

графически в координатах  $n, d$  на рис. 1.

Мы видим, что при переходе на более высокий структурный уровень вступает в действие закон или принцип прогрессивного увеличения

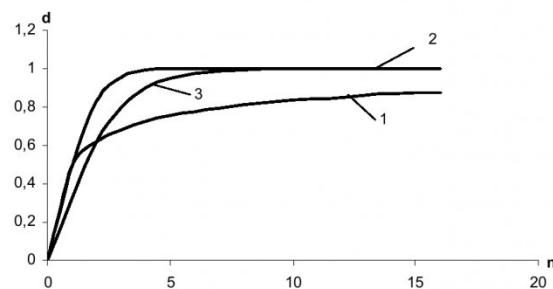


Рис.1. Зависимость степени детерминации от уровня ( $n$  – номер уровня,  $d$  – степень детерминации, 1 – зависимость по теореме I, 2 – уровневая детерминация по новой модели, 3 – системная детерминация по новой модели

разнообразия [5]. Так как распределение вероятностей по этим уровням не влияет на качество продукции, то при расчетах достаточно ограни-

читься только междууровневыми корреляциями. Из таблицы 1 видно, что уровневая детерминация  $d_n$  и гармонизированная детерминация  $\overline{I_n(d)}$  совпадают только для первых двух уровней. В дальнейшем уровневая детерминация резко возрастает, приближаясь на седьмом уровне к единице. Системная детерминация занимает промежуточное положение. Очевидно,  $\overline{I_n(d)}$  ближе к системной детерминации, для которой значение детерминации меньше за счет вклада нижних уровней, отличающихся большей стохастичностью. Системная детерминация, как видно, существенно зависит от длины кода элемента  $k$ . На втором уровне технологической схемы получается значение, практически совпадающее с отношением золотого сечения. Отсюда следует, что при произвольной элементной базе должны отличаться особой распространенностью трехуровневые системы с бинарным принципом организации. Однако все три модели требуют идентификации при сравнении с практическими данными, что требует самостоятельного анализа.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Шеннон К. Э. Математическая теория связи // Работы по теории информации и кибернетике. – М.: ИЛ, 1963. – С. 243-332.
- 2 Хартли Р. Передача информации // Теория информации и ее приложения. – М.: ИЛ, 1959. – С. 5-35.
- 3 Налимов В. В. Вероятностная модель языка. – М.: Наука, 1979. – 69 с.
- 4 Волькенштейн М.В. Энтропия и информация. – М.: Наука, 1986. – 192с.
- 5 Малышев В. П. Вероятностно-детерминированное отображение. – Алматы: Фылым, 1994. – 376 с.
- 6 Сороко Э. М. Структурная гармония систем. – Минск: Наука и техника, 1984. – 264 с.
- 7 Седов Е. А. Эволюция и информация. – М.: Наука, 1976. – 232 с.

□ Автор статьи :

Кажикенова  
Сауле Шарапатовна  
- канд.техн. наук, доцент каф. «Высшая  
математика» (Карагандинский государ-  
ственный технический университет)  
Email: [sauleshka555@mail.ru](mailto:sauleshka555@mail.ru)

УДК 669 + 519.2

С.Ш. Кажикенова, В. П. Малышев

## ЭНТРОПИЙНО-ИНФОРМАЦИОННЫЕ ОЦЕНКИ В ОБЛАСТИ ЦВЕТНОЙ МЕТАЛЛУРГИИ

Совершенствование технологического процесса производства меди с учетом беднеющего и комплексного по составу сырья невозможно на основе только традиционных методов вскрытия причинно-следственных связей в процессах общей технологической схемы с анализом их материальных и тепловых балансов. Необходим дополнительный энтропийно-информационный анализ для определения баланса между неопределенностью и завершенностью технологических переде-

лов или схемы в целом, то есть информационного баланса любых производственных процессов.

Подобное дополнение диктуется тем, что если материальный и тепловой балансы основаны на использовании всеобщих законов сохранения массы и энергии, то последний из всеобщих законов сохранения – закон сохранения суммы информации и энтропии – до сих пор в металлургии не используется.

При общей характеристике энтропийно-

информационного анализа любых объектов широко используется статистическая формула Шеннона для выражения неопределенности любой системы [1]:

$$H = - \sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i, \quad (1)$$

где  $p_i$  – вероятность обнаружения какого-либо однородного элемента системы в их множестве  $N$ ;

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Рассмотрим применение данной формулы для количественной оценки неопределенности качества продукта или технологического передела через неопределенность главного элемента системы. В качестве вероятности обнаружения главного элемента технологической системы примем его содержание в продукте, выраженное в долях единицы.

До опубликования созданной К.Шенномоном теории Р.Хартли предложил определять количество информации по формуле [2]:

$$H_{max} = \log_2 N, \quad (2)$$

где  $H_{max}$  – количество информации;  $N$  – число элементов системы.

Информация, как мера определенности, отражает функцию структурного начала в технологической системе, а энтропия, как мера неопределенности, ее бесструктурного дополнения [3]. Если  $\overline{I(d)}$ ,  $\overline{I(h)}$  – относительные значения информации И энтропии и на основании закона сохранения суммы энтропии и информации выполнено условие:

$$\overline{I(d)} + \overline{I(h)} = 1,$$

то  $\overline{I(d)}$  есть решение уравнения:

$$\overline{I(d)}^n + \overline{I(d)} - 1 = 0, \quad (3)$$

где  $n \in Z, n \geq 0$ .

Для многоуровневой иерархической системы технологического передела важным является описание нижестоящего уровня как взаимодействие взаимосвязанных подсистем, каждая из которых обладает своими информационными свойствами. Поэтому при получении информационной оценки основное внимание обращено на внутриуровневые и межуровневые взаимодействия. Рассмотренный подход, на наш взгляд, полностью соответствует основным требованиям системного энтропийно-информационного анализа, так как обеспечивает при моделировании иерархической системы технологических процессов целостность ее рассмотрения за счет общетеоретических и методических концепций, позволяющих целиком удерживать в поле зрения всю систему в целом для решения задачи на всех уровнях. Кроме того, на основе учета основных элементов в системе и

связей между ними обеспечивается полнота и всесторонность рассмотрения. Предложенный алгоритм упрощения при моделировании позволяет адекватно отразить реальный технологический передел и учесть определяющие факторы в иерархической системе.

Информационная емкость технологической системы определяется по ее стохастической части. Количество детерминированной информации рассчитывается как разность между максимально возможной информацией технологической системы и ее стохастической информацией и определяется равенством:

$$I_n(d) = H_{n(max)} - I_n(h) = \\ = H_{n(max)} - \frac{H_{n(max)}}{(n+1)!} = H_{n(max)} \left[ 1 - \frac{1}{(n+1)!} \right]. \quad (4)$$

Предельная степень детерминации и неустранимой стохастичности технологической системы определяются по формулам:

$$d_{\sum_n} = \frac{I_{\sum_n}(d)}{H_{\sum_n(n(max))}}, \quad h_{\sum_n} = \frac{I_{\sum_n}(h)}{H_{\sum_n(n(max))}}, \quad (5)$$

где  $I_{\sum_n}(d)$ ,  $I_{\sum_n}(h)$  – системные детерминированная и стохастическая составляющие,

$H_{\sum_n(n(max))}$  – системная максимальная информация.

С целью получения аналитической зависимости максимума стохастической информации от общих условий формирования технологической системы выведем методом математической индукции рекуррентную формулу для нахождения  $I_n(h)$ . Для этого определим стохастическую составляющую информации технологической системы на нулевом уровне, то есть при  $n=0$ :

$$I_0(h) = \frac{H_{0(max)}}{1!} = \frac{k_0 \log N}{1!}.$$

Далее определим стохастическую оставляющую на первом уровне  $n=1$ :

$$I_1(h) = \frac{H_{1(max)}}{2!} = \frac{k_0 \cdot k_1 \cdot \log N}{2!} = \\ = \frac{k_0 \log N}{1!} \cdot \frac{k_1}{2} = \frac{k_1}{2} I_0(h).$$

Для уровня  $n=i$ :

$$I_i(h) = \frac{H_{i(max)}}{(i+1)!} = \frac{k_0 \cdot k_1 \cdots k_i \log N}{(i+1)!} = \\ = \frac{k_0 \cdot k_1 \cdots k_{i-1} \log N}{i!} \cdot \frac{k_i}{i+1} = \frac{k_i}{i+1} I_{i-1}(h).$$

Так, математической индукцией установлено, что на  $n$ -ом уровне иерархической системы

Таблица 1. Содержание меди в продуктах ЖГМК и БГМК

Передел	Уровень организации	Наименование	Содержание (%)	Среднее значение	
				%	д.е.
Добыча	0	Руда	0,5-1,2	0,85	0,0085
Обогащение	1	Концентрат	5,5-40	22,75	0,2275
Плавка	2	Штейн	40-55	47,5	0,475
Конвертирование	3	Черновая медь	98,6-98,9	98,75	0,9875
Огневое рафиирование	4	Анодная медь	99,2-99,5	99,35	0,9935
Электролитическое рафиирование	5	Катодная медь	99,9-99,99	99,95	0,9995

стохастическая составляющая имеет вид:

$$I_n(h) = \frac{H_{n(\max)}}{(n+1)!} = \frac{k_n}{n+1} I_{n-1}(h). \quad (6)$$

Данному условию соответствуют выражения для количества собственных элементов (2), с учетом которого получим формулы для определения всех видов информации иерархической системы:

$$I_n(h) = \frac{k^n \log N}{(n+1)!}, \quad I_{\sum n}(h) = \log N \sum_{i=0}^n \frac{k^i}{(i+1)!} \quad (7)$$

$$I_n(d) = k^n \left[ 1 - \frac{1}{(n+1)!} \right] \log N, \\ I_{\sum n}(d) = \log N \sum_{i=0}^n k^i \left[ 1 - \frac{1}{(i+1)!} \right] \quad (8)$$

$$H_{n(\max)} = k^n \log N,$$

$$H_{\sum n(\max)} = \log N \sum_{i=0}^n k^i \quad (9)$$

$$d_n = \frac{I_n(d)}{H_{n(\max)}} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}, \quad d_{\sum n} = \frac{\sum_{i=0}^n k^i \left[ 1 - \frac{1}{(i+1)!} \right]}{\sum_{i=0}^n k^i} \quad (10)$$

где  $d_n$  - уровневая детерминация в системе;

$d_{\sum n}$  - системная детерминация.

Мы видим, что при переходе на более высокий структурный уровень вступает в действие закон или принцип прогрессивного увеличения разнообразия [4,5]. Так как распределение вероятностей по этим уровням не влияет на качество продукции, то при расчетах достаточно ограничиться только междууровневыми корреляциями.

Энтропийно-информационный анализ технологических схем переработки сырья на товарный продукт может производиться только после предварительной договоренности о том, что в каждом конкретном случае имеет для рассматриваемых металлургических процессов ценность.

В основу информационного анализа положено сопоставление структуры самоорганизующейся абстрактной иерархической системы по ее детерминированной, то есть информационной состав-

ляющей, с практической детерминацией технологических переделов по качеству промежуточного и конечного продуктов по мере перехода целевого компонента из сырья в товарный вид.

Проведем анализ качества технологических продуктов, а вместе с тем и технологических операций, приводящих к получению этих продуктов, по результатам технологических переделов медеплавильного производства на Жезказганском (ЖГМК) и Балхашском (БГМК) горнometаллургических комбинатах (табл. 1), сопоставляя их с формальным уровнем организации технологической системы. Так, содержание меди в руде составляет 0,5-1,2% (в среднем 0,85%), а в концентратах - 5,5-40% (в среднем 22,75%). Штейн электроплавки и плавки в жидкой ванне содержит 40-55% (в среднем 47,5%) меди.

Основной результат проведенной работы по научному, технологическому и техническому обоснованию процесса конвертирования в конечном итоге сводится к возможности повышения содержания меди в черновом металле. Этот показатель меняется в пределах 98,6-98,9% (в среднем 98,75%). В результате технологического процесса анодной плавки показатели по содержанию меди в анодах следующие: 99,2-99,5% (в среднем 99,35%). В процессе электролитического рафинирования показатели по содержанию меди в катодах составляют 99,9-99,99% (в среднем 99,95%).

В рассматриваемой нами технологической схеме  $k=2$  есть выборка из множества элементов – элемент и не элемент (в нашем случае медь и все остальные элементы в совокупности), тогда уравнение (9) примет вид:

$$H_{n(\max)} = 2^n \log N_0 = 2^n \log 2 = 2^n. \quad (11)$$

С учетом аддитивности энтропии и информации, выразим технологическую неопределенность различных операций в пределах единой технологической схемы системным показателем неопределенности:

$$H_{\sum n(\max)} = \sum_{i=0}^n H_i = \sum_{i=0}^n 2^i, \text{бит/эл.,} \quad (12)$$

для начальных 10 уровней (бит/эл):

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} n & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ H_{\sum n(\max)} & 1 & 3 & 7 & 15 & 31 & 63 & 127 & 255 & 511 & 1023 & 2047 \end{array}$$

Согласно закону сохранения, количество детерминированной информации рассчитывается как разность между максимальной возможной энтропией (неопределенностью) технологической системы  $H_{n(max)}$  и каким-то текущим значением энтропии  $H_n$ . Тогда из (8):

$$I_n(d) = 2^n \left[ 1 - \frac{1}{(n+1)!} \right] \text{бит/эл.}, \quad (13)$$

откуда для начальных 10 уровней:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$I_n(d)$	0	1	3,33	7,67	15,9	32	64	128	256	512	1024

Так как информационная емкость технологической системы определяется по ее стохастической части, то на основании (7):

$$I_n(h) = \frac{2^n}{(n+1)!} \text{бит/эл.}, \quad (14)$$

соответственно для начальных 10 уровней:

$n$	0	1	2	3	4	5
$I_n(h)$	1	1	0,6667	0,3333	0,1333	0,0444
$n$	6	7	8	9	10	
$I_n(h)$	0,0127	0,0032	0,0007	0,0001	0,0000	

Системная детерминированная составляющая информации  $I_{\sum n}(d)$  на основании формулы (8) равна:

$$I_{\sum n}(d) = \sum_{i=0}^n 2^i \left[ 1 - \frac{1}{(i+1)!} \right] \text{бит/эл.}, \quad (15)$$

$n$	0	1	2	3	4	5
$I_{\sum n}(d)$	0	1	4,33	12	27,9	59,8
$n$	6	7	8	9	10	
$I_{\sum n}(d)$	124	252	508	1020	2044	

Определив степени детерминации и неустранимой стохастичности на каждом уровне технологической системы по формулам:

Таблица 2 .Расчетные информационно-энтропийные характеристики технологических переделов в иерархической системе для случая  $k=2, N_0=2$

$n$	$I_n(d)$	$H_n(max)$	$d_n = \frac{I_n(d)}{H_n(max)}$	$I_{\sum n}(d)$	$H_{\sum n(max)}$	$d_{\sum} = \frac{I_{\sum n}(d)}{H_{\sum n(max)}}$
0	0	1,0	0	0	1,0	0
1	1,00	2,0	0,50	1,00	3,0	0,33
2	3,33	4,0	0,83	4,33	7,0	0,62
3	7,67	8,0	0,96	12,0	15,0	0,80
4	15,9	16,0	0,99	27,9	31,0	0,90
5	32,0	32,0	1,0	59,8	63,0	0,95
6	64,0	64,0	1,0	124,0	127,0	0,98
7	128,0	128,0	1,0	252,0	255,0	0,99
8	256,0	256,0	1,0	508,0	511,0	0,99
9	512,0	512,0	1,0	1020,0	1023,0	0,998
10	1024,0	1024,0	1,0	2044,0	2047,0	0,999

$$d_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!},$$

$$h_n = \frac{1}{(n+1)!}, \quad (16)$$

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$d_n$	0	0,5	0,8333	0,9583	0,9917	0,9986	0,9998	1	1	1
$h_n$	1	0,5	0,1667	0,0417	0,0083	0,0014	0,0002	0	0	0

Определив степени системной детерминации и системной неустранимой стохастичности технологической схемы по формулам:

$$d_{\sum n} = \frac{\sum_{i=0}^n 2^i \left[ 1 - \frac{1}{(i+1)!} \right]}{\sum_{i=0}^n 2^i},$$

$$h_{\sum n} = 1 - d_{\sum n}, \quad (17)$$

имеем их значения для 10 начальных уровней:

$n$	0	1	2	3	4	5
$d_{\sum n}$	0	0,3333	0,619	0,8	0,8989	0,9496
$h_{\sum n}$	1	0,6667	0,381	0,2	0,1011	0,0504
$n$	6	7	8	9	10	
$d_{\sum n}$	0,9749	0,9875	0,9937	0,9969	0,9984	
$h_{\sum n}$	0,0251	0,0125	0,0063	0,0031	0,0016	

Результаты расчета по новой модели (7)-(10) информационно-энтропийных характеристик технологических переделов в иерархической системе приведены в табл. 2.

Критерием адекватности для установления наиболее корректной зависимости расчетных данных по (3) и новой модели с практическими данными (табл. 1, в долях единицы) нами использованы коэффициент множественной регрессии  $R$  [6] и его значимость  $t_R$ :

$$R = \left[ 1 - \frac{(n-1) \sum_{i=1}^n (y_{gi} - y_{pi})^2}{(n-k-1) \sum_{i=1}^n (y_{gi} - y_{cp})^2} \right]^{1/2},$$

$$t_R = \frac{R\sqrt{n-k-1}}{1-R^2} > 2 \quad (18)$$

В сравнении практических данных с моделью по (3), то есть с наиболее обобщенными показателями детерминации уровней системы по соразмерности с ее стохастичностью ( $I_n(d)$ ), выявляется хотя и адекватная корреляция ( $R = 0,7664$ ,  $t_R = 3,715 > 2$ ) , но с большим отклонением от практических показателей. Заметно лучше они описываются зависимостью для уровневой детерминации  $d_n$  ( $R = 0,8614$ ,  $t_R = 6,6744 > 2$ ) , однако с систематическим завышением против  $d_{\text{практ}}$ .

Более предпочтительна зависимость для системной детерминации  $d_{\sum n}$  ( $R = 0,9479$ ,  $t_R = 7,384 > 2$ ) , которая к тому же проходит через практически найденные точки без систематических отклонений, и в отличие от  $d_n$  зависит от длины кода  $k$ .

Это соответствует наиболее детальному учету как уровневых, так и общесистемных особенностей детерминации, в первом приближении концентрировано выражаются в изменении содержания целевого элемента по мере технологической организации его извлечения.

Сопоставление расчетных данных по (3) и новой модели с практическими данными по техно-

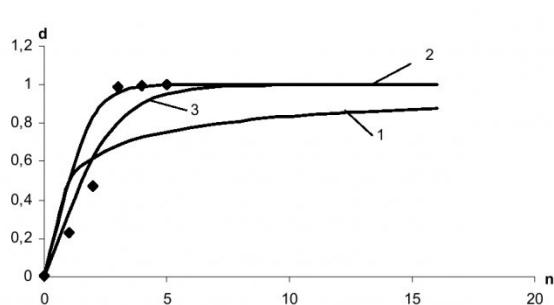


Рис. 1 . Связь степени детерминации с уровнем технологической организации производства меди в Казахстане: n – номер уровня, d – детерминация: 1 – гармонизированная по формуле 3, 2 – уровневая, 3 – системная, точки – практические данные

логии производства меди проиллюстрируем графически в координатах  $n$ ,  $d$ .

Влияние длины кода  $k$ , то есть учитываемых элементов системы (целевого компонента и основных примесей), как это следует из выражения для  $d_{\sum n}$  , может быть выявлено в дальнейших исследованиях. Это же относится к важнейшему практическому показателю детерминации – извлечению целевого элемента по переделам. В целом же повышение качества продукта по мере технологической его переработки уже в первом приближении коррелирует с динамикой роста детерминированной составляющей в абстрактной иерархической системе, чем обосновывается целесообразность дальнейшего энтропийно-информационного анализа подобных систем.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Шеннон К. Э. Математическая теория связи // Работы по теории информации и кибернетике. – М.: ИЛ, 1963. – С. 243-332.
- 2 Хартли Р. Передача информации // Теория информации и ее приложения. – М.: ИЛ, 1959. – С. 5-35.
- 3 Малышев В. П. Вероятностно-детерминированное отображение. – Алматы: Фылым, 1994. – 376 с.
- 4 Седов Е. А. Эволюция и информация. – М.: Наука, 1976. – 232 с.
- 5 Сороко Э. М. Структурная гармония систем. – Минск: Наука и техника, 1984. – 264 с.
- 6 Малышев В. П. К определению ошибки эксперимента, адекватности и доверительного интервала аппроксимирующих функций // Вестник МОН и НАН РК. – 2000. №4. – С.22-30.
- 7 Малышев В. П. Оценка доверительного интервала по коэффициенту нелинейной множественной корреляции и его значимости // Биологические и физико-механические методы и средства в современных научных исследованиях. Сборник тезисов докладов Республиканской научно-практической конференции. – Костанай, 1996. – С. 78-79.

□ Авторы статьи :

Кажикенова  
Саule Шарапатовна  
- канд.техн. наук, доцент каф. «Высшая  
математика» (Карагандинский государ-  
ственный технический университет)  
Email: [sauleshka555@mail.ru](mailto:sauleshka555@mail.ru)

Малышев  
Виталий Павлович  
- докт. техн. наук, проф. каф. «Выс-  
шая математика» (Карагандинский  
государственный технический уни-  
верситет)