

УДК 514.742

А.С. Нитейский, К.Л. Панчук

## ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СОПРИКОСНОВЕНИЯ ЛИНЕЙЧАТЫХ РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Известны результаты исследования соприкосновения косых (неразвертывающихся) линейчатых поверхностей по их общей образующей прямой [1,2]. В настоящей работе рассматривается возможность применения этих результатов для случая линейчатых развертывающихся поверхностей (ПЛР).

Уравнение линейчатой поверхности может быть выражено в дуальной векторной форме [3]:  $\bar{A}_l(t) = \bar{a}_{0l}(t) + \alpha \bar{a}_{1l}(t)$ ,  $\omega^2 = 0$ , где  $\bar{a}_{0l}(t)$  - единичный вектор образующей прямой,  $\bar{a}_{1l}(t)$  - момент вектора  $\bar{a}_{0l}$  относительно начала координат системы отнесения;  $\bar{A}_l(t)$  - дуальный единичный вектор с координатным представлением  $\bar{A}_l = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z$ , при этом  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ;  $t$  - вещественный параметр  $T_0 \leq t \leq T_1$ . Допускаем, что дуальная векторная функция  $\bar{A}_l(t)$  обладает на отрезке изменения параметра  $t$  непрерывными производными любого порядка. В центральной точке  $A$  образующей линии линейчатой поверхности существует ортонормированный триэдр с дуальными ортами [3]:

$$\begin{aligned}\bar{A}_1, \bar{A}_2 &= \bar{a}_{02} + \alpha \bar{a}_{12} = \bar{A}'_l / H; \\ \bar{A}_3 &= \bar{a}_{03} + \alpha \bar{a}_{13} = \bar{A}_l \times \bar{A}_2.\end{aligned}$$

Деривационные уравнения триэдра имеют известный вид:

$$\begin{aligned}\bar{A}'_l &= H \cdot \bar{A}_2; \quad \bar{A}'_2 = H \cdot \bar{A}_l + Q \cdot \bar{A}_3; \\ \bar{A}'_3 &= Q \cdot \bar{A}_2,\end{aligned}\tag{1}$$

где

$$\begin{aligned}H &= h_0 + \omega h_l = |\bar{A}'_l|, \\ Q &= q_0 + \omega q_l = \frac{(\bar{A}_l \bar{A}'_l \bar{A}''_l)}{H^2},\end{aligned}$$

верхние индексы отвечают соответствующим производным по параметру  $t$ .

Дуальная дуга образующей ЛП зависит от вещественного параметра

$$\begin{aligned}s(t) &= s_0(t) + \omega s_l(t) = \int_{t_0}^t H \cdot dt \\ s'_t &= \frac{ds}{dt} = H; \quad (s_0)'_t = \frac{ds_0}{dt} = h_0 > 0;\end{aligned}$$

$$(s_l)'_t = \frac{ds_l}{dt} = h_l > 0.$$

Вещественное число  $P = ds_0/ds_l$  называется параметром линейчатой поверхности. Для ПЛР имеет место условие  $P = 0$ , из которого следует  $h_l = 0$  [3]. В [1] показано, что существуют взаимно однозначные вещественные отображения:

$$t \in [T_0, T] \leftrightarrow s_0 \in [S_0, S_m]; \quad t \in [T_0, T] \leftrightarrow s_l \in [S_l, S_m],$$

в соответствии с которыми каждому положению образующей на линейчатой поверхности, определяемому параметром  $t$ , отвечает определенное значение ее дуальной дуги  $s$  и наоборот.

Пусть уравнение  $\bar{A}_l(\tilde{t}) = \bar{a}_{0l}(\tilde{t}) + \alpha \bar{a}_{1l}(\tilde{t})$ ,  $\omega^2 = 0$ , описывает другую ПЛР, для которой имеют место те же геометрические предпосылки, что и для  $\bar{A}_l = \bar{A}_l(t)$ . В работе [1] показано, что для ПЛР  $\bar{A}_l(t)$  и  $\bar{A}_l(\tilde{t})$  существует единственная вещественная функция  $\tilde{t} = f(t)$ , непрерывная и дифференцируемая на отрезке  $T_0 \leq t \leq T_1$ . Если разложить дуальные векторные функции  $\bar{A}_l(t)$  и  $\bar{A}_l(\tilde{t}(t))$  в ряд Тейлора по степеням приращения  $\Delta t$  их образующих  $t_0$  и  $\tilde{t}_0(t_0)$  то, учитывая функцию  $\tilde{t} = f(t)$ , можно получить дуальный вектор расхождения соприкасающихся ПЛР в их общей образующей, определяемый параметром  $t_0$ :  $\bar{G}(t) = \bar{A}_l(t) - \bar{A}_l(\tilde{t}(t))$ . Вектор  $\bar{G}(t)$ , характеризующий близость обеих ЛП в окрестности их общей образующей, определяется двумя образующими  $\bar{a}'_{0l}$  и  $\bar{a}'_{0l}$ , каждая из которых смешена по своей ПЛР на одну и ту же дуальную дугу  $ds = d\tilde{s}$  от их общей образующей.

Если  $\bar{A}_l(t)$  и  $\bar{A}_l(\tilde{t})$  - поверхности ПЛР, но не цилиндрические и не конические, то параметры  $P$  и  $\tilde{P}$  их образующих равны нулю и поэтому элементы их дуальных дуг  $\Delta s$  и  $\Delta \tilde{s}$  - вещественные числа  $\Delta s_0$  и  $\Delta \tilde{s}_0$ . Стрикционные линии рассматриваемых поверхностей будут их ребрами возврата. В этом случае, например для ПЛР  $\bar{A}_l(t)$ , ее

образующая  $\bar{a}_{01}(t)$  будет касательной в точке  $A$  ребра возврата,  $\bar{a}_{02}(t)$  - главной нормалью и  $\bar{a}_{03}(t)$  - бинормалью, поскольку по определению  $\bar{a}_{03}(t)$  определяет ось вещественного угла  $ds_0 = kd\sigma$ , принадлежащего соприкасающейся плоскости ребра возврата ( $A$ ), где  $k$  и  $d\sigma$  - соответственно кривизна и элемент дуги линии ( $A$ ).

Для соприкосновения порядка  $n=1$  характерны следующие условия:

$$\begin{aligned}\bar{A}_I(t_0) &= \bar{A}_I(\tilde{t}(t_0)), \bar{A}'_I(t_0) = \bar{A}'_I(\tilde{t}(t_0)), \\ \bar{A}''_I(t_0) &\neq \bar{A}''_I(\tilde{t}(t_0)),\end{aligned}\quad (2)$$

из которых, с учетом того, что  $\bar{A}'_I(\tilde{t}(t_0)) = (\bar{A}_I)'_{\tilde{t}} \cdot \tilde{t} = \tilde{H} \cdot \tilde{t} \cdot \bar{A}_2$ ;  $\bar{A}'_I = H \cdot \bar{A}_2$ , следует [1]:

$$\bar{A}_I = \bar{A}_I; \bar{A}_2 = \bar{A}_2; \bar{A}_3 = \bar{A}_3; H = \tilde{H} \cdot \tilde{t}.$$

В итоге получаем

$$ds = H \cdot dt = \tilde{H} \cdot \tilde{t}' \cdot dt = \tilde{H} \cdot d\tilde{t} = d\tilde{s}.$$

Дуальное равенство  $ds = d\tilde{s}$  для ПЛР приводит к вещественному равенству  $ds_0 = d\tilde{s}_0$ , из которого следует  $h_0 = \tilde{h}_0 \tilde{t}'$ . Так как  $ds_0 = kd\sigma$ , то

$$k \cdot d\sigma = \tilde{k} \cdot d\tilde{\sigma}. \quad (3)$$

Таким образом, соприкосновение  $n = 1$  для двух ПЛР приводит к совпадению их триэдров  $(\bar{a}_{01}, \bar{a}_{02}, \bar{a}_{03}) \equiv (\bar{a}_{01}, \bar{a}_{02}, \bar{a}_{03})$  и к выполнению равенства (3).

Если к первым двум равенствам (2) добавить соотношения

$\bar{A}''_I(t_0) = \bar{A}''_I(\tilde{t}(t_0)); \bar{A}'''_I(t_0) \neq \bar{A}'''_I(\tilde{t}(t_0))$ , то получим в общем случае условия обеспечения касания второго порядка ( $n=2$ ) двух линейчатых поверхностей. Так как имеют место равенства [1]

$$\begin{aligned}\bar{A}''_I &= -H^2 \cdot \bar{A}_I + H' \cdot \bar{A}_2 + H \cdot Q \cdot \bar{A}_3; \\ \bar{A}''_I &= -\tilde{H}^2 \cdot (\tilde{t}')^2 \cdot \bar{A}_I + \\ &+ (\tilde{H}'_{\tilde{t}} \cdot (\tilde{t}')^2 + \tilde{H} \cdot \tilde{t}') \cdot \bar{A}_2 + (\tilde{H} \cdot \tilde{Q} \cdot (\tilde{t}')^2) \cdot \bar{A}_3,\end{aligned}$$

то в общей образующей соприкасающихся ПЛР выполняются условия:

$$H = \tilde{H} \cdot \tilde{t}; H' = (\tilde{H} \cdot \tilde{t})'_{\tilde{t}}; Q = \tilde{Q} \cdot \tilde{t}, \quad (4)$$

из которых следуют равенства

$$ds = d\tilde{s}; \frac{d^2 s}{dt^2} = (\tilde{s}'_{\tilde{t}} \cdot \tilde{t})'_{\tilde{t}}; ds_{(1)} = d\tilde{s}_{(1)},$$

где

$ds_{(1)} = ds_{01} + \omega ds_{11}$  и  $d\tilde{s}_{(1)} = d\tilde{s}_{01} + \omega d\tilde{s}_{11}$  - элементы дуальных дуг ЛП, образованных бинормальами  $\bar{a}_{03}$  и  $\tilde{a}_{03}$  соответственно стрикций

(ребер возврата) соприкасающихся ПЛР, при этом  $ds_{(1)} = Q \cdot dt = \tilde{Q} \cdot \tilde{t}' \cdot dt = \tilde{Q} \cdot d\tilde{t} = d\tilde{s}_{(1)}$ .

Из уравнения стрикции линейчатой поверхности [3]  $\tilde{x}'(t) = q_I \bar{a}_{01} + h_I \bar{a}_{03}$ , с учетом условий для ПЛР:  $h_I = 0, q_I \neq 0$ , следует уравнение ее стрикции  $\tilde{x}' = q_I \bar{a}_{01}$ . Из него следует  $(d\tilde{x})^2 = d\sigma^2 = (q_I dt)^2$ . Таким образом, с произвольным знаком получаем:

$$d\sigma = q_I dt. \quad (5)$$

Из  $ds_0 = h_0 \cdot dt = k \cdot d\sigma$  с учетом (5) можно получить:

$$k = h_0 / \sigma_t = h_0 / q_I. \quad (6)$$

Из третьего дуального равенства (4) следуют вещественные равенства

$$q_0 = \tilde{q}_0 \cdot \tilde{t}', q_I = \tilde{q}_I \cdot \tilde{t}',$$

что позволяет записать

$$d\tilde{\sigma} = \tilde{q}_I d\tilde{t} = q_I / \tilde{t}' = q_I dt = d\sigma. \quad (7)$$

Учитывая (3), получаем итоговый результат

$$k = \tilde{k}, \quad (8)$$

Таким образом, кривизны ребер возврата ( $A$ ) и ( $\tilde{A}$ ) соприкасающихся ПЛР в центральных точках  $A \equiv \tilde{A}$  их совмещенных образующих прямых линий  $\bar{a}_{01} \equiv \tilde{a}_{01}$  равны.

Для элемента  $ds_{(1)}$  дуальной дуги, образованной перемещением бинормали  $\bar{a}_{03}$ , можно записать [3] дуальные равенства:  $ds_{(1)} = ds_{01} + \omega ds_{11} = Q dt = (q_0 + \omega q_I) dt$ , из которых, по разделению главных и моментных компонент, на основании (7) следует:

$$ds_{01} = q_0 \cdot dt = \tilde{q}_0 \cdot \tilde{t}' \cdot dt = \tilde{q}_0 \cdot d\tilde{t} = d\tilde{s}_{01};$$

$$ds_{11} = q_I \cdot dt = d\sigma = d\tilde{\sigma} = \tilde{q}_I \cdot d\tilde{t} = d\tilde{s}_{11}.$$

Таким образом, имеет место следующий результат:

$$ds_{(1)} = d\tilde{s}_{(1)}. \quad (9)$$

Элемент дуальной дуги  $ds_{(1)}$  бинормали ребра возврата ПЛР может быть выражен известным образом [4]:

$$ds_{(1)} = \chi \cdot d\sigma \cdot e^{\omega/\chi}, \quad (10)$$

где  $\omega^2 = 0; \chi$  - кручение линии ( $A$ ) в точке  $A$ . Поскольку имеет место (9), то следует

$$\chi = \tilde{\chi}, \quad (11)$$

т.е. кручения ребер возврата ( $A$ ) и ( $\tilde{A}$ ) соприкасающихся ПЛР в центральных точках  $A \equiv \tilde{A}$  их совмещенных образующих  $\bar{a}_{01} \equiv \tilde{a}_{01}$  также равны.

Исходя из (10) и предыдущих результатов, можно записать:

$$ds_{(1)} = ds_{01} + \omega ds_{11} = \\ = (q_0 + \omega q_1) dt = \chi \cdot d\sigma + \omega \cdot d\sigma,$$

что позволяет получить следующие результаты:  $q_0 = \chi \cdot \sigma'_t, q_1 = \sigma'_t, \chi = q_0 / q_1$ . Для параметра элемента дульной дуги  $ds_{(1)}$  имеют место соотношения

$$P_{(1)} = q_1 / q_0 = 1 / \chi, \quad (12)$$

что приводит с учетом (11) к равенству

$$P_{(1)} = \tilde{P}_{(1)}. \quad (13)$$

Определим теперь элемент  $ds'$  дуальной дуги, описываемой главной нормалью  $\bar{a}_{02}$  линии (A). Для этого обратимся к известному дуальному уравнению [4]

$$ds^2 + ds_{(1)}^2 = (ds')^2. \quad (14)$$

Разделяя в нем главную и моментную компоненты и учитывая вышеприведенные результаты, получим:

$$ds' = ds'_0 + \omega ds'_1 = \sqrt{h_0^2 + q_0^2} \cdot dt + \\ + \omega q_0 \cdot \sigma'_t \cdot dt / \sqrt{h_0^2 + q_0^2}.$$

После подстановки в это уравнение ранее полученных результатов, а именно  $h_0 = k \cdot \sigma'_t, q_0 = \chi \cdot \sigma'_t$ , приходим к формуле:

$$\sqrt{k^2 + \chi^2} \cdot d\sigma \cdot e^{\omega \chi / (k^2 + \chi^2)}.$$

Из формулы (14), с учетом ранее доказанных равенств  $ds = ds_0 = d\tilde{s}_0 = d\tilde{s}$  и  $ds_{(1)} = d\tilde{s}_{(1)}$ , следует

$$ds' = d\tilde{s}'. \quad (15)$$

Для параметра дуального элемента  $ds'$  на основании (8) и (11) можно записать:

$$P' = \frac{ds'_1}{ds'_0} = \chi / (k^2 + \chi^2) = \tilde{P}'. \quad (16)$$

Параметр  $P'$  есть параметр мгновенного кинематического винта, обеспечивающего бесконечно малое перемещение общего триэдра  $(\bar{a}_{01}, \bar{a}_{02}, \bar{a}_{03})$  соприкасающихся ПЛР как вдоль стрикции (A), так и вдоль стрикции ( $\tilde{A}$ ).

Для дуальной кривизны линейчатой поверхности в ее образующей известна дуальная формула [4]

$$\varepsilon = \frac{ds'}{ds} = \frac{1}{\sin R}, \quad (17)$$

в которой  $R = R_0 + \omega R_1$  – дульный угол между образующей  $\bar{a}_{01}$  поверхности ПЛР и соответствующей ей прямой, определяемой единичным вектором  $\bar{b}_{02}$ , представляющим собой главную

часть единичного дуального вектора  $\bar{B}_2 = \bar{b}_{02} + \omega \bar{b}_{12}$ , определяющего положение линии  $b_{02}$  в пространстве (рис. 1).

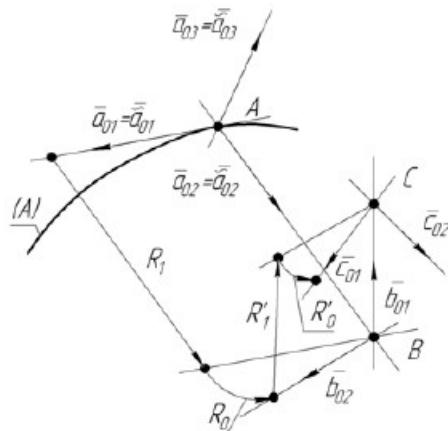


Рис. 1. К соприкосновению двух ПЛР

Если подставить в формулу (17) выражение элементов  $ds'$  и  $ds$ , то получим уравнение

$$\varepsilon = \frac{1}{k} \sqrt{k^2 + \chi^2} \cdot e^{\omega \chi / (k^2 + \chi^2)}, \quad (18)$$

из которого, с учетом (8) и (11), следует

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon}; R = \tilde{R}. \quad (19)$$

Если дифференциальные уравнения триэдров линейчатой поверхности представить в дуальной координатной форме [3], то для случая ПЛР получим уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\sigma} &= -xk + x_1 \chi \cdot e^{\omega \chi / k}, \\ \frac{d\beta}{d\sigma} &= -yk + y_1 \chi \cdot e^{\omega \chi / k}, \\ \frac{d\gamma}{d\sigma} &= -zk + z_1 \chi \cdot e^{\omega \chi / k}, \end{aligned} \quad (20)$$

где тройки  $\{x, y, z\}$ ,  $\{x_1, y_1, z_1\}$  и  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  суть координаты единичных дуальных векторов  $\bar{A}_1, \bar{A}_2$  и  $\bar{A}_3$  соответственно. Из

$$\bar{A}_2 = \bar{A}'_1 / H = \bar{A}'_1 / (h_0 + \omega h_1) = \bar{A}'_1 / h_0 = \frac{d\bar{A}_1}{dt} \cdot \frac{ds_0}{dt} = \frac{d\bar{A}_1}{ds_0}$$

$$\text{следует } \bar{A}_2 = \{ \alpha = \frac{dx}{ds_0}, \beta = \frac{dy}{ds_0}, \gamma = \frac{dz}{ds_0} \}.$$

Из равенства

$$\frac{d\bar{A}_2}{ds'} = \bar{B}_1 = \{ \xi = \frac{d\alpha}{ds'}, \eta = \frac{d\beta}{ds'}, \zeta = \frac{d\gamma}{ds'} \}$$

с учетом  $\frac{ds'}{ds_0} = \varepsilon$  следует

$$\left\{ \xi = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{d\alpha}{ds_0}, \eta = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{d\beta}{ds_0}, \zeta = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{d\gamma}{ds_0} \right\} = \\ \left\{ \xi = \frac{1}{k \cdot \varepsilon} \cdot \frac{d\alpha}{d\sigma}, \eta = \frac{1}{k \cdot \varepsilon} \cdot \frac{d\beta}{d\sigma}, \zeta = \frac{1}{k \cdot \varepsilon} \cdot \frac{d\gamma}{d\sigma} \right\}$$

где  $\bar{B}_1$  - единичный дуальный вектор главной нормали поверхности ПЛР, соответствующий ее образующей прямой  $\bar{a}_{01}$ . На основе изложенного и уравнений (20) получаем:  $\bar{B}_1 \equiv \bar{B}_1; \bar{B}_2 \equiv \bar{B}_2$ , где  $\bar{B}_2 = \bar{A}_2 \times \bar{B}_1 = \bar{A}_2 \times \bar{B}_1$ .

Таким образом, у соприкасающихся ПЛР вдоль их общей образующей совмещены триэдры эволют первого порядка:

$$\bar{B}_1 \equiv \bar{B}_1, \bar{B}_2 \equiv \bar{B}_2, \bar{A}_2 \equiv \bar{A}_2.$$

Из равенства  $ds = d\tilde{s}$  следует  $s'_t = \tilde{s}'_t \cdot \tilde{t}'$ . Поэтому уравнению можно определить вторую производную

$$s''_t = (\tilde{s}'_t \cdot \tilde{t}')'_t = \tilde{s}''_t \cdot (\tilde{t}')^2 + \tilde{s}'_t \cdot \tilde{t}''.$$
 (21)

Уравнение (21) по существу представляет собой преобразованное выражение среднего условия (4).

Определим производную дуальной кривизны линейчатой поверхности со стрикционной линией  $(\tilde{A})$  исходя из (17) и (21):

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}'_t &= \frac{d\tilde{\varepsilon}}{dt} = \left( \frac{ds'}{ds} \right)'_t = \left( \frac{(\tilde{s}')'_t \cdot d\tilde{t}}{\tilde{s}'_t \cdot d\tilde{t}} \right)'_t = \\ &= \left( \frac{(\tilde{s}')'_t}{\tilde{s}'_t} \right)'_t = \frac{(\tilde{s}')''_t \cdot \tilde{s}'_t - (\tilde{s}')'_t \cdot \tilde{s}''_t}{(\tilde{s}'_t)^2}. \end{aligned}$$

На основании (21) следует:

$$\begin{aligned} (\tilde{s}')''_t &= \frac{(s')''_t - (\tilde{s}')'_t \cdot \tilde{t}''}{(\tilde{t}')^2} = \frac{(s')''_t - (\tilde{s}')'_t \cdot (\tilde{t}''/\tilde{t}')} {(\tilde{t}')^2} \\ ; \tilde{s}''_t &= \frac{s''_t - \tilde{s}'_t \cdot \tilde{t}''}{(\tilde{t}')^2} = \frac{s''_t - \tilde{s}'_t \cdot (\tilde{t}''/\tilde{t}')} {(\tilde{t}')^2}. \end{aligned}$$

Предшествующее уравнение для  $\tilde{\varepsilon}'_t$  с помощью подстановок выражений для  $(\tilde{s}')''_t$  и  $\tilde{s}''_t$  можно последовательно привести к окончательному виду:

$$\tilde{\varepsilon}'_t = \frac{1}{\tilde{t}'} \cdot \left( \frac{ds'}{ds} \right)'_t = \frac{1}{\tilde{t}'} \cdot \varepsilon'_t.$$
 (22)

Очевидно, что  $\tilde{\varepsilon}'_t \cdot \tilde{t}' = \varepsilon'_t$ . Из формулы (17) с учетом того, что  $\tilde{\varepsilon}'_t \cdot \tilde{t}' = \varepsilon'_t$ , следует

$$\tilde{\varepsilon}'_t \cdot \tilde{t}' = \frac{-\cos \tilde{R} \cdot \frac{d\tilde{R}}{d\tilde{s}} \cdot \tilde{s}'_t \cdot \tilde{t}'}{\sin^2 \tilde{R}} = \frac{-\cos R \cdot \frac{dR}{ds} \cdot s'_t}{\sin^2 R}.$$

Учитывая выполнение условия

$$R = \tilde{R}, s'_t = \tilde{s}'_t \cdot \tilde{t}',$$

из последнего равенства получаем  $\frac{d\tilde{R}}{d\tilde{s}} = \frac{dR}{ds}$ . Но

$\frac{dR}{ds} = \frac{dR}{ds_0} = \frac{1}{k} \cdot \frac{dR}{d\sigma} = \delta$  представляет собой дуальный изгиб  $\delta$  поверхности ПЛР в ее образующей [4]. Следовательно, выполняется равенство

$$\delta = \delta',$$
 (23)

из которого следует, что соприкасающиеся ПЛР в их общей образующей имеют равные дуальные изгибы. Поскольку для линейчатой поверхности в ее образующей линии  $\bar{a}_{01} \equiv \bar{a}_{01}$  имеет место формула [4]  $\sin R \cdot \delta = -\tan R'$ , где  $R' = R'_0 + \omega R'_1$  - дуальный угол, соответствующий эволюте  $(\bar{c}_{01})$  линейчатой поверхности (см. рис.1), то из  $R = \tilde{R}$ ,  $\delta = \delta'$  следует

$$R' = \tilde{R}',$$
 (24)

что позволяет утверждать о совмещении триэдров эволют второго порядка соприкасающихся ПЛР:

$$\bar{B}_1 \equiv \bar{B}_1, \bar{C}_1 \equiv \bar{C}_1, \bar{C}_2 \equiv \bar{C}_2.$$

Нетрудно показать, что если трехгранныки стрикций - ребер возврата ( $A$ ) и  $(\tilde{A})$  двух соприкасающихся ПЛР в точке  $A = \tilde{A}$  совмещены, т.е.  $\bar{a}_{01} \equiv \bar{a}_{01}, \bar{a}_{02} \equiv \bar{a}_{02}$ , то этих условий достаточно для получения соприкосновения  $n = 1$  данных ПЛР.

Если к условию совпадения трехграников стрикций двух соприкасающихся ПЛР добавить условие  $k = \tilde{k}$ , но добавленное условие недостаточно для выполнения. То можно убедиться, что условия соприкосновения  $n = 1$  выполнимы, но добавленное условие недостаточно для выполнения соприкосновения  $n = 2$ .

Если к условию совпадения трехграников стрикций двух соприкасающихся ПЛР добавить условие  $\chi = \tilde{\chi}$ , то получим совмещение дуальных триэдров эволют первого порядка  $\bar{B}_1 \equiv \bar{B}_1; \bar{B}_2 \equiv \bar{B}_2; \bar{A}_2 \equiv \bar{A}_2$ . Но поскольку в исходных условиях отсутствует задание непрерывного изменения производной  $\varepsilon'_t = d\varepsilon/dt$  дуальной кривизны  $\varepsilon$  у соприкасающихся ПЛР, то их соприкосновение не является полным для  $n = 2$ , поскольку не выполняется одно из условий (4), а именно, условие  $H' = (\tilde{H} \cdot \tilde{t}')_t$ .

Из формулы (17) следует:

$$\begin{aligned}\varepsilon'_t &= \frac{-\cos R \cdot \frac{dR}{ds} \cdot s'_t}{\sin^2 R} = \frac{-\cos R \cdot \frac{dR}{k \cdot d\sigma} \cdot s'_t}{\sin^2 R} = \\ &= \frac{-\cos R \cdot \frac{dR}{d\sigma} \cdot \sigma'_t}{\sin^2 R} = \frac{-\cos R \cdot k \cdot \delta \cdot \sigma'_t}{\sin^2 R}.\end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\delta = \frac{-\varepsilon'_t \cdot \sin^2 R}{k \cdot \sigma'_t \cdot \cos R} = \frac{-\varepsilon'_\sigma \cdot \sin^2 R}{k \cdot \cos R}. \quad (25)$$

Следовательно, для полного выполнения условий соприкосновения  $n = 2$  двух ПЛР в их общей образующей необходимо существование в этой образующей значения дуального изгиба  $\delta = \tilde{\delta}$ . Значение же последнего, как следует из (25), зависит от кривизны  $k$ , дуального угла  $R$  и от дуальной величины  $\varepsilon'_t$ , которая, согласно (18), определяется  $k$  и  $\chi$ , их производными  $k'_\sigma$  и  $\chi'_\sigma$ , и значениями этих производных в точке  $A = \tilde{A}$  двух стрикций ( $A$ ) и ( $\tilde{A}$ ) – ребер возврата соприкасающихся ПЛР.

Рассмотрим стыковку торсовых поверхностей, образующих линейчатую развертывающуюся полосу и ребра возврата которых представляют собой сегменты пространственного кусочного сплайна. Для исследуемых задач стыковки применим эрмитовы сплайны пятой степени [5]:

$$\bar{F}_i(t) = \sum_{\alpha=0}^2 \sum_{\beta=0}^{2-\alpha} h_i^\alpha \cdot \frac{(2+\beta)!}{2\beta!\alpha!} \left\{ (1-t)^3 t^{\alpha+\beta} \bar{P}_i^{(\alpha)} + (-1)^\alpha t^3 (1-t)^{\alpha+\beta} \bar{P}_{i+1}^{(\alpha)} \right\}$$

где  $\bar{P}_i^{(\alpha)}$ ,  $\bar{P}_{i+1}^{(\alpha)}$  – граничные условия на концах сегментов сплайна.

После раскрытия суммы и приведения подобных членов получим:

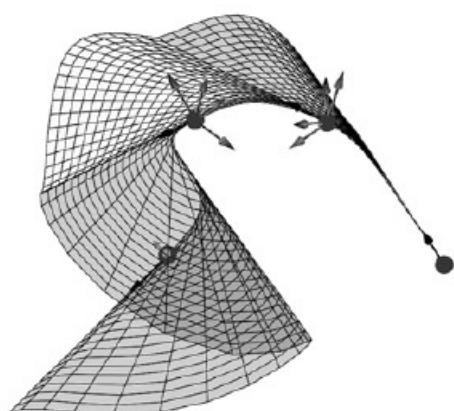


Рис. 2. Линейчатая полоса из пересекающих сегментов ПЛР

$$\begin{aligned}\bar{F}_i(t) &= (1 - 10t^3 + 15t^4 - 6t^5) \bar{P}_i + \\ &+ (10t^3 - 15t^4 + 6t^5) \bar{P}_{i+1} + (t - 6t^3 + 8t^4 - 3t^5) \bar{P}'_i + \\ &+ (-4t^3 + 7t^4 - 3t^5) \bar{P}'_{i+1} + \\ &+ ((1/2)t^2 - (3/2)t^3 + (3/2)t^4 - (1/2)t^5) \bar{P}''_i + \\ &+ ((1/2)t^3 - t^4 + (1/2)t^5) \bar{P}''_{i+1}.\end{aligned}$$

Последнее уравнение может быть представлено в матричном виде:

$$\begin{aligned}[F_i] &= [T][G_i], \quad (26) \\ [T] &= [1 - 10t^3 + 15t^4 - 6t^5, 10t^3 - 15t^4 + 6t^5, \\ &t - 6t^3 + 8t^4 - 3t^5, -4t^3 + 7t^4 - 3t^5, \\ &(1/2)t^2 - (3/2)t^3 + (3/2)t^4 - (1/2)t^5, \\ &(1/2)t^3 - t^4 + (1/2)t^5], [G_i] = \\ &= [\bar{P}_i, \bar{P}_{i+1}, \bar{P}'_i, \bar{P}'_{i+1}, \bar{P}''_i, \bar{P}''_{i+1}]^T,\end{aligned}$$

где  $[T]$  – матрица весовых коэффициентов,  $[G_i]$  – матрица геометрии.

$$\begin{aligned}[G_1] &= [\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}'_1, \bar{P}'_2, \bar{P}''_1, \bar{P}''_2]^T, \\ [G_2] &= [\bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}'_2, \bar{P}'_3, \bar{P}''_2, \bar{P}''_3]^T, \\ [G_3] &= [\bar{P}_3, \bar{P}_4, \bar{P}'_3, \bar{P}'_4, \bar{P}''_3, \bar{P}''_4]^T.\end{aligned}$$

Этим сегментам соответствуют торсы, состыкованные по нулевому порядку гладкости ( $n = 0$ ), имеющие общие образующие в узлах стыка, но несовпадающие трехгранники стрикций в этих узлах. Линейчатая полоса в этом случае в узлах стыка имеет изломы (рис. 2). Параметрические уравнения сегментов кусочного эрмитова сплайна определяются:  $[F_1] = [T][G_1]$ ;  $[F_2] = [T][G_2]$ ;  $[F_3] = [T][G_3]$ .

Первый порядок гладкости стыковки торсов для рассматриваемого случая может быть получен при сонаправленности векторов главных нормалей в узлах сегментов кусочного сплайна, различающихся дополнительными множителями (Рис.3). Изломы в этом случае сглаживаются. При

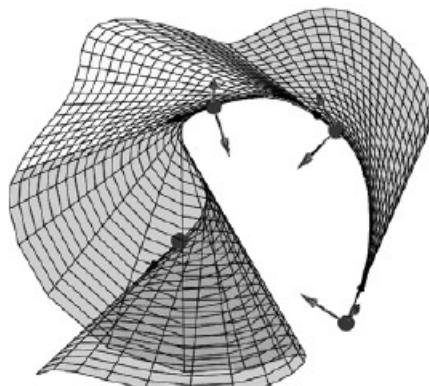


Рис. 3. Линейчатая полоса первого порядка гладкости стыковки сегментов ПЛР

этом матрицы геометрий имеют вид:

$$[G_1] = [\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}'_1, \bar{P}'_2, \bar{P}''_1, \bar{P}''_2]^T,$$

$$[G_2] = [\bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}'_2, \bar{P}'_3, a\bar{P}''_2, \bar{P}''_3]^T,$$

$$[G_3] = [\bar{P}_3, \bar{P}_4, \bar{P}'_3, \bar{P}'_4, b\bar{P}''_3, \bar{P}''_4]^T.$$

Изложенные в настоящей работе результаты

исследований могут быть положены в основу инженерного конструирования сложных технических поверхностей, состоящих из линейчатых сегментов, сстыкованных по различным условиям соприкосновения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Панчук, К.Л. Вопросы теории соприкасающихся линейчатых поверхностей / К.Л. Панчук. – Омск: ОмПИ, 1987. – 11 с. – Деп. в ВИНИТИ 22.05.87, №4496 – В87.
2. Панчук, К.Л. О соприкосновении линейчатых поверхностей / К.Л. Панчук // Начертательная геометрия и машинная графика в практике решения инженерных задач: межвуз. темат. сб. науч. тр. – Омск, 1987. – С. 62-66.
3. Бляшке, В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна. В 2-х т. Т.1. Элементарная дифференциальная геометрия [Текст] / В. Бляшке. – М.; Л.: Объед. науч.-техн. изд-во НКТП СССР, 1935. – 330с.
4. Зейлигер, Д. Н. Комплексная линейчатая геометрия [Текст] / Д. Н. Зейлигер. – М.; Л.: Гос. техн.-теорет. изд-во, 1934. – 196с.
5. Завьялов, Ю.С. и др. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко. – М.: Наука, 1980. 352с. – с. 81-83

Авторы статьи

Нитейский

Антон Сергеевич,  
аспирант(Омский государствен-  
ный технический университет),  
e-mail: [antongth@gmail.com](mailto:antongth@gmail.com)

Панчук

Константин Леонидович,  
докт. техн. наук, проф. каф. «Ин-  
женерная геометрия и системы ав-  
томатизированного проектирова-  
ния» (Омский государственный  
технический университет),  
e-mail: [Panchuk\\_KL@mail.ru](mailto:Panchuk_KL@mail.ru)