

УДК 622.24.084.32

М.В. Милованов

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЗАТУХАЮЩИХ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ШТАНГИ СТАНКОВ ШАРОШЕЧНОГО БУРЕНИЯ

Продольные колебания буровой штанги, возникающие вследствие перекатывания шарошечного долота по забою скважины и разрушения горной породы, постепенно угасают по ее длине.

Затухающие продольные колебания буровой штанги постоянного поперечного сечения описываются гиперболическим уравнением [3]:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

где  $u(x, t)$  – перемещение точки буровой штанги с координатой  $x$  в момент  $t$ ;  $\lambda = \frac{\mu}{\rho A}$  - коэффициент затухания;  $\mu$  – постоянная демпфирования;  $\rho$  – плотность стали;  $A$  – площадь поперечного сечения трубы;  $a$  – скорость распространения продольной звуковой волны.

Общую осевую силу, возникающую вследствие перекатывания шарошечного долота по забою и разрушения горной породы, определим как

$$P(t) = P_{cm} + P_\partial(t).$$

Тогда уравнение (1) можно упростить, разделив полную величину перемещения каждого сечения  $u(x, t)$  на две составляющие - динамическую  $v(x, t)$ , возникающую от динамической осевой силы  $P_\partial(t)$ , и статическую  $\omega(x, t)$ , возникающую от статической осевой силы  $P_{cm}$  [1]:

$$u(x, t) = v(x, t) + \omega(x, t). \quad (2)$$

Тогда при исследовании динамической составляющей  $v(x, t)$  уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (3)$$

При изучении колебательного процесса штанги станков шарошечного бурения полагаем, что продольные и поперечные сечения буровой штанги остаются плоскими, а сама штанга моделируется длинным стержнем постоянного сечения.

Уравнение (3) решалось методом конечных разностей (МКР). Алгоритм МКР состоит из следующих этапов:

1. Построение сетки в заданной области. В МКР используется сетка, задаваемая конечным множеством узлов. В узлах сетки определяются значения  $\Phi_h$  искомой функции. Совокупность значений  $\Phi_h$  называют сеточной функцией.

2. Замена дифференциального оператора  $L_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$  в исходном уравнении разностным ана-

логом  $L_h$ , построенным по одной из разностных схем. При этом непрерывная функция  $\varphi$  аппроксимируется сеточной функцией  $\Phi_h$ .

3. Решение полученной системы алгебраических уравнений.

Шаг конечно-разностной сетки по оси  $x$  (по длине штанги) определяется по формуле:

$$\Delta x = L/n. \quad (4)$$

а шаг по оси  $y$  (по времени):

$$\Delta t = \Delta x/a. \quad (5)$$

При этом для лучшей сходимости должно выполняться условие:

$$\Delta x = a \cdot \Delta t. \quad (6)$$

На рис.1 представлена сеточная область  $\Omega \{ 0 \leq x \leq L; t \geq 0 \}$  в которой требуется найти решение волнового уравнения продольных колебаний буровой штанги (3).

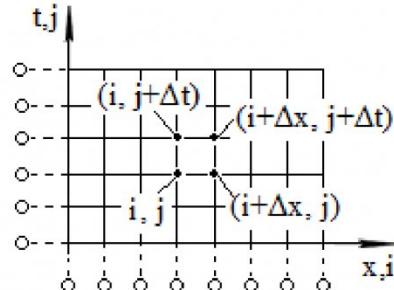


Рис.1. Схема сеточной области

Для решения дифференциального уравнения (3) используем конечно-разностную схему в виде четырехточечного шаблона (рис.1.), которому соответствуют следующие аппроксимации [2]:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0.5 \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\Delta x} + 0.5 \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i,j+1}}{\Delta x}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0.5 \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta t} + 0.5 \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j}}{\Delta t}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2v_{i,j} - 5v_{i,j+1} + 4v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j}}{\Delta x^2}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{2v_{i,j} - 5v_{i,j+1} + 4v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j}}{\Delta t^2}. \quad (10)$$

При определении начальных условий ось координат  $x$  направим вверх от шарошечного долота, тогда начальные и граничные условия для уравнения (3) можно записать в виде:

$$v(x, t)|_{t=0} = 0, \quad -EF \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = P_\partial(t),$$

$$\left. \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad -EF \left. \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right|_{x=L} = P_{\partial}^{6yx}(t) \quad (11)$$

где  $E$  – модуль Юнга;  $F$  – площадь поперечного сечения буровой штанги;  $L$  – длина штанги.

Подставив (7-10) в (3), получим :

$$\begin{aligned} & \frac{5v_{(i,j+1)} - 2v_{(i,j)} + 4v_{(i+1,j+1)} - v_{(i+1,j)}}{\Delta t^2} + \\ & + 0.5 \cdot \lambda \left( \frac{v_{(i,j+1)} - v_{(i,j)} + v_{(i+1,j+1)} - v_{(i+1,j)}}{\Delta t} \right) - \\ & - a^2 \frac{v_{(i+1,j)} - 2v_{(i,j)} + 4v_{(i+1,j+1)} - 5v_{(i,j+1)}}{\Delta x^2} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Обозначив

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{5}{\Delta t^2} + \frac{0.5\lambda}{\Delta t} + \frac{5a^2}{\Delta x} \right); \quad B = \left( \frac{2}{\Delta t^2} + \frac{0.5\lambda}{\Delta t} - \frac{2a^2}{\Delta x} \right); \\ C &= \left( \frac{4}{\Delta t^2} + \frac{0.5\lambda}{\Delta t} - \frac{4a^2}{\Delta x^2} \right); \quad D = \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{0.5\lambda}{\Delta t} - \frac{4a^2}{\Delta x^2} \right) \end{aligned}$$

после преобразований получим:

$$v_{(i+1,j+1)} = \frac{Bv_{(i,j)} + Dv_{(i+1,j)} - Av_{(i,j+1)}}{C}. \quad (13)$$

Для определения перемещений точек границы области определения уравнения, необходимо знать перемещения на соседних слоях сетки. Для этого введем дополнительные ряды контурных точек сетки  $i=-1$  и  $j=-1$ . Тогда (13) при  $i=-1$ :

$$v_{(0,j+1)} = \frac{Bv_{(-1,j)} + Dv_{(0,j)} - Av_{(-1,j+1)}}{C}. \quad (14)$$

Значения перемещений  $v_{(-1,j)}$  и  $v_{(-1,j+1)}$  для  $i=-1$  можно получить из аппроксимации условия (11):

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v_{(i+1,j)} - v_{(i,j)}}{\Delta x} = -\frac{P_{\partial}(j)}{EF}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v_{(i+1,j+1)} - v_{(i,j+1)}}{\Delta x} = -\frac{P_{\partial}(j+1)}{EF}, \quad (16)$$

откуда для фиктивного ряда  $x = -\Delta x$ :

$$v_{(-1,j)} = v_{(0,j)} - \frac{\Delta x \cdot P_{\partial}(j)}{E \cdot F}, \quad (17)$$

$$v_{(-1,j+1)} = v_{(0,j+1)} - \frac{\Delta x \cdot P_{\partial}(j+1)}{E \cdot F}. \quad (18)$$

После преобразований получим:

$$\begin{aligned} v_{(i,j+1)} &= \{v_{(i+1,j)}(B+D) - \\ &- \frac{\Delta x}{EF} [B \cdot P_{\partial}(j) + C \cdot P_{\partial}(j+1)]\} / (A+C) \end{aligned} \quad (19)$$

Перемещения для ряда  $i=-1$ :

$$\begin{aligned} v_{(-1,j+1)} &= \{v_{(0,j)}(B+D) - \frac{\Delta x}{EF} \times \\ &\times [B \cdot P_{\partial}(j) + C \cdot P_{\partial}(j+1)]\} / (A+C) \end{aligned} \quad (20)$$

Запишем уравнение (20) для ряда  $j=0$ :

$$\begin{aligned} v_{(-1,1)} &= \{v_{(0,0)} \cdot (B+D) - \\ &- \frac{\Delta x}{EF} \cdot [B \cdot P_{\partial}(0) + C \cdot P_{\partial}(1)]\} / (A+C). \end{aligned} \quad (21)$$

Аппроксимируя (11), получим:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} &= 0; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{v_{(i,0)} - v_{(i,-1)}}{\Delta t} = 0; \\ v_{(i,-1)} &= v_{(i,0)}. \end{aligned}$$

Из условия  $v_{t=0}=0$   $v_{(i,0)}=0$  для  $i=0, 1, \dots, n$ .

Таким образом,  $v_{(0,0)}=0$ ,  $P_{\partial}(0)=0$  и формула (21) примет вид:

$$v_{(-1,1)} = \frac{-\Delta x \cdot C \cdot P_{\partial}(1)}{(A+C)}. \quad (22)$$

Запишем выражение (14) и (17) для ряда  $j=0$ :

$$v_{(0,1)} = \frac{Bv_{(-1,0)} + Dv_{(0,0)} - Av_{(-1,1)}}{C}, \quad (23)$$

$$v_{(-1,0)} = v_{(0,0)} - \frac{\Delta x \cdot P_{\partial}(0)}{E \cdot F}. \quad (24)$$

Так как  $P_{\partial}(0)=0$ , выражение (23) примет вид:

$$v_{(0,1)} = \frac{-A \cdot v_{(-1,1)}}{C}. \quad (25)$$

Подставив (22) в (25), получим:

$$v_{(0,1)} = \frac{\Delta x \cdot A \cdot P_{\partial}(1)}{(A+C)}. \quad (26)$$

Выведенные формулы позволяют определять значение перемещений любой точки  $x$  буровой штанги в момент  $t$  и получить функцию  $v(x,t)$ . Через  $v(x,t)$  определяем осевую динамическую составляющую на верхнем конце буровой штанги:

$$-EF \left. \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right|_{x=L} = P_{\partial}^{6yx}(t). \quad (27)$$

Общую силу на верхнем конце буровой штанги определяем по формуле

$$P(t) = P_{cm} + P_{\partial}^{6yx}(t). \quad (28)$$

Алгоритм описанного численного решения дифференциального уравнения продольных затухающих колебаний буровой штанги при случайном процессе нагружения представлен на рис.2,

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Касумов А.К. Продольные колебания бурового инструмента с затуханием и возмущением. – «Учетные записки Азербайджанского государственного университета», №5, с. 59 – 66, 1964.

2. Трудношин В.А. Математические модели технических объектов/ Н.В. Пивоварова – М.:»Высшая школа», 1986. – 158 с.

3. Эйгелес Р.М. Расчет и оптимизация процессов бурения скважин/Р.В. Стрекалова – М.: «Недра», 1977. – 196 с.

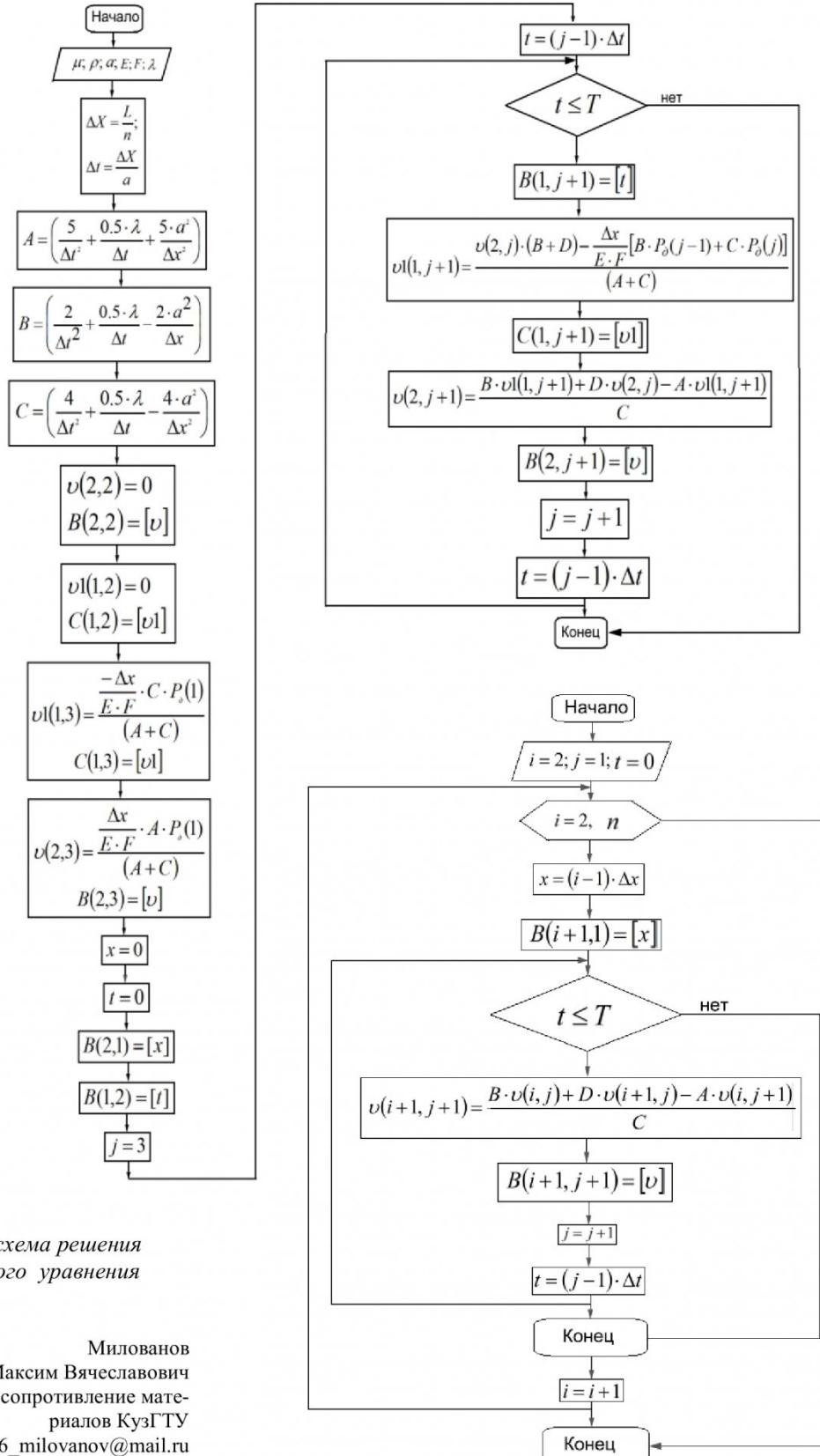


Рис.2. Блок – схема решения гиперболического уравнения

Автор статьи:

Милованов  
Максим Вячеславович  
ассистент каф. сопротивление мате-  
риалов КузГТУ  
Email: 86\_milovanov@mail.ru