l) = 0, \bar{u}_j(l) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

образуют краевую задачу, описывающую устойчивость винтовой крепи (рис. 1) в «малом».

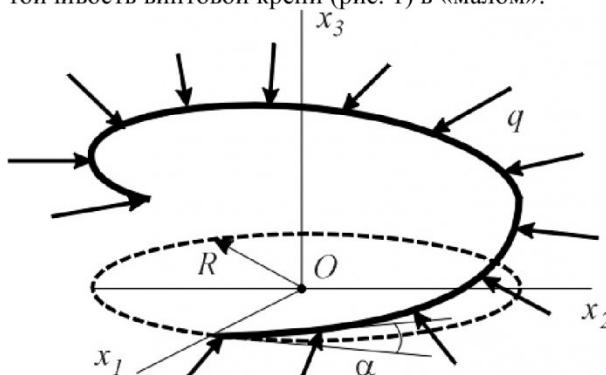


Рис. 1. Схема винтовой крепи

Отметим, что система (1) получена в предположении, что упругие деформации удлинения и сдвига пренебрежимо малы по сравнению с углами поворота, а внешняя нагрузка \bar{q}_j считается «мертвой».

В системе (1) и условиях (2) приняты следующие обозначения: s – координата, связанная с осью винтовой крепи; δ_{ij} , ε_{jki} – соответственно символы Кронекера и Леви–Чивита; A_{jj} – жесткости поперечного сечения крепи, κ_k – компоненты кручения и кривизны осевой линии крепи в невозмущенном состоянии. Неизвестные функции \bar{Q}_j , \bar{M}_j , \bar{u}_j , $\bar{\vartheta}_j$ представляют собой отклонения соответственно внутренних усилий, моментов, углов поворота и перемещений винтовой крепи от ее невозмущенного состояния.

Невозмущенное состояние консольно-закрепленной винтовой крепи характеризуется внутренними усилиями и моментами, определяемыми как [2]

$$\begin{aligned} Q_1(\bar{s}) &= -\pi p_e R \operatorname{tg} \alpha \left[\frac{(1+m)(1-\cos \bar{s})}{3} + \frac{1}{3}(1-m)(\cos 2\bar{s} - \cos \bar{s}) \right] \\ Q_2(\bar{s}) &= -\frac{\pi p_e R \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \left[1 + m + \frac{1}{3}(1-m) \times \right. \\ &\quad \left. \times (1+2\cos \bar{s}) \right] \sin \bar{s} \\ Q_3(\bar{s}) &= \pi p_e R \operatorname{tg}^2 \alpha \left[\frac{(1+m)(1-\cos \bar{s})}{3} + \frac{1}{3}(1-m)(\cos 2\bar{s} - \cos \bar{s}) \right] \\ M_1(\bar{s}) &= -\pi p_e R^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \times \\ &\quad [1+m](\bar{s} \sin \bar{s} + 2\cos \bar{s} - 2) + \\ &\quad + \frac{1}{9}(1-m)(3\bar{s} \sin \bar{s} + 4\cos \bar{s} + \cos^2 \bar{s} - 5)] \\ M_2(\bar{s}) &= -\frac{\pi p_e R^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos \alpha} \left[\frac{(1+m)}{(\bar{s} \cos \bar{s} - \sin \bar{s})} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{9}(1-m)(3\bar{s} \cos \bar{s} - \sin 2\bar{s} - \sin \bar{s}) \right] \\ M_3(\bar{s}) &= \frac{\pi p_e R^2 \operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \alpha} \times \\ &\quad \left\{ (1+m)[\bar{s} \sin^2 \alpha \sin \bar{s} + \cos 2\alpha(1-\cos \bar{s})] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{9}(1-m) \times [1+\cos \bar{s} + \cos^2 \alpha(5-4\cos \bar{s}) + \right. \\ &\quad \left. + 3\bar{s} \sin^2 \alpha \sin \bar{s} - (2+\cos^2 \alpha) \cos^2 \bar{s}] \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

где $\bar{s} = \frac{s}{R} \cos \alpha$; $m = p_e/p_b$; p_b , p_e – соответственно вертикальная и горизонтальная составляющие поверхности нагрузки, обусловленные весом отслоившейся от массива породы. Углы поворота и перемещения, характеризующие деформированное невозмущенное состояние винтовой крепи, выражения которых получены в работе [2], ввиду их громоздкости, здесь не приводятся.

Обратим особое внимание на то, что невозмущенная форма равновесия винтовой крепи отличается от ее естественной формы, даже при условии малости углов поворота ϑ_j . В этом состоит принципиальное отличие от классической задачи устойчивости центрально сжатого стержня, невозмущенная форма равновесия которого совпадает с его естественной формой вплоть до потери устойчивости.

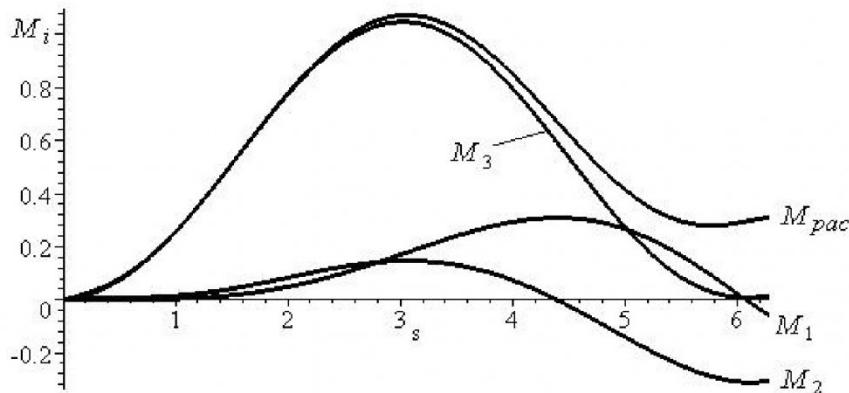


Рис. 2. Внутренние моменты в невозмущенном состоянии винтовой крепи

Пусть \$\kappa_{10}\$, \$\kappa_{20}\$, \$\kappa_{30}\$ – параметры кручения и кривизны винтовой крепи в естественном состоянии. Тогда ее невозмущенное состояние будет характеризоваться параметрами \$\kappa_j\$, определяемыми как [2]

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \frac{d\vartheta_1}{ds} + \kappa_{10} + \kappa_{20}\vartheta_3 - \kappa_{30}\vartheta_2, \\ \kappa_2 &= \frac{d\vartheta_2}{ds} - \kappa_{10}\vartheta_3 + \kappa_{20} + \kappa_{30}\vartheta_1, \\ \kappa_3 &= \frac{d\vartheta_3}{ds} + \kappa_{10}\vartheta_2 - \kappa_{20}\vartheta_1 + \kappa_{30}.\end{aligned}\quad (4)$$

Однако является ли это состояние крепи критическим заранее неизвестно. Поэтому необходимо проверить устойчивость всех невозмущенных состояний равновесия при непрерывном увеличении нагрузки. В связи с этим поставим следующую задачу.

Требуется установить, будет ли состояние винтовой крепи, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой \$p_e = 1 \text{ КПа}\$ устойчивым. Крепь имеет круглое поперечное сечение диаметром \$\bar{d} = \frac{d}{R} = 0,04\$ с углом подъема осевой

линии \$\alpha = 5^\circ\$, поэтому ее параметры в естественном состоянии равны

$$\kappa_{10} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{R}, \quad \kappa_{20} = 0, \quad \kappa_{30} = \frac{\cos^2 \alpha}{R}.$$

Решение задачи выполняем в два этапа. На первом этапе по формулам (3) определяем внутренние усилия и моменты (рис. 2) и убеждаемся в том, что условие прочности удовлетворяется

$$\sigma = \frac{M_{pac}}{0,1d^3} = 174,73 \text{ МПа} < 210 \text{ МПа}. \quad (5)$$

Далее по приведенным в [2] формулам определяем углы поворота и перемещения в невозмущенном состоянии винтовой крепи (рис. 3). После этого по формулам (4) вычисляем компоненты кручения и кривизны

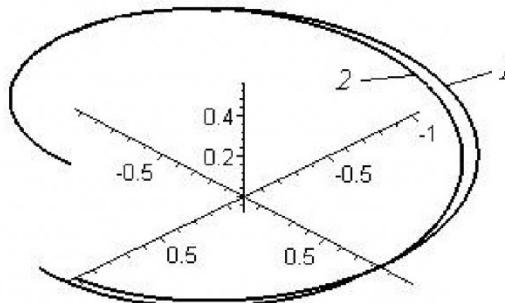


Рис. 3. Естественное (1) и невозмущенное (2) состояния винтовой крепи

На втором этапе методом Гира решаем краевую задачу (1), (2) об устойчивости винтовой крепи, результат решения которой представлен на рис. 4, а).

Анализируя рис. 4, заключаем, что винтовая крепь в условиях данной задачи будет ус-

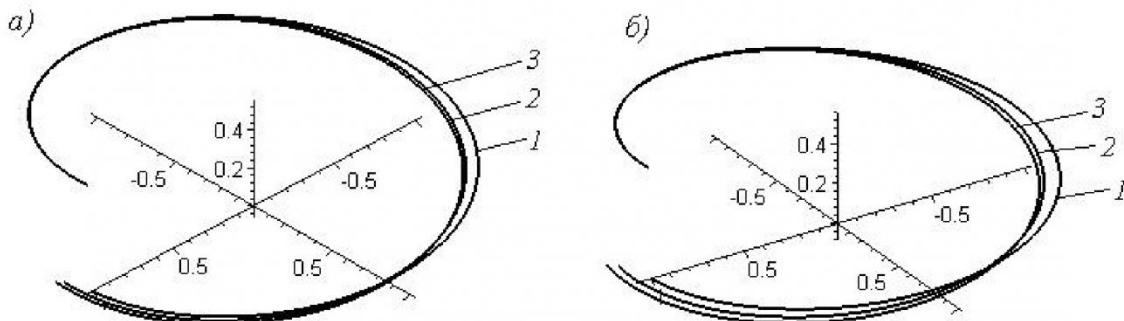


Рис. 4. Естественное (1), невозмущенное (2) и возмущенное (3) состояния винтовой крепи \$\bar{d} = 0,04\$, нагруженной \$p_e = 1 \text{ КПа}\$ (рис. а) и \$p_e = 1,2 \text{ КПа}\$ (рис. б)

тойчивой, поскольку ее возмущенное и невозмущенное состояния практически совпадают.

Увеличив внешнюю нагрузку до $p_e = 1,2 \text{ КПа}$ и повторив двухэтапный расчет винтовой крепи (рис. 4, б), отмечаем, что и при такой нагрузке возмущенное состояние мало отличается от невозмущенного. Однако отметим, что максимальное напряжение в крепи увеличилось до $\sigma = 209,67 \text{ МПа}$, (т.е. равно пределу пропорциональности материала крепи (ст. 3)). При нагрузке $p_e = 1,375 \text{ КПа}$ максимальное напряжение в крепи составляет $\sigma = 240,25 \text{ МПа}$, т.е. равно пределу текучести материала крепи, но потери ее устойчивости все равно не произойдет.

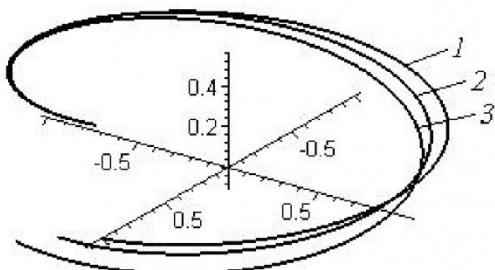


Рис. 5. Естественное (1), невозмущенное (2) и возмущенное (3) состояния винтовой крепи
 $d = 0,03$, нагруженной $p_e = 0,35 \text{ КПа}$

При дальнейшем увеличении нагрузки в крепи, очевидно, будут развиваться пластиче-

ские деформации, и поэтому рассматриваемая модель устойчивости винтовой крепи в рамках упругих деформаций будет неприемлемой.

Пусть теперь винтовая крепь $\bar{d} = 0,03$ нагружена нагрузкой $p_e = 0,35 \text{ КПа}$. Выполнив рассмотренный двухэтапный расчет крепи, построим невозмущенное и возмущенное состояния крепи (рис. 5).

Из рис. 5 видно, что возмущенная форма равновесия крепи сильно отличается от ее невозмущенной. Отсюда делаем заключение, что крепь потеряла устойчивость, перейдя в новое состояние равновесия.

Весьма существенным здесь представляется то, что в невозмущенном состоянии максимальные напряжения составляют всего $145,24 \text{ МПа}$, а в результате перехода в возмущенное состояние они увеличились на $104,12 \text{ МПа}$ и составляют $249,36 \text{ МПа}$. Следовательно, переход из устойчивого состояния в неустойчивое сопровождается значительным ростом не только перемещений, но также и напряжений.

Анализируя решение рассмотренной задачи можно сделать вывод о том, что потеря устойчивости винтовой крепи в упругой стадии происходит лишь при достаточно малом относительном диаметре ее поперечного сечения. С увеличением диаметра потеря устойчивости крепи в упругой стадии исключается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Черданцев С.В. Уравнения устойчивости винтовой крепи в режиме заданной нагрузки // Вестн. Кузбасс. гос. техн. Унив., 2010, № 2. С. 37 – 39.
- Краевые задачи о равновесии обжатого винтового стержня / С. В. Черданцев, Н. А. Кучер, С. Н. Рогозин. – Кемерово: Изд.-во Кузбас. гос. техн. ун-та, 2003. – 204 с.

□ Автор статьи:

Черданцев
 Сергей Васильевич
 – докт. техн. наук, проф. кафедры математики КузГТУ.
 Тел. 8-3842-39-63-19.
 E-mail: svch01@yandex.ru