ТЕХНОЛОГИЯ МАШИНОСТРОЕНИЯ

УДК. 621.01

Л.Н. Гудимова, Л.Т. Дворников

ОБОСНОВАНИЕ ВЗАИМОЗАВИСИМОСТЕЙ МЕЖДУ ПАРАМЕТРАМИ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИМИ СТРУКТУРУ ПЛОСКИХ ШАРНИРНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Какой бы ни была сложной кинематическая цепь, она может быть вполне охарактеризована ограниченным числом определяющих её параметров, между которыми существуют устойчивые взаимозависимости. Многие параметры, о которых пойдёт речь в настоящей статье, давно и хорошо известны, а некоторые описываются впервые и требуют пояснений. Обратимся к разветвлённой многозвенной открытой кинематической цепи, показанной на рис.1.

Эта цепь характеризуется следующими параметрами: общим числом звеньев вне зависимости от их сложности – n (их в цепи на рис. 1 – 22, они обозначены арабскими цифрами), общим числом кинематических пар вне зависимости от их класса – p (их в цепи 30, они обозначены римскими цифрами), наиболее сложным базисным звеном цепи с числом пар τ, т.е. τ – угольником, (на рисунке 1 оно – пятиугольное). Присоединение к базисному звену других звеньев приводит к ветвлению цепи, число ветвей цепи будем обозначать через γ. Ветви, которые прирастают звеньями, могут заканчиваться свободными парами, эти свободные пары определяют число выходов цепи – δ, на рис.

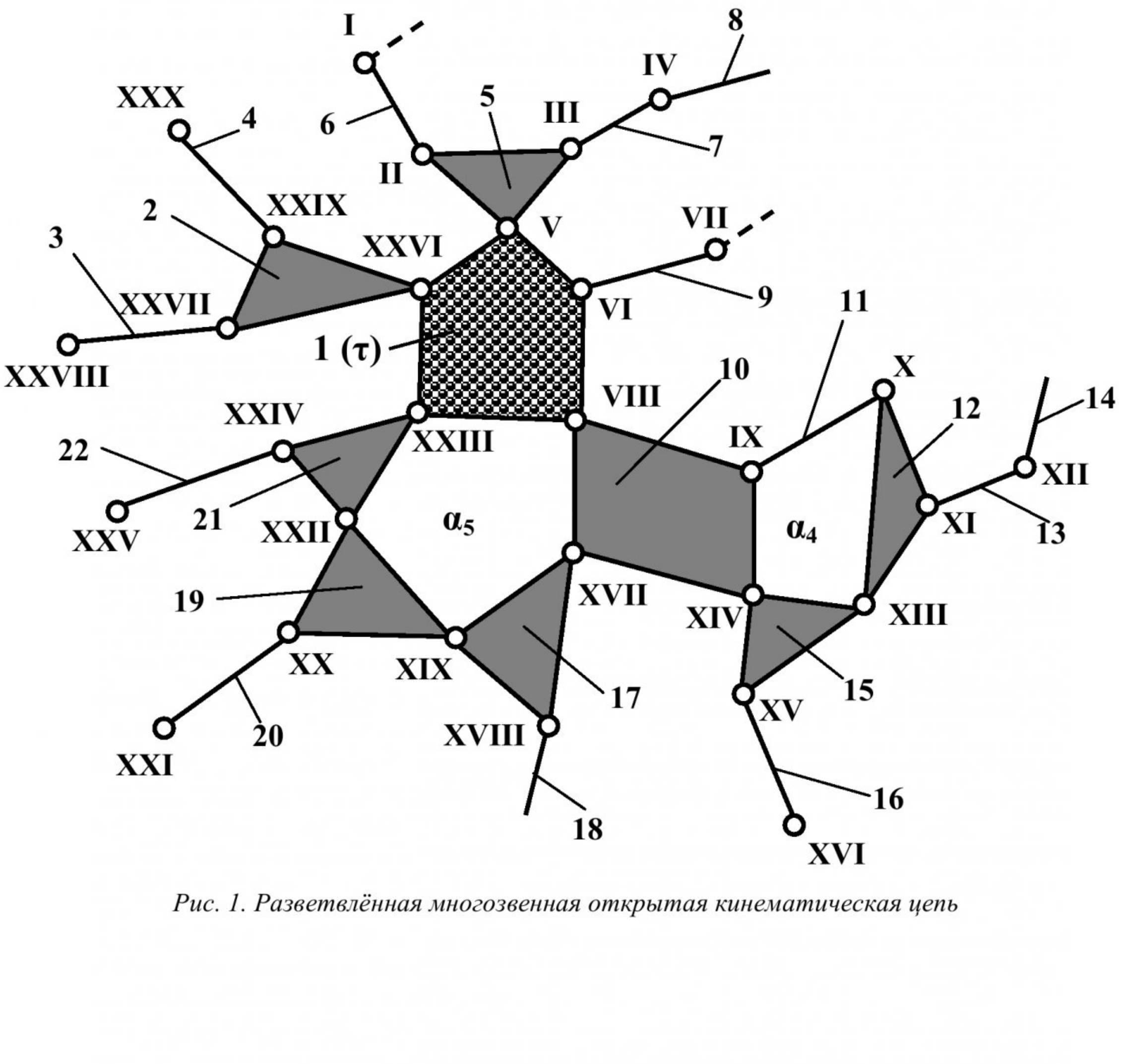

Рис. 1. Разветвлённая многозвенная открытая кинематическая цепь

1 - $\delta = 8$. В цепи звенья могут образовывать замкнутые изменяемые контуры числом α. В приведённой цепи $\alpha = 2$. Замкнутые изменяемые контуры могут быть различной сложности по числу образующих их звеньев – α_i, в описываемой цепи показаны контуры α_5 и α_4. Некоторые из ветвей заканчиваются звеньями, которые не добавляют в цепь кинематических пар. Обозначим такие звенья как n_0. В цепи (рисунок 1) их показано три – под номерами 8, 14 и 18. Каждое из звеньев определяется числом сторон – двухпарные, например звено 6 – двумя сторонами; трёхпарные, например звено 5 – тремя сторонами; четырёхпарные, например звено 10 – четырьмя сторонами; пятипарные, в рассматриваемой цепи это звено 1 – пятью сторонами и т.д. Звено n_0 определяется одной стороной, т.к. номер стороны определяется кинематическими парами в начале и в конце сторон. Общее суммарное число сторон цепи λ_c состоит из внутренних $\lambda_в$ (внутри замкнутых изменяемых контуров) и наружных $\lambda_н$. Все наружные стороны распределяются между выходами цепи

$$\lambda_н / \delta = \lambda_{нi}.$$

Приступим к рассмотрению взаимозависимостей между названными десятью параметрами кинематических цепей (n, p, τ, γ, δ, α, λ_c, $\lambda_в$, $\lambda_н$, $\lambda_{нi}$).

В приведённой на рисунке 1 цепи могут присутствовать кинематические пары различных классов p_k, одноподвижные – p_5, двухподвижные – p_4, трёхподвижные – p_3, четырёхподвижные – p_2, пятиподвижные – p_1.

Общее число кинематических пар цепи независимо от их класса, можно определить, суммируя их исходя из следующего соображения – самое большое число пар в цепь – τ штук привносит τ – угольник, такое же по сложности звено как τ – угольник, присоединяясь к τ – угольнику, добавит в цепь (τ - 1) пар.

Если таких звеньев (τ - 1) штук, т.е. $n_{\tau - 1}$, то все они добавят в цепь $(\tau - 1)n_{\tau - 1}$ пар, менее сложное звено – (τ - i), добавит $[\tau - (\tau - i)]n_{[\tau - (\tau - i)]}$ пар, т.е. in_i пар, звено (n_2) (например звено 5) добавляет в цепь две пары, звено (n_1) (например звено 6) добавляет одну пару, а звено (n_0) (например звено 8) кинематических пар в цепь не добавит.

Тогда общее число пар цепи будет

$$p = \tau + (\tau - 1)n_{\tau-1} + ... + in_i + ... + 3n_3 + 2n_2 + n_1 \quad (1)$$

Трёхпарное звено 19 в рассматриваемой цепи, замыкая изменяемый контур α_5, добавляет в цепь одну пару и поэтому является звеном n_1.

Имея это ввиду, дадим определение звену n_i.

Звеном n_i будем называть такое звено, которое добавляет в цепь по i кинематических пар. В этом его абсолютная сущность.

Такое звено может быть различной сложности – трёхпарным, четырёх-парным и т.д., но оно, замыкая ветви, добавляет всегда по i пар.

Если проанализировать цепь (рисунок 1), то можно легко обнаружить, что в ней $\tau = 5$, звеньев $n_4 = 0$, $n_3 = 1$ (звено 10), $n_2 = 5$ (звенья 2, 5, 12, 17 и 21), звеньев $n_1 = 12$ (звенья 3, 4, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 19, 20, 22).

Таким образом, зависимость (1) для рассматриваемой цепи запишется в виде

$$p = 5 + 4n_4 + 3n_3 + 2n_2 + n_1$$

и даст результат $p = 5 + 4{\cdot}0 + 3{\cdot}1 + 2{\cdot}5 + 1{\cdot}12 = 30$, т.е. ровно столько, сколько было их посчитано при построении цепи.

Пользуясь приведёнными данными, можно определить также общее число звеньев n по зависимости

$$n = 1 + n_{\tau-1} + ... + n_3 + n_2 + n_1 + n_0, \quad (2)$$

где под цифрой 1 понимается одно звено, принимаемое за базисное или за τ – угольник.

Зная, что $n_4 = 0$, $n_3 = 1$, $n_2 = 5$, $n_1 = 12$ и $n_0 = 3$, найдём

$$n = 1 + n_4 + n_3 + n_2 + n_1 + n_0 = 22,$$

что соответствует приведенному числу звеньев при описании цепи.

Под параметром γ понимается число ветвей, которое было бы в цепи при условии, если бы строилась цепь без изменяемых замкнутых контуров.

Параметр этот можно найти из следующих соображений: в цепи, построенной без изменяемых замкнутых контуров, число ветвей – есть число свободных пар, которое определится, если из общего числа кинематических пар цепи вычесть все пары, которые образовали (n - 1) звеньев, будучи присоединёнными к τ – угольнику, т.е.

$$\gamma = p - (n - 1) \quad . \quad (3)$$

Если в формулу (3) подставить значения p и n из (1) и (2), то получим

$$\gamma = \tau + (\tau - 2) \cdot n_{\tau-1} + ... \\ .... + (i - 1) \cdot n_i + ... + 2n_3 + n_2. \quad (4)$$

В случае, если цепь строится с замкнутыми изменяемыми контурами α, то между γ, α и числом выходов δ появляется взаимосвязь вида

$$\gamma = \delta + \alpha \quad (5)$$

Покажем, что зависимости (4) и (5) вполне соответствуют рассматриваемой цепи (рис. 1).

Согласно (4)

$\gamma = 5 + 3n_4 + 2n_3 + n_2 = 5 + 2{\cdot}1 + 5 = 12$,

с другой стороны, согласно (5) при известных $\alpha = 2$ и $\delta = 10$, $\gamma = 10 + 2 = 12$.

Обратимся теперь к общему числу сторон

цепи λ_c. Обоснуем связь между числом сторон и принятым τ. Очевидно, что τ – угольник имеет τ сторон, также по τ сторон имеют все звенья $n_{\tau-1}$. Соответственно звенья $n_{\tau-2}$, $n_{\tau-3}$ и т.д. имеют по (τ-1), (τ-2) и т.д. сторон, тогда

$$\lambda_c = \tau + \tau \cdot n_{\tau-1} + (\tau-1) \cdot n_{\tau-2} + \ldots + (i-1) \cdot n_i + \ldots + 3n_2 + 2n_1 \quad (6)$$

Зависимость (6) позволяет находить общее число сторон любой кинематической цепи, для которой известны параметры τ, $n_{\tau-1}$, $n_{\tau-2}$, $n_{\tau-3}$ и т.д.

Чтобы найти общий вид формулы (6), раскроем её. Имея полное основание предположить, что число сторон цепи определяется, в частности, количеством кинематических пар в ней, найдём разницу между λ_c по (6) и p по (1)

$$\lambda_c - p = = (n_{\tau-1} + n_{\tau-2} + \ldots + n_i + \ldots + n_2 + n_1) = = (n-1).$$

Отсюда

$$\lambda_c = p + (n-1) \quad (7)$$

При $n = 22$ и $p = 30$ в цепи на рис. 1, получим по (7) $\lambda_c = 51$.

Все рассуждения, приведённые выше, касались любых кинематических цепей, вне зависимости от используемых в них видов кинематических пар и числа звеньев. Если обратиться теперь к цепям, обладающим определённостью движения, в частности к механизмам, рассмотрим так называемую формулу подвижности кинематических цепей. В самом общем виде такая формула была выведена в 1936 г. Добровольским В.В. и имеет вид

$$W_m = (6-m)n - \sum_{5}^{m+1} p_k \quad (8)$$

В этой формуле W_m – целое число, определяющее подвижность кинематической цепи, m – параметр Добровольского, определяющий число общих наложенных на всю цепь связей.

Если подвижность W назначается равной единице ($W = 1$) кинематическая цепь становится механизмом.

Число общих связей m, накладываемых на цепь, может задаваться целым положительным числом от нуля до четырёх, и, в зависимости от этого, по И.И. Артоболевскому цепи могут быть разделены на семейства – нулевое ($m = 0$), первое ($m = 1$), второе ($m = 2$), третье ($m = 3$) и четвёртое ($m = 4$) семейство.

Для каждого из семейств формула подвижности (8) принимает вид

$$W_0 = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1, \quad (9)$$

$$W_1 = 5n - 4p_5 - 3p_4 - 2p_3 - p_2, \quad (10)$$

$$W_2 = 4n - 3p_5 - 2p_4 - p_3, \quad (11)$$

$$W_3 = 3n - 2p_5 - p_4, \quad (12)$$

$$W_4 = 2n - p_5. \quad (13)$$

Внутри семейств могут быть выделены подсемейства, которые определяются классами используемых кинематических пар. Так как всего существует пять классов кинематических пар: p_5, p_4, p_3, p_2, p_1, то для разных семейств могут быть найдены все возможные подсемейства по следующей логике: в нулевом семействе могут использоваться все пять кинематических пар, каждая из пар в цепи может быть или не быть, и это касается всех используемых пар, т.е. таких ситуаций возможно 2^{5-m}, однако тогда, когда заходит речь об использовании последней из пар, то возможна ситуация появления в подсемействе структуры вообще без кинематических пар, что не может быть реализовано. Тогда для всякого семейства число подсемейств определится зависимостью

$$N_{Wm} = 2^{5-m} - 1. \quad (14)$$

В соответствии с (14) всего можно выделить 57 подсемейств механизмов нулевого семейства $2^5 - 1 = 31$, первого семейства $2^4 - 1 = 15$, второго $2^3 - 1 = 7$, третьего $2^2 - 1 = 3$ и четвёртого $2^1 - 1 = 1$.

Чтобы изучить все возможные кинематические цепи, необходимо определиться с изучением подсемейств и составить универсальную структурную систему из уравнений.

Рассмотрим подробнее плоские кинематические цепи, описываемые формулой (12).

В этом семействе можно выделить три подсемейства – с парами p_5 и p_4, с парами p_5 и с парами p_4, т.е.

$$W_{3(0)} = 3n - 2p_5 - p_4, \quad (12.1)$$

$$W_{3(1)} = 3n - 2p_5, \quad (12.2)$$

$$W_{3(2)} = 3n - p_4. \quad (12.3)$$

Обратимся к первому подсемейству третьего семейства цепей (12.2), в которых могут использоваться лишь одноподвижные кинематические пары p_5.

Для этого случая из уравнений (1), (2) и (12.2) составим универсальную структурную систему

$$\begin{cases} p_5 = \tau + (\tau-1)n_{\tau-1} + \ldots + in_i + \ldots + n_1, & (14.1) \\ n = 1 + n_{\tau-1} + \ldots + n_i + \ldots + n_1 + n_0, & (14.2) \\ W = 3n - 2p_5. & (14.3) \end{cases}$$

Прежде всего, найдём взаимосвязь между n и τ в этих цепях.

Самой простой цепью будет такая, в которой сложные звенья от $n_{\tau-1}$ до n_2 не используются, т.е.

когда

$$n_{\tau-1} = \dots n_i = \dots n_2 = 0.$$

Будем изучать замыкаемые на стойку цепи (закрытые), в которых $n_0 = 0$. Тогда из (41.1) и (14.2) получим

$$p_5 = \tau + n_1,$$

$$n = 1 + n_1,$$

откуда $p_5 = \tau + n - 1$.

Подставив полученное значение p_5 в (14.3), найдём, что

$$W = n - 2\tau + 2,$$

откуда

$$\tau = \frac{n - W}{2} + 1,$$

т.е. самый сложный τ – угольник, который может быть использован в плоских кинематических цепях, определится числом используемых звеньев.

Для механизмов ($W = 1$) это будет

$$\tau_{max} = \frac{n+1}{2}, \qquad (15)$$

а для групп нулевой подвижности (групп Ассура), когда $W = 0$

$$\tau_{max} = \frac{n}{2} + 1. \qquad (16)$$

Соответственно, из (15) и (16) можно найти минимальное число звеньев, которое потребно для создания цепей при заданном τ,

для механизма

$$n_{min} = 2\tau - 1, \qquad (17)$$

для групп Асура

$$n_{min} = 2\tau - 2 \qquad (18)$$

Если задаться значением $n = 7$, то по (15) самым сложным τ – угольником в механизме может быть принято четырёхпарное звено. Значит при $n = 7$ возможно использовать и $\tau = 3$, и $\tau = 4$.

Если потребуется создать десятизвенные группы Ассура ($n = 10$), то по (16) найдём, что $\tau_{max} = 6$ и тогда можно строить группы с $\tau = 3$, $\tau = 4$, $\tau = 5$ и $\tau = 6$.

Если в качестве τ–угольника принять пятипарное звено ($\tau = 5$), то в соответствии с (17) в цепи механизма требуется использовать 9 звеньев, а в группе Ассура по (18) – 8 звеньев.

Таким образом, между числом звеньев цепи и её базисным звеном, определяемым числом его кинематических пар τ, существует устойчивая связь.

Также как τ, через число звеньев определяются числа ветвей γ и числа сторон цепей λ_c. Подставим в (3) значение p_5 из (14.3) для механизма ($W = 1$)

$$p = \frac{3n - 1}{2}$$

для группы Ассура ($W = 0$)

$$p = \frac{3n}{2},$$

и получим

для механизма ($W = 1$)

$$\gamma = \frac{n+1}{2}$$

для группы Ассура ($W = 0$)

$$\gamma = \frac{n+2}{2}.$$

Подставляя те же значения p_5 в (7), найдём число сторон цепи

для механизма ($W = 1$)

$$\lambda_c = \frac{5n - 3}{2},$$

для групп Ассура ($W = 0$)

$$\lambda_c = \frac{5n - 2}{2}$$

Отметим ещё, что число ветвей γ и число сторон λ_c цепей можно связывать между собой через уравнения

для механизма

$$\lambda_c + \gamma = 3n - 1,$$

$$\lambda_c - \gamma = 2(n - 1),$$

для групп Ассура

$$\lambda_c + \gamma = 3n,$$

$$\lambda_c - \gamma = 2(n - 1).$$

Легко видеть, что рассмотренный выше метод синтеза структур кинематических цепей в состоянии разрешать все вопросы при реальном проектировании механических систем.

□ Авторы статьи:

Дворников Леонид Трофимович
- докт.техн.наук, проф., зав. каф. теории механизмов и машин и основ конструирования (Сибирский гос. индустриальный университет, г. Новокузнецк) , тел. 46-57-91

Гудимова Людмила Николаевна
– канд.техн.наук, доц. каф. теории механизмов и машин и основ конструирования (Сибирский гос. индустриальный университет).
E- mail: lyu-qudiova@yandex.ru