УДК 519. 17

А.В. Бирюков, П.А. Бирюков

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ГРАФЫ

Для любого натурального числа n и любого множества A натуральных чисел обозначим через $S(n,A)$ граф с вершинами 1, 2, …, n, в котором вершины x и y смежны, если $x+y\in A$. Граф порядка n будем называть арифметическим, если он изоморфен графу $S(n,A)$ для некоторого множества A. Содержательность этого понятия иллюстрируют следующие примеры.

(1) Для любого n полный граф K_n является арифметическим: он изоморфен графу $S(n,A)$ для $A=\{3,4,\ldots,2n-1\}$.

(2) Все простые цепи и простые циклы являются арифметическими графами. Положим $A_n=\{4,n+2, n+4\}$ для всех нечетных $n\geq 3$ и $A_n=\{5,n+3, n+5\}$ для всех четных $n\geq 4$. Граф $S(n,A)$ является простой цепью с концевыми вершинами 1 и 2. Добавляя к множеству A число 3, получаем простой цикл порядка n.

(3) Пусть $A=\{3,5,7,..,2n-1\}$. Тогда $S(n,A)$ - это полный двудольный граф $K_{m,m}$ (при $n=2m$) или $K_{m,m+1}$ (при $n=2m+1$). Можно показать, что полный двудольный граф $K_{s,t}$ не является арифметическим при $s<t-1$. В частности, наименьший неарифметический граф – это звезда $K_{1,3}$.

(4) Напомним, что колесо W_n - граф порядка $n+1$. полученный добавлением к простому циклу C_n новой вершины, смежной со всеми вершинами цикла (другими словами, граф W_n изоморфен графу n- угольной пирамиды). Легко проверить, что при n =3,4, 5 граф W_n является арифметическим. С другой стороны, можно показать, что если в арифметическом графе порядка n >2 есть вершина степени $n-1$, то одна из остальных вершин имеет степень $k\geq n-3$. Следовательно, при n >5 граф W_n не является арифметическим.

(5) Пусть $A=\{3,5,7,11,13,15\}$. Граф $S(8,A)$ изоморфен графу куба. Легко показать, что графы октаэдра и треугольной призмы также являются арифметическими. Примером неарифметического кубического графа является граф Петерсена.

Интересную серию арифметических графов образуют графы $S(n,P)$, где P - множество всех простых чисел. Все эти графы двудольны, поскольку любые две вершины одинаковой четности несмежны. Связность графа $S(n,P)$ можно доказать по индукции, применяя теорему Чебышева: для любого n >1 интервал $(n,2n)$ содержит хотя бы одно простое число p. Тогда вершина n графа $S(n,P)$ смежна с вершиной $p-n$ подграфа $S(n-1,P)$. По индуктивному предположению этот подграф связен и, следовательно, граф $S(n,P)$ связен.

На основании проведенных авторами вычислений можно высказать гипотезу: диаметр графа $S(n,P)$ равен 3 для всех n >4. Как легко видеть, эта гипотеза эквивалентна следующему утверждению о простых числах.

(*) Для любых двух натуральных чисел $x<y$ одинаковой четности существует такое натуральное число $a<y$, что $x+a$ и $y+a$ простые числа.

Непосредственным следствием (*) является утверждение о том, что каждое четное число является разностью двух простых чисел. Это утверждение до сих пор не доказано и не опровергнуто [1], как и более сильные гипотезы Полиньяка и Диксона [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Серпинский В.* Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 92 с.
2. *Рибенбойм П.* Рекорды простых чисел.//Успехи мат.наук, 1987. – Т.42 – Вып. 5. – С . 119-176.

Автор статьи:

Бирюков
Альберт Васильевич
- докт.техн.наук, проф.каф. высшей математики КузГТУ.
Тел. 8(3842)39-63-19

Бирюков
Петр Альбертович
- канд.физ.-мат.наук, доц.каф. алгебвы и геометрии КемГУ.
Тел. 8(3842)58-46-80