

УДК 517.9+539.19+541.6

С. Ш.Кажикенова

АППРОКСИМАЦИЯ СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ НЕОДНОРОДНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

По степени описания динамических свойств сплошных сред получены следующие системы уравнений: для идеальной жидкости – уравнения Эйлера, для вязкой жидкости – уравнения Навье – Стокса, для слабосжимаемых сред – уравнения Обербека – Буссинеска. В фундаментальных исследованиях и в области прикладных разработок эти математические модели являются общепринятыми для моделирования течения расплава. В класс несжимаемых сред данные математические модели объединяет условие соленоидальности поля скоростей, что относит их к уравнениям не типа Коши – Ковалевской. Именно это обстоятельство создает ряд математических трудностей при построении решений. Еще один отличительный признак моделей несжимаемых сред – их нелинейность.

Основные усилия исследователей направлены на преодоление проблем, обусловленных нелинейностью моделей. Именно наличие нелинейного конвективного члена считается главным препятствием для получения решений. В результате многочисленных исследований установлено, что попытки построения неявных схем приводят к многошаговым итерационным процессам с различными вариантами удовлетворения условия соленоидальности. Чтобы получить хорошую сходимость при получении численных решений необходимо на границе разностных сеток обеспечивать свойства сохранения потоков и высокую степень аппроксимации уравнений несжимаемого расплава.

На пути построения численных схем, обладающих хорошей сходимостью, были предприняты попытки регуляризовать исходные системы дифференциальных уравнений несжимаемого расплава. Отсутствие производной по времени от функции давления в исходной системе характеризует ее как незволюционную. Этот факт считался главным и способы регуляризации, как правило, был направлены на устранение этого «дефекта», в связи с этим строились различные ε - аппроксимации, в уравнение вводился малый параметр ε и производная по времени от давления с рядом слагаемых от искомых функций.

Основная задача, исследуемая в данной работе, состоит в определении движения вязкого несжимаемого расплава, если известны внешние силы, действующие на расплав, граничный режим. В основном, мы предполагаем, что существует такая система координат, в которой область, заполненная расплавом, неизменна. Предположение о постоянстве области выполнено в таких практически важных задачах, как задача обтекания твер-

дого тела безграничным потоком; в задаче о движении жидкости, находящейся под действием объемных сил, в сосуде с твердыми стенками, перемещающимся известным образом в пространстве и других. Проводимые в данной работе исследования позволяют утверждать факт не только однозначной разрешимости рассмотренной задачи, но и возможность применения для нахождения этих решений приближенных методов, например, метода Галеркина. Аппроксимация уравнений гидродинамики сопровождается сложными проблемами, создающими трудности при решении многомерных задач с помощью довольно известных неявных схем по времени. Для решения этих задач, на наш взгляд, наиболее конструктивным является метод расщепления. В связи с этим нами рассматривались различные подходы к построению схем расщепления для уравнений Навье–Стокса в смысле слабой ε - аппроксимации.

В ограниченной области $\Omega \subset R^3$ с гладкой границей S рассмотрим следующую систему нелинейных стационарных уравнений, представляющих математическую модель движения несжимаемого расплава [1]:

$$(\rho v \cdot \nabla)v = \mu \Delta v - \nabla p + \lambda(\nabla \rho \cdot \nabla)v + \\ + \lambda(v \cdot \nabla)\nabla \rho - \lambda^2 \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} \cdot \nabla \rho \cdot \nabla \right) \rho + f, \quad (1)$$

$$(v \cdot \nabla)\rho = \lambda \Delta \rho, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (3)$$

с граничными условиями:

$$v|_S = 0, \quad \rho|_S = \rho_S(x), \quad (4)$$

где $v(x) = v(x_1, x_2, x_3)$ – вектор-функция скоростей,

$\rho(x) = \rho(x_1, x_2, x_3)$ – поле плотностей,

$p(x) = p(x_1, x_2, x_3)$ – поле давления расплава,

$f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$ – вектор массовых сил,

λ, μ коэффициенты диффузии и вязкости, причем $\lambda > 0, \mu > 0$,

$S = \partial \Omega$ – достаточно гладкая граница области Ω .

Разрешимость задачи (1) – (4) была исследована в работе Смагулова Ш. С. и Байтуленова Ж. Б. [2]. Известно, что система уравнений (1) – (3) незволюционная (т.е. не является системой типа Коши- Ковалевской), и поэтому прямое применение численных методов затруднительно.

Для разрешения этой трудности мы будем рассматривать другую модель неоднородного расплава, являющуюся аппроксимацией исходной модели (1) – (4) с малым параметром $\varepsilon > 0$.

Итак, рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} (\rho^\varepsilon v^\varepsilon \cdot \nabla) v^\varepsilon &= \mu \Delta v^\varepsilon - \nabla p^\varepsilon + \\ &+ \lambda (\nabla \rho^\varepsilon \cdot \nabla) v^\varepsilon + \lambda (v^\varepsilon \cdot \nabla) \nabla \rho^\varepsilon - \\ &- \lambda^2 \operatorname{div} \left(\left(\frac{1}{\rho^\varepsilon} \nabla \rho^\varepsilon \cdot \nabla \right) \rho^\varepsilon \right) + \rho^\varepsilon f - \frac{1}{2} \rho^\varepsilon v^\varepsilon \operatorname{div} v^\varepsilon, \end{aligned} \quad (5)$$

$$(v^\varepsilon \cdot \nabla) \rho^\varepsilon = \lambda \Delta \rho^\varepsilon, \quad (6)$$

$$\varepsilon p^\varepsilon + \operatorname{div} v^\varepsilon = 0, \quad (7)$$

с граничными условиями:

$$v^\varepsilon|_S = 0, \quad \rho^\varepsilon|_S = \rho_S(x), \quad (8)$$

Как известно, система уравнений (5) – (8) является системой типа Коши-Ковалевской. Напомним, что R^n – евклидово пространство; $L_2(\Omega)$ – гильбертово пространство; $L_p(\Omega)$, $1 < p \leq 6$ – банахово пространство; $W_2^1(\Omega)$ – пространство, состоящее из элементов $L_2(\Omega)$, имеющих квадратично суммируемые по Ω обобщенные производные первого порядка; $W_2^2(\Omega)$ – пространство, состоящее из элементов $L_2(\Omega)$, имеющих квадратично суммируемые по Ω обобщенные производные первого и второго порядков; пространство $W_{\frac{1}{2}}^0(\Omega)$ – подпространство $W_2^1(\Omega)$, является

замыканием множества бесконечно-дифференцируемых финитных вектор – функций [3].

Определение 1/ Сильно-обобщенным решением задачи (5) – (8) называют совокупность функций $\{v^\varepsilon(x), \rho^\varepsilon(x), p^\varepsilon(x)\}$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} 1) \quad &v^\varepsilon(x) \in W_{\frac{1}{2}}^0(\Omega), \rho^\varepsilon(x) \in \\ &W_{\frac{1}{2}}^2(\Omega), 0 < m \leq \rho^\varepsilon(x) \leq M < \infty; \end{aligned}$$

$$2) \quad \forall \phi(x) \in W_{\frac{1}{2}}^0(\Omega) \quad \text{выполняется интегральное равенство:}$$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left\{ \rho^\varepsilon (v^\varepsilon \cdot \nabla) \phi^\varepsilon \cdot v^\varepsilon - \mu (\nabla v^\varepsilon, \nabla \phi) - \right. \\ &\left. - \lambda (\nabla \rho^\varepsilon \cdot \nabla) \phi \cdot v^\varepsilon + \frac{1}{2} \rho^\varepsilon \operatorname{div} v^\varepsilon \cdot (v^\varepsilon \phi) - \right. \\ &\left. - \lambda (\phi \cdot \nabla) \rho^\varepsilon \operatorname{div} v^\varepsilon - \lambda (v^\varepsilon \cdot \nabla) \phi \cdot \nabla \rho^\varepsilon + p^\varepsilon \operatorname{div} \phi \right\} dx = 0, \end{aligned}$$

$$+ \lambda^2 \left(\left(\frac{1}{\rho^\varepsilon} \cdot \nabla \rho^\varepsilon \cdot \nabla \right) \rho^\varepsilon \right) \nabla \phi - \rho^\varepsilon f \phi \} dx = 0, \quad (3)$$

Уравнения (6),(7) и граничные условия (8) выполняются почти всюду в Ω по соответствующей мере.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1 Если $f \in L_6(\Omega)$, $\rho_S \in W_2^{3/2}(S)$,

то при достаточно малом λ

$$\lambda \leq \alpha = \min \left\{ \frac{M}{16}, \frac{m^2}{C_1 m^2 + C_2 M^2}, \frac{\mu}{M - m} \right\},$$

существует хотя бы одно сильно-обобщенное решение задачи (5) – (8), где C_1, C_2 – константы, зависящие только от данных задачи и не зависящие от функций $v^\varepsilon, \rho^\varepsilon, p^\varepsilon$.

Теорема 2 Пусть выполнены все условия теоремы 1, тогда сильно-обобщенное решение задачи (5) – (8) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится к сильно-обобщенному решению задачи (1) – (4).

Доказательство теоремы 1 состоит из трех этапов: получение априорных оценок, применение метода Галеркина и предельного перехода. Хорошо известный метод Галеркина в сочетании с конечно-элементной моделью для регуляризованных уравнений свободен от схемной вязкости. Данный подход предполагает поиск кусочно-непрерывного приближенного решения на элементах с условием, что разность между приближенным и точным решениями должна быть ортогональна функциям, используемым при аппроксимации.

Пусть $\{\omega_i\}$ – базис в $L_2(\Omega)$ из задачи:

$$\begin{cases} \mu \Delta \omega_i - \nabla p_i = \lambda_i \omega_i \\ \varepsilon p_i + \operatorname{div} \omega_i = 0 \\ \omega_i|_S = 0. \end{cases}$$

Приближенное решение $v^{N,\varepsilon}, \rho^{N,\varepsilon}, P^{N,\varepsilon}$ представим в виде:

$$v^{N,\varepsilon} = \sum_{i=1}^N \xi_k^N \omega_k,$$

а плотность и давление есть классическое решение задачи:

$$\begin{cases} (v^{N,\varepsilon} \cdot \nabla) \rho^{N,\varepsilon} = \lambda \Delta \rho^{N,\varepsilon} \\ \rho^{N,\varepsilon}|_S = \rho_S(x) \end{cases} \quad (9)$$

$$\varepsilon p^{N,\varepsilon} + \operatorname{div} v^{N,\varepsilon} = 0. \quad (10)$$

Числа ξ_k^N находятся из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}
 & (\rho^{N,\varepsilon} \left(v^{N,\varepsilon} \cdot \nabla \right) v^{N,\varepsilon} - \mu \Delta v^{N,\varepsilon} - \\
 & - \lambda \left(\nabla \rho^{N,\varepsilon} \cdot \nabla \right) v^{N,\varepsilon} - \lambda \left(v^{N,\varepsilon} \cdot \nabla \right) \rho^{N,\varepsilon} \\
 & + \lambda^2 \operatorname{div} \left(\left(\frac{1}{\rho^{N,\varepsilon}} \cdot \nabla \rho^{N,\varepsilon} \cdot \nabla \right) \rho^{N,\varepsilon} \right) - (11) \\
 & - \frac{1}{2} \rho^{N,\varepsilon} v^{N,\varepsilon} \operatorname{div} v^{N,\varepsilon}, \omega_i = 0. \\
 & i = \overline{1, N}.
 \end{aligned}$$

Далее, аналогично [2], с использованием леммы Брауэра, доказывается существование решения задачи (9) – (11) и показывается, что для приближенных решений $v^{N,\varepsilon}, \rho^{N,\varepsilon}, p^{N,\varepsilon}$ справедливы априорные оценки:

$$\begin{aligned}
 \|\Delta \rho^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} (v^\varepsilon \cdot \Delta) \rho^\varepsilon \cdot \Delta \rho^\varepsilon \, dx \\
 \left\| v_x^\varepsilon \right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left\| \operatorname{div} v^\varepsilon \right\|^2 &\leq C < \infty, \\
 v^\varepsilon(x) &\in L_p(\Omega), \quad 1 < p \leq 6, \\
 \left\| \Delta \rho^\varepsilon \right\|^2 &\leq C < \infty, \\
 \rho^\varepsilon(x) &\in L_p(\Omega), \quad 1 < p \leq 6, \\
 \left\| p^\varepsilon \right\| &\leq C \left\| \nabla p^\varepsilon \right\| < \infty.
 \end{aligned}$$

Тогда из последовательностей $\{v^{N,\varepsilon}\}, \{\rho^{N,\varepsilon}\}, \{p^{N,\varepsilon}\}$ можно выделить подпоследовательности, для которых имеем:

$$\begin{aligned}
 \rho^{N,\varepsilon} &\rightarrow \rho^\varepsilon \quad * \text{слабо в } L_\infty(\Omega), \\
 \frac{1}{\rho^{N,\varepsilon}} &\rightarrow \frac{1}{\rho^\varepsilon} \quad * \text{слабо в } L_\infty(\Omega), \\
 \rho^{N,\varepsilon} &\rightarrow \rho^\varepsilon \quad \text{слабо в } W_2^2(\Omega), \\
 \rho^{N,\varepsilon} &\rightarrow \rho^\varepsilon \quad \text{сильно в } L_p(\Omega), \quad 1 < p \leq 6, \\
 v^{N,\varepsilon} &\rightarrow v^\varepsilon \quad \text{слабо в } W_2^1(\Omega), \\
 v^{N,\varepsilon} &\rightarrow v^\varepsilon \quad \text{сильно в } L_p(\Omega), \quad 1 < p \leq 6,
 \end{aligned}$$

$$p^{N,\varepsilon} \rightarrow p^\varepsilon \quad \text{слабо в } L_2(\Omega).$$

Далее, переходя к пределу по выбранным последовательностям в интегральном тождестве, заключаем, что предельные функции $v^\varepsilon, \rho^\varepsilon, p^\varepsilon$ являются сильно-обобщенным решением задачи (5) – (8).

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 устанавливается из условий:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho^\varepsilon} &\rightarrow \frac{1}{\rho} \quad * \text{слабо в } L_\infty(\Omega), \\
 \rho^\varepsilon &\rightarrow \rho \quad * \text{слабо в } L_\infty(\Omega), \\
 \rho^\varepsilon &\rightarrow \rho \quad \text{слабо в } W_2^2(\Omega), \\
 \rho^\varepsilon &\rightarrow \rho \quad \text{сильно в } L_p(\Omega), \quad 1 < p \leq 6, \\
 v^\varepsilon &\rightarrow v \quad \text{слабо в } W_2^1(\Omega), \\
 v^\varepsilon &\rightarrow v \quad \text{сильно в } L_p(\Omega), \quad 1 < p \leq 6, \\
 \varepsilon p^\varepsilon &\rightarrow 0 \quad \text{сильно в } L_2(\Omega).
 \end{aligned}$$

Далее, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в соответствующих тождествах, заключаем, что предельные функции v, p, ρ есть сильно-обобщенное решение задачи (1) – (4).

Теорема 2 доказана.

Наличие процедуры минимизации невязки по всему объему элемента и, как следствие, отсутствие схемной вязкости, делает этот метод уникальным инструментом исследования рассматриваемых моделей несжимаемых расплавов [4], как это имеет место и во многих других областях вычислительной математики. Следует отметить также его высокую точность и сходимость при решении краевых задач для эллиптических и параболических уравнений, уникальные возможности по применению нерегулярных сеток, эффективную аппроксимацию криволинейных границ, естественный учет различных типов граничных условий, простоту реализации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Кажикенова С. Ш., Байтуленов Ж. Б. ε - аппроксимация одной стационарной модели несжимаемой жидкости // Вестник КазНУ. Сер. мат., мех., инф. – 2003.- № 1 (36). – С. 13-18.
- 2 Смагулов Ш. С., Байтуленов Ж. Б. Корректность одной диффузионной стационарной модели неоднородной несжимаемой жидкости // Труды международной конференции «Современное состояние и перспективы развития математики в рамках программы: Казахстан в третьем тысячелетии». – Алматы, 2000. – С. 185-189.
- 3 Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. - М. Наука, 1970. - 288с.
- 4 Сулейменов Т., Малышев В. П., Бектурганов Н. С., Исагулов А. З., Кажикенова С. Ш., Абдрахманов Б. Т. Расщепление уравнений Навье-Стокса для течения расплава в плоском канале и в наклонном желобе // Вестник НАН РК. – 2004. - № 6. – С. 187-192.

□ Автор статьи:

Кажикенова
Сауле Шарапатовна
- канд/техн/ наук, доц/ каф/«Высшая
математика» (Карагандинский
государственный технический университет).
Тел. 8 701 292 9613.
Email: sauleshka555@mail.ru

УДК 519. 21

А.В. Бирюков

ГРАНУЛОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Рассмотрим дисперсную систему с частицами случайного размера. Пусть x - диаметр (наибольший линейный размер) частицы, который как случайная величина распределен с плотностью $f(x)$ - моментами M_k и неполными моментами $M_k(x)$.

Моменты и неполные моменты получаются интегрированием произведения $x^k f(x)$ в границах соответственно от нуля до бесконечности и от нуля до x . Гранулометрическую функцию определим отношением $F(x,k)=M_k(x)/M_k$.

Каждой частице дисперсной системы поставим в соответствие некоторую количественную характеристику, равную $r=t x^k$, $t=const$. Тогда значение гранулометрической функции $F(x,k)$ равно содержанию в дисперсной системе фракции с диаметрами частиц от нуля до x по суммарной r - характеристике.

Для гранулометрической функции $F(x,k) > F(x,k+1)$ причем наибольшее значение разности $F(x,k) - F(x,k+1)$ достигается при $x = M_k(x)/M_k$. Обозначим это наибольшее значение через $\Delta(k)$ и назовем максимальным расхождением.

В r - характеристике реальных частиц коэффициент t является случайной величиной, независимой от диаметра частиц. Так, например, для площади поверхности частицы S и объема V отношения S/x^2 и V/x^3 является случайными величинами с незначительной вариацией и центрами рассеяния соответственно 2 и 0,25.

Однако замена случайной величиной t ее средним значением может привести к ошибке в гранулометрических расчетах. Оценить величину этой ошибки можно следующим образом.

Используя независимость t от диаметра частиц, найдем верхнюю границу искомой ошибки. Если w - коэффициент вариации случайной вели-

чины t , а n - число частиц дисперсной системы, то верхняя граница ошибки составляет $3w\sqrt{M_{2k}} / M_k \sqrt{n}$.

Отсюда видно, что для достаточно больших значений n (как и бывает в действительности) искомая ошибка становится пренебрежимо малой. Это и оправдывает постулирование постоянства коэффициента t в гранулометрических расчетах.

Приведем примеры вычисления гранулометрических характеристик дисперсной системы для некоторых вероятностных законов. Простейшим из них является степенное распределение с плотностью $f(x)=mx^{m-1}/x_0^m$, $x \in (0,x_0)$ моментами $M_k=m \cdot x_0^k/(m+k)$ и гранулометрической функцией $F(x,k)=(x/x_0)^{m+k}$.

Для этого распределения максимальное расхождение составляет

$$\Delta(k) = (m+k)^{m+k} / (m+k+1)^{m+k+1}$$

Параметр распределения $m=M_1/(x_0-M_1)$. При $m=1$ степенное распределение становится равномерным.

Многие эмпирические распределения хорошо аппроксимирует симметричное бета-распределение с плотностью

$$f(x)=6x(1-x), x \in (0,1)$$

моментами $M_k=6/(k+2)$ ($k+3$) и гранулометрической функцией $F(x,k)=x^{k+2}(1-x)$.

Поскольку

$$M_{k+1}/M_k=(k+2)(k+4),$$

то

$$\Delta(k) = [(k+2)/(k+4)]^{k+2} [1-(k+2)/(k+4)] .$$

□ Автор статьи:

Бирюков
Альберт Васильевич
- докт.техн.наук, проф.каф. высшей
математики КузГТУ.
Тел. 8(3842)39-63-19