МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.21 +519.876.5

А.С.Сорокин

КОМБИНАТОР УПОРЯДОЧЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИИ ОЧЕРЕДЕЙ В КОНСТРУКЦИЯХ МОДЕЛЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Раздел логики, занимающийся изучением и анализом таких понятий и методов, как переменная, функция, операция подстановки, классификация предметов по типам или категориям носит название комбинаторной логики.

Комбинаторная логика изучает комбинаторы и их свойства. Основными понятиями в комбинаторной логике являются одноместная функция и операция применения функции к аргументу (аппликация). Комбинаторами называют члены некоторого класса операций над функциями, замкнутого относительно аппликации. Сформулированное в терминах комбинаторной логики понятие "комбинаторно определимой функции" явилось одним из первых способов уточнения понятия алгоритма.

Понятие функции является первичным по отношению понятию множества. При таком обобщении функция может принимать объекты одного с ней уровня как в качестве аргументов, так и в качестве значений. Аргументом функции может служить сама функция. Начало комбинаторной логики положено работой советского математика М. И. Шейнфинкеля [1], опубликованной в 1924 году. Большая часть результатов принадлежит американскому логику Х. Карри. Комбинаторная логика находит широкое применение в теории языков программирования [2 - 5].

1. Использование распределений случайных величин

Рассмотрим различные подходы к стохастическому моделированию с распределенными случайными переменными. Формально представляем стохастическую модель, которая использует свойство невосприимчивости [6-9]. Описаны условия гарантии невосприимчивости при стохастическом процессе, при которых стохастическая сеть Петри (SPN) модели может быть невосприимчивой к специфическим переходам.

1.1. Невосприимчивость. Часто случайная величина, распределённая по экспоненте, не соответствует в применениях моделирования характеристик. Многие особенности систем, такие как, например, перерывы остаются обычно не без последствия. Поэтому было бы удобно включить распределенные случайные величины в модели характеристик SPA. Стохастический процесс невосприимчив, если его установившееся распределение зависит от распределения одной или более случайных величин, представляющих *только через их средние* времена мест пребывания в состоянии. Так как ряд *уравнений баланса* охарактеризован *невосприимчивостью* времен мест пребывания в состояниях, то невосприимчивость уравновешивает эти уравнения.

1.1.1. Обобщенный полумарковский процесс.

Обобщенный полумарковский процесс (GSMP) определен набором состояний $\{g : g \in G\}$. У каждого из этих состояний есть активные элементы, $s \in S$. g текущего состояния будет содержать ряд активных элементов. Время пребывания в данном состоянии каждого элемента s зависит от нормы $\tilde{n}(s, g)$. Когда *время пребывания* активного элемента s истекает, процесс перемещается в другое состояние $g' \in G$ с вероятностью $P(g, s, g')$ Когда процесс изменения состояния g из-за окончания времени пребывания активного элемента прекращается, остающиеся элементы $g \bigcap S^*$ сохраняют свои сроки пребывания. Активным элементам с новым текущим состоянием дают новые сроки пребывания, выборочно привлекая их из управляющих функций распределения. Пусть S', S^* являются непересекающимися, и такими, что $S' \bigcup S^* = S$.

Если $s \in S'$, тогда время пребывания s распределено по экспоненте; если же $s \in S^*$, то s имеет общее распределение времён пребывания. Отметим, что существует ограничение на поведение процесса: никакие два активных элемента S^* не могут быть одновременно активизированными или одновременно выбыть. Результаты невосприимчивости моделей первоначально были получены для GSMP. Работая с этой моделью, Маттес [8] доказал:

Теорема 1([8]). *Для обобщенного полумарковского процесса GSMP эквивалентны два следующих утверждения*:

(1) *Процесс невосприимчив к элементам S^*. Таким образом, распределение времен пребы-*

вания элементов S^* может быть заменено на любое другое распределение с тем же самым средним, сохраняющим то же самое распределение равновесия.

(2) *Когда все элементы S^* распределены по экспоненте, то смена состояний из-за окончания пребывания элемента S^* эквивалентна смене состояний из-за начала пребывания того же элемента.*

Второе утверждение описывает *уравнения баланса невосприимчивости* для GSMP.

1.1.2. Условия невосприимчивости. SPA и SPN [9] могут быть расценены как характеристики высокого уровня, моделирующие парадигмы. Приводится описание методов поведения, расширенных с помощью выбора временной информации, соединяющей временные продолжительности случайных переменных, с некоторыми особенностями моделирования: *переходы* в SPN и *действия* в SPA. Полезно было бы ослабить предположение для временных продолжительностей об их распределении по экспоненте. Отметим, что применение понятия невосприимчивости оказывается не простым. Это потому, что особенность, которая появляется однажды в модели высокого уровня, может воздействовать в основном стохастическом процессе на многие состояния. Условия невосприимчивости были исследованы в SPNs. В работе [10] рассмотрена система SPNs, удовлетворяющая следующим правилам:

(1)Время включения непротиворечивых переходов, которые разрешены одновременно, должно быть распределено по экспоненте.

(2)Время включения исключительного перехода, т.е. перехода, с которым никогда одновременно не может быть допущен другой переход, может иметь общее распределение.

По этим правилам по интуиции можно понять *полумарковский процесс* (SMP), выбранный авторами стохастической модели. SMP - процесс возобновления, который проходит согласно матрице вероятностей перехода (Цепь Маркова) через ряд состояний S в последовательных точках возобновления. Для данной последовательности состояний, с учётом каждого последующего элемента, времена пребывания в каждом состоянии независимы. Поэтому времена перехода у этого процесса всегда будут марковскими. Эти два условия могут быть приняты при обращении к уравнениям баланса стохастического процесса. Второе упомянутое выше условие является строгим; для такого перехода t, каждая маркировка, в которой это разрешено, представляет состояние, в которое никакой другой переход не разрешен. Однако, это означает, что уравнения баланса невосприимчивости для t *немедленно* удовлетворяет глобальному уравнению баланса для состояний, в которых разрешен t. Первое условие исключает общее распределение, одновременно разрешая непротиворечивые переходы, но нет никакой гарантии, что это уравнение баланса невосприимчивости удовлетворяет глобальному уравнению баланса.

В [11] указано условие, что находящийся в противоречии переход может иметь общее распределение, но все другие, с которыми он находится в противоречии, должны быть распределены по экспоненте. Это нужно понимать как практическое ограничение, означающее, что SMP с общим распределением потребует малого количества вычислительных действий.

Из [12] следует, что это ограничение приводит к разрешимым состояниям вероятностей. В принципе, все одновременно разрешенные переходы, которые находятся в противоречии, могут иметь общее распределение. Когда один работает, то все другие заблокированы, и когда повторно разрешено, то каждому переходу назначено новое время существования. Это означает, что при любой передаче маркировки ряду противоречивых переходов следующая маркировка не будет требоваться в оставшееся время существования. Так как переходы конкурируют между собой, то следующая маркировка должна быть выбрана основанной на переходе, который является самым устойчивым. Поэтому распределение времен пребывания в состояниях SMP реализуется для минимума распределений, присоединенных к каждому из переходов.

В [11] рассмотрены условия, при которых GSMP может быть получен из SPN. Переходы SPN представлены как активные элементы. Все одновременно разрешенные общие распределенные переходы переносят свои истекшие сроки пребывания на маркировку последующего элемента.

В [11] предложена теорема Маттеса для использования с SPN.

Следствие 1.1 ([11]). *Следующие два утверждения эквивалентны*:

(1) *Модель SPN невосприимчива к каждому общему распределенному переходу t.*

(2) *Если все общие распределенные переходы t, как предполагается, распределены по экспоненте с тем же самым средним, и для всех маркировок j, которые разрешают переходу t смену состояний в основном марковском процессе, возможно, j уравновешивает t при смене состояний из j из-за окончания t.*

Выбор состояния последующего элемента является зависящим от времени; рассматриваем два разрешенных перехода, один из которых t, равномерно распределен между m и n. Если проходит n единиц времени, то t должен быть запущен. Если переход после прохождения m единиц времени запущен, то это был точно не t.

Это свойство называют *зависимым возрастным направлением.* В [13] *усредненный по времени* стохастический процесс с независимыми от времени вероятностями перехода дает то же самое распределение равновесия как первоначальный процесс, при условии, что усредненный временной процесс невосприимчив к общим распределенным переходам. Техническая трудность состоит в построении усредненного времени пребывания из среднего времени ряда переходов с произвольными распределениями и затем последующих вероятностей состояний.

1.2. Алгебры процесса с общими распределениями

Альтернативный и популярный подход, для того чтобы включить общие распределения случайных величин в SPA необходимо построить алгебру процесса, где у каждой деятельности может быть общее распределение времен пребывания. У такого подхода есть и преимущества и неудобства. Очевидное и самое большое преимущество: это предоставляемая пользователю гибкость дополнительного моделирования. Больше нет требования, чтобы у модельных действий продолжительности были распределены только по экспоненте. Одно неудобство - то, что некоторые известные правила алгебры процесса применимы только в общем виде. Например, рассмотрим параллельную композицию двух процессов, каждый из которых способен выполнять единственную деятельность. Используя неформальную систему обозначений в известном *законе о расширении,* имеем, что $a \| b$ *соответственно* эквивалентно $a.b + b.a$. Однако, когда a и b не смоделированы с распределениями 'без последствия', то подход с чередованием реализуется неверно, когда используется преимущественное право с семантикой перезапуска. Происходит это потому, что после окончания одной деятельности другой же деятельности не представляется выбора времени пребывания. Если общие распределения использовать произвольно в моделях алгебры процесса, то становится затруднительно в численном виде решать процессы для установившихся распределений. Менее ограниченным стохастическим процессам соответствует немарковская алгебра процесса модели. В [14] приведен более ранний немарковский подход к алгебре процесса. Его структура увеличивала традиционный процесс алгебры с вероятностными и установленными особенностями, приводящими к моделям с тремя различными отношениями перехода. Подход к оценке характеристики должен был показать, как модели могли развиваться в течение длительного времени с помощью дискретного моделирования.

Обобщен пример алгебры процесса, включающий общие распределения вероятностей полумарковской алгебры процесса (GSMPA) [15]. Соединены все традиционные комбинаторы алгебры процесса, включая выбор и параллельную композицию, и отмечена длительность действий в PEPA. В [15] эти действия обеспечивают отбор для GSMP стохастического процесса, представленного в разделе 1.1.1. GSMPA представлена семантикой ST, означающей, что развитие действий представлено как комбинация начала действия и завершения действия. В [16] описаны альтернативная алгебра процесса, диалоговые обобщенные полумарковские процессы (IGSMP), соединение общих распределенных длительностей. В работе [17] с диалоговыми Цепями Маркова (IMCs) у отмеченных действий никакой длительности нет до тех пор, пока задержки представлены анонимными действиями с общими распределенными длительностями. Авторы [17] ограничивают IGSMPA таким образом, чтобы была возможность синхронизировать несвязные действия. В [16] показано, что возможно привести модели, соединяющие последовательности несвязных действий таким способом, который сохраняет определенные свойства алгебры, и основной стохастический процесс будет все еще GSMP. Работа продолжена таким образом, что набор связных действий по умолчанию может быть соединен подобным же способом. Например, последовательность общего распределенного $\tau-$ действия может быть приведена к единственному $\tau-$действию, распределенному как свертка распределений в последовательности.

В [15] приводится пример простой системы организации очередей, смоделированной в GSMPA, где у очереди имеется детерминированное время обслуживания. Таким образом, GSMP будет невосприимчив, если соединены специфические состояния модели GSMP, а затем получают CTMC, решение которого для установившегося состояния традиционно. Полученный новый комбинатор, который представлен в этой работе, не даёт модельщику свободы произвольно использовать общие распределенные действия. Их использование ограничено определенными действиями в пределах построения данной модели. Однако невосприимчивость гарантируется при построении, и не должна быть определена самим модельщиком на основе "модель есть модель".

В [18] был представлен альтернативный SPA. Авторы выделяют отдельное от выполняемых действий связное поведение стохастической модели. Это немедленно даёт более наглядное соответствие GSMP. Например, если P - выделенный процесс, то $\{|C|\}P$, где $\{|C|\}$ представляет собой набор *хронометров*. Каждый из *хронометров* имеет функцию распределения, и таким образом соответствует активному элементу GSMP. $\{|C|\}P$ представляет процесс, где все хронометры $\{|C|\}$ установлены согласно их функциям распределений, и начинают отсчитывать в обратном порядке. Выделенный процесс $C \mapsto P$, может стать процессом P, если хронометр C достиг 0. Это изменение представляет собой состояние в GSMP, когда активный элемент достигает конца своего времени пребывания. Вычисление процессов может быть сохранено по переходам и урегулировано хронометрами; таким образом, учитываются остаточные сроки времени пребывания. Из-за разделения действий и их длительностей они восстанавливают форму закона о расширении. Однако, для оценки характеристики они не пытаются использовать аналитические методы, а вместо этого выбирают случаи дискретного моделирования.

В [19-21] предложен особый подход к использованию общих распределений в алгебре процесса. Предложена $PEPA_{ph}^{\infty}$, модификация PEPA таким образом, чтобы действия были распределены по типам фаз распределения вероятностей, и кроме того, были рассмотрены модели, потенциально представляющие бесконечное множество клиентов в системе организации очередей. Предлагается решение модели с бесконечным числом состояний, имеющей ограниченную структуру; при этом должно быть получено разложение модели на начальную часть и повторную часть. Базой такой ограниченной $PEPA_{ph}^{\infty}$ модели стохастического процесса будет бесконечная образующая матрица с детально повторяющейся структурой, и которая может быть разрешена с использованием матричных геометрических методов. Несмотря на особенности $PEPA_{ph}^{\infty}$, которые поверхностно подобны тем, что представлены в этой работе, предложенные методики являются весьма несхожими. Модели, которые построены неявно, содержат модели очередей, но ни одна не может содержать произвольное число клиентов. С другой стороны, теория *невосприимчивости может быть* использована, причем она не должна ограничиваться рассмотрением только типа фазы распределения. Использование этого нового комбинатора для построения моделей может быть полностью решено обычным путём так, как будто все действия были распределены по экспоненте; заметим, что это свойство гарантируется теорией невосприимчивости.

Классические алгебры процесса игнорируют понятие временной протяженности и рассматривают только функциональное поведение модели. PEPA –это алгебра *стохастического процесса.* Она расширяет классические алгебры процесса, с каждым действием связывая распределенную по экспоненте случайную величину, которая представляет временную протяженность. Тесная связь стохастического процесса между моделью PEPA и CTMC даёт возможность вычислить критерии качества работы.

Модели PEPA построены композиционно из *компонентов*, которые в состоянии взаимодействовать друг с другом. Каждый из этих компонентов способен к выполняющим *действиям.* Формально, деятельность a описана как пара (α, r), где α - *тип действия*, т. е. *тип* деятельности, и $r \in R^{+}$ есть норма деятельности. Множество всех типов действия обозначено A, а R^{+} вместе с символом T определено как множество положительных вещественных чисел.

Этот символ обозначает неуказанную (или *пассивную*) норму деятельности. Такая деятельность может иметь место только в синхронизации с другой того же самого типа, норма которой определена. Когда r определена, её значение есть параметр экспоненциального распределения и управляет продолжительностью деятельности. Множество всех действий $A \times R^{+}$, обозначено Act.

В работе предложен комбинатор, применяемый при построении моделей, содержащих допустимые действия, и одновременно невосприимчивых. SMP генерирует простые последовательные компоненты, невосприимчивые ко всем действиям; также имеется набор параллельных компонент, у которых отсутствует взаимозависимость с невосприимчивыми последовательными компонентами. Необходимо предоставить взаимодействие и сделать модель конструктивной, ограничивая форму взаимодействия так, чтобы уравнения баланса невосприимчивости были бы совместимы с глобальными уравнениями баланса. Представлена форма взаимодействия между косвенно-параллельными и последовательными компонентами, не взаимодействующими непосредственно и влияющими на продвижение друг друга с помощью заданной теории организации очередей. Полученный комбинатор использован для определения набора типов действий и выполнения действий этих компонентов комбинатором, вынужденным кооперироваться с процессом арбитра в FCFS. В ожидании кооперации рассмотрены компоненты, как стоящие в 'очереди', так и модели, построенные с таким комбинатором, называемые моделями теории организации очередей. Комбинатор указывает норму, по которой заканчиваются действия организации очередей. Такие модели невосприимчивы ко всем действиям, допускаемым вне 'очередей'. Определён новый комбинатор, $Q_{A,\xi}(\bullet)$, приводящий к следующим двум результатам.

2. Комбинатор упорядочения организации очередей.

Представлен новый комбинатор $Q_{A,\xi}(\bullet)$. Он использован для построения модели невосприимчивой к распределениям, связанным со специфическими действиями. Принят полный набор n последовательных компонентов S_i, , $1 \le i \le n$, который должен быть применён в теории организации очередей. Этот комбинатор определяет кооперацию процесса R_A и кооперацию множества M_A, зависящую от a множества действий типа A. Отметим, что множества кооперации, действия τ скрытого типа могут быть не представлены в A.

Определение 1 (Простой комбинатор организации очередей) Комбинатор имеет вид:

$$Q_A(S_1,\ldots,S_n) \overset{def}{=} \left(\prod_{i=1}^{n} S_i\right) \underset{M_A}{\rhd\lhd} R_A.$$

Для системы обозначений $Q_A(S_1,\ldots,S_n)$, допускается для каждого $S_i, 1 \le i \le n$, продолжение параллельно, независимо друг от друга; осуществляется синхронизация каждого S_i с характерным процессом, определённым на типах действий для каждого S_i и на множестве A. Если каждый S_i из подмножества процессов в данное время допускает деятельность, тип действия которой принадлежит A, то каждый S_i должен 'стоять в очереди' для выполнения своей деятельности. Итак, в любой момент времени процесс S_i допускает продолжение только одной организации очередей.

Пусть A такое, что для любого $\alpha \in A$, найдётся такой единственный S_i, что для любого r имеет место $(\alpha,r) \in \vec{A}ct(S_i)$; и для любого S_i найдётся такой единственный $\alpha \in A$, что для любого r имеет место $(\alpha,r) \in \vec{A}ct(S_i)$. Каждый S_i для выполнения своей деятельности будет стоять в очереди, тип которой принадлежит A. Эти ограничения означают, что во время пребывания каждый процесс взаимодействует с арбитром только единожды и может быть единственным образом идентифицирован с деятельностью, с которой кооперируется.

Приведены определения, которые допускают спецификацию кооперации множества M_A, названную множеством синхронизации арбитра.

Определение 2 (Допустимый тип действия). Пусть S последовательный компонент с деятельностью a. Тогда β предоставляет возможность действия типа a в S, если для всех производных S' из S, и таких, что $S' \overset{a}{\rightarrow}$, существует производная $S'' \neq S'$ такая, что для любого r имеет место $S'' \overset{(\beta,r)}{\rightarrow} S'$; для всех производных S'' из S, таких, что для любого r и $S'' \overset{(\beta,r)}{\rightarrow} S'$, имеет место $S' \overset{a}{\rightarrow}$.

Действие типа a может рассматриваться как тип деятельности, которая может быть немедленно выполнена моделью, допускающей a, и при условии выполнения всегда приведёт к тому, чтобы быть допустимой. Это множество $\ell_A(S)$ является набором типов действий, предоставляющих возможности действий S существующих типов A.

Определение 3 (Множество синхронизации арбитра). Пусть $P \equiv Q_A(S_1,\ldots,S_n)$ процесс теории организации очередей. M_A - множество синхронизации арбитра P при условии что $A_\circ = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$.

Предполагаем, что если i, j, такие, что существуют типы действий процесса S_i отличных от S_j, т. е., если $i \neq j$, то имеет место $\ell_A(S_i) \bigcap \ell_A(S_j) = 0$.

Это гарантирует упорядоченность, по которой компоненты входят в очередь или оставляют её. Считаем, что для любой деятельности очереди, которая является допустимой в процессе S, существует тип действий a в S. Определен процесс R_A, который реализует необходимое время пребывания в организации очередей. Этот процесс R_A называют процессом арбитра.

Определение 4 (Процесс арбитра). Пусть $P \equiv Q_A(S_1,\ldots,S_n)$ является процессом упорядочения организации очередей. Пусть

$$\vec{A}ct_A(P) \overset{def}{=} \{(\alpha,r) \in \vec{A}ct(P) : \alpha \in A\}$$

обозначает множество действий очереди, принадлежащих процессу P. Для процесса арбитра P $R_{A,\langle\,\rangle}$, определен следующим образом

$$R_{A,\langle\,\rangle} \overset{def}{=} \sum_{1\le i\le n}\sum_{\alpha\in A}\sum_{\beta\in\ell_\alpha(S_i)} (\beta,T).R_{A,\langle S_i\rangle},$$

$$R_{A\langle S_j,S_m,\ldots,S_n\rangle} \overset{def}{=} \sum_{\substack{1\le j\le n\\ i\notin\{j,m,\ldots n\}}} \sum_{\alpha\in A}\sum_{\beta\in\ell_\alpha(S_i)} (\beta,T)R_{A,\langle S_j,S_m,\ldots,S_n,S_i\rangle} +$$

$$+ \sum_{(\alpha,r)\in\vec{A}ct_A(S_j)} (\alpha,T)R_{A,\langle S_m,\ldots,S_n\rangle},$$

$$\left|\{S_j,S_m,\ldots,S_n\}\right| < n,$$

$$R_{A\langle S_j,S_m,\ldots,S_n\rangle} \overset{def}{=} \sum_{(\alpha,r)\in\vec{A}ct_A(S_j)} (\alpha,T).R_{A,\langle S_m,\ldots,S_n\rangle},$$

$$\left|\{S_j,S_m,\ldots,S_n\}\right| = n.$$

Процесс арбитра рассматривается как очередь, которая управляет процессами времени пребывания. Длина очереди определяется тем, что комбинатор равен числу процессов, заданных как аргументы комбинатора.

2.1. Ограничение норм деятельности

Процесс арбитра, заданный определением 3, выполняет действия, которые пассивны относительно взаимодействующей модели. Это упрощает определение, и гарантирует, что арбитр не затрагивает норму, по которой выполняются любые действия. Чтобы получить результаты невосприимчивости, требуется дополнительное ограничение - все процессы с очередями должны выполнять свои действия очереди с нормой, установленной для специфического процесса арбитра и числа клиентов в очереди (т. е., средняя продолжительность очереди деятельности процесса с очередями распространяется на все процессы с очередями и может изменяться только с длиной очереди). Ограничение норм действий очереди подчеркивает, что эти действия находятся под неявным контролем процесса арбитра. Эффект ограничения заключается в том, что когда построены уравнения баланса невосприимчивости, то они совместимы с глобальными уравнениями баланса процесса. Задача может измениться, если модель PEPA с организацией очередей устанавливает порядок таким образом, что это соответствует ограничению.

Определение модели PEPA с организацией упорядочения очередей с множеством действий A задано следующим образом

$$Q_A(S_1,\ldots,S_n) \overset{def}{=} \left(\prod_{i=1}^{n} S_i\right) \underset{M_A}{\bowtie} R_A ,$$

где R_A - процесс арбитра и M_A множество синхронизации арбитра. Текущая модель организации очередей определена таким образом, чтобы она соответствовала необходимому ограничению нормы. Арбитр ограничивает поведение процессов, но не затрагивает норм, по которым они выполняют действия. Каждый процесс имеет право на индивидуальное поведение в очереди, организуя пассивную деятельность очереди так, чтобы очередь определяла сама, как должны проходить процессы нормы.

Определение 5 (Замена нормы). Пусть P процесс PEPA и A набор типа действий, не содержащий τ. Тогда $P_{A\to T}$ есть процесс PEPA, где каждое возникновение непассивной деятельности (α,r) такое, что $\alpha \in A$ становится пассивным, т. е., это изменение определено на $(\alpha,T).P_{A\to T}$ структуры P таким образом

$$P \equiv Q \underset{L}{\bowtie} R : Q_{A\to T} \underset{L}{\bowtie} R_{A\to T}, \quad P \equiv Q + R : Q_{A\to T} + R_{A\to T},$$

$$P \equiv Q / L : Q_{A\to T} / L, \quad P \equiv (\alpha,r).Q : (\alpha,T).Q_{A\to T} \quad , \quad \text{если} \quad \alpha \in A,$$

$$P \equiv (\alpha,r).Q : (\alpha,r).Q_{A\to T} \quad , \text{ если } \alpha \notin A,$$

$$P \equiv Q : Q' \text{ , где } Q' \overset{def}{=} R_{A\to T} \quad , \quad \text{если } Q \overset{def}{=} R.$$

Итак, получена следующая модификация процесса арбитра.

Определение 6 (Ограничения нормы процесса арбитра). Пуст $P \equiv Q_A(S_1,\ldots,S_n)$ есть процесс, содержащий упорядочение организации очередей. Пусть ξ есть последовательность норм $\langle \hat{e}_1,\ldots,k_n \rangle$, которая определяет норму, выполненную для любой S_i деятельности очереди, зависящей от текущей длины очереди. Тогда норма процесса арбитра ограничена ξ, R_A^{ξ}, и определяется следующим образом:

$$R^{\xi}_{A,\langle\,\rangle} \overset{def}{=} \sum_{1\le i\le n} \sum_{\alpha\in A} \sum_{\beta\in \ell_{\alpha}(S_i)} (\beta,T).R^{\xi}_{A,\langle S_i\rangle},$$

$$R^{\xi}_{A,\langle S_j,S_m,\ldots,S_n\rangle} \overset{def}{=} \sum_{\substack{1\le j\le n \\ i\notin\{j,m,\ldots n\}}} \sum_{\alpha\in A} \sum_{\beta\in \ell_{\alpha}(S_i)} (\beta,T)R^{\xi}_{A,\langle S_j,S_m,\ldots,S_n,S_i\rangle} +$$

$$+ \sum_{(\alpha,r)\in \vec{A}ct_A(S_j)} (\alpha,k_k).R^{\xi}_{A,\langle S_m,\ldots,S_n\rangle} ,$$

$$\left|\langle S_j,S_m,\ldots,S_n\rangle\right| = k < n ,$$

$$R^{\xi}_{A,\langle S_j,S_m,\ldots,S_n\rangle} \overset{def}{=} \sum_{(\alpha,r)\in \vec{A}ct_A(S_j)} (\alpha,k_n).R^{\xi}_{A,\langle S_m,\ldots,S_n\rangle},$$

$$\left|\langle S_j,S_m,\ldots,S_n\rangle\right| = n .$$

Это достаточно простая задача выписывания нормы, определяющей упорядочение организации очередей ограниченной модели.

$$Q_{A,\xi}(S_1,\ldots,S_n) \overset{def}{=} \left(\prod_{i=1}^{n} S_{iA\to T}\right) \underset{M_A}{\bowtie} R^{\xi}_{A,\langle\,\rangle} ,$$

2.2. Кратные очереди.

Определим модель с несколькими упорядочениями организации очередей, т. е. есть несколько абстрактных очередей, в которые поступают во время цикла пребывания последовательные процессы. Это непосредственное расширение модели со структурой для одной упорядоченной организации очередей. Предполагаем, что N упорядочение организации очередей и для $1 \le i \le N$, допустим набор действий A_i таких типов, что для любых $1 \le i < j \le N$, $A_i \cap A_j = 0$; $A_* = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$, а ξ_i есть конечная последовательность норм.

Определение 7 (Расширенный комбинатор организации очередей). Расширенный комбинатор имеет вид:

$$Q_{\langle A_1,\xi_1,\ldots,A_N,\xi_N\rangle}(S_1,\ldots,S_n) \overset{def}{=}$$

$$\overset{def}{=} \left(\ldots \left(\left(\prod_{i=1}^{n} S_{iA\to T} \right) \underset{M_{A_1}}{\bowtie} R^{\xi_1}_{A_1} \right) \ldots \underset{M_{A_N}}{\bowtie} R^{\xi_N}_{A_N} \right).$$

Громоздкая система обозначений заменена на $Q_{\chi}(S_1,\ldots,S_n)$, и использована для представления $Q_{\langle A_1,\xi_1,\ldots,A_N,\xi_N\rangle}(S_1,\ldots,S_n)$.

В итоге представлен новый выведенный комбинатор для PEPA. Этот комбинатор используют в конструкциях моделей последовательных процессов, которые синхронизируют согласно упорядочению организации очередей. Несмотря на такую синхронизацию, можно гарантировать невосприимчивость времен мест пребывания в специфических состояниях модели, и таким образом, можно гарантировать невосприимчивость действий PEPA в этих случаях. Если состояние не допускает синтаксического выбора, то можно использовать неэкспоненциальное распределение для моделирования продолжительности разрешенной деятельности. Этот приём может быть использован с другими марковскими алгебрами процессов.

Комбинатор строит модели PEPA, которые являются определенно компактным подмножеством с полной алгеброй. Для получения результатов невосприимчивости необходима эта ограничительная структура; в стохастическом процессе имеют место строгие требования к уравнениям баланса невосприимчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *SchönfinkelM.I.,* Über die Bausteine der mathematischen Logik, Mathematische Annalen, 1924, Bd. 92, p.305-316..
2. *Curry H. B., Feys R.,* Combinatory logic, V. 1, Amst., 1958.
3. *Curry H. B.,Hindley J., Seldin J.,* Combinatory logic, V. 2, Amst.-L., 1972.
4. *Curry H. B.*, Recent advances in combinatory logic. Bulletin de la Société mathématique de Belgique, 1968, t. 20, 1-3.
5. *Church A.,* The calculi of lambda-conversion, Princeton, 1941.
6. *Сорокин А.С.* Моделирования характеристик систем мультисервер-мультиочереди MSMQ. // Вестн. Кузбаского гос. тех. унив., 2012. № 1(89) . Кемерово, С. 84-87.
7. *Сорокин А.С.* Парадигмы программирования и алгебра процесса моделирования характеристик. // Вестн. Кузбаского гос. тех. унив., 2011. № 4 (86). Кемерово, С. 77-82.
8. *Matthes K.* Zur Theorie der Bedienungsprozesse, in: Trans. 3rd Prague Conference Inf. Th., Stat. Dec. Fns. Rand. Proc., 1962, pp. 513–528.
9. *Molloy M.K.* Performance analysis using stochastic Petri nets, IEEE Trans. Comput. C-31 (1982) 913–917.
10. *Dugan J.B., Trivedi K.S., Geist R., Nicola V.* Extended stochastic Petri nets: applications and analysis, Technical Report DUKE-TR-1984-16, Department of Computer Science, Duke University, 1984.
11. *Henderson W., Lucic D.* Applications of generalised semi-Markov processes to stochastic Petri nets, in: Performance of Distributed and Parallel Systems, Proc. IFIP TC7/WG 7.3 International Seminar on Performance of Distributed and Parallel
Systems, Kyoto, Japan, 7–9 December 1988, North Holland, Amsterdam, 1989.
12. *Ajmone Marsan M. Chiola C.* On Petri nets with deterministic and exponentially distributed firing times, in: Lecture Notes in Computer Science "Advances in Petri Nets", Vol. 266, Springer, Berlin, 1987, 132–145.
13. *Rumsewicz M., Henderson W.* Insensitivity with age-dependent routing, Adv. Appl. Prob. 21 (1989) 398–408.
14. *Harrison P.G., Strulo B.* Stochastic process algebra for discrete event simulation, Esprit Basic Research Series, Springer, Berlin, 1995, pp. 18–37.
15. *Bravetti M., Bernardo M., Gorrieri R.* Towards performance evaluation with general distributions in process algebras, Lect. Notes Comput. Sci. 1466 (1998) 405–422.
16. *Bravett M., Gorrieri R.* The theory of interactive generalized semi-Markov processes, Theor. Comput. Sci. 282 (1) (2002) 5–32.
17. *Hermanns , H.* Interactive Markov chains, Ph.D. Thesis, University of Erlangen-Nurnberg, Germany, 1998.
18. *D'Argenio P.R., Katoen J.-P. , Brinksma E.* A stochastic automata model and its algebraic approach, in: Proceedings of the Fifth Process Algebras and Performance Modelling Workshop, 1997, pp. 1–16.
19. *Hillston J.* PEPA: performance enhanced process algebra, Technical Report CSR-24-93, Department of Computer Science, The University of Edinburgh, 1993.
20. *Hillston , J. , Thomas N.* Product form solution for a class of PEPA models, Perform. Eval. 35 (1999) 171–192.
21. *Clark G.* Techniques for the construction and analysis of algebraic performance models, Ph.D. Thesis, The University of Edinburgh, 2000.

Автор статьи:

Сорокин
Андрей Семенович
- канд. физ.-мат.наук, доцент, ст.н.с.
(филиал КузГТУ , г. Новокузнецк)
тел.: 8(3843) 772459