

УДК 622.281.74.001.2

М. Д. Войтов, Ю. А. Фадеев, Т. Е. Трипус

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В КОМПОЗИЦИОННЫХ ТРУБЧАТЫХ АНКЕРАХ

Задача по определению распределения напряжений в однородных трубах в литературе рассматривалась многократно с привлечением теории устойчивости упругих систем [1]. Рассмотрение задач данной тематики вызвано многообразным практическим применением трубчатых конструкций, которые находятся под внешним или внутренним динамическим воздействием [2,3].

Особый интерес вызывают многослойные трубчатые конструкции, которые по своим механическим свойствам не уступают монолитным и потому находят большое применение в различных отраслях промышленности [4,5]. Применение различных композиционных материалов в качестве оболочки позволяет улучшать динамические характеристики таких конструкций в целом.

Решению одной из частных задач в изучении распределения радиальных напряжений в многослойных трубчатых анкерах посвящена данная работа.

Для решения поставленной задачи будем исходить из расчетов, проводимых на модели в виде однородной трубы с постоянным сечением без днищ.

Такая модель представляет собой открытый нагруженный цилиндр.

Предполагаем, что в среде на цилиндрическую трубку по всей её длине будет действовать постоянное по величине давление. В этом случае деформации напряжения для всех участков поперечных сечений будут одинаковые. Для предло-

женной модели выполняется гипотеза плоских сечений, согласно которой поперечные сечения цилиндра до и после нагружения остаются плоскими. В этом случае, достаточно рассмотреть лишь небольшой участок цилиндра с поперечным сечением в виде кольца, с внешним (наружным) r_n и внутренним радиусом r_b , соответственно. Величины ширины кольца для упрощения расчетов принимаем за единицу.

Допустим, что кольцо может быть подвержено переменному внешнему и внутреннему давлению. Обозначим амплитудные значения соответствующих давлений за $p_{\text{нар}}$ и $p_{\text{вн}}$.

Дальнейшее изложение расчета проводится по аналогичной схеме, изложенной в [6].

Выделим бесконечно малый элемент кольца $abcd$ на расстоянии ρ от его оси (рис. 1). Цилиндрические поверхности по линии bc и da будут располагаться от центра на расстояниях $\rho + d\rho$ и ρ , соответственно.

Нормальные напряжения, возникающие при деформации кольца по граням ab и cd равны по величине и имеют противоположные направления.

Проекции сил действующих по меридиану в направлении к оси симметрии определяются выражением

$$-p_x d\rho d\varphi \quad (1)$$

Знак «» говорит о том, что проекции сил направлены к центру.

На грань ad и bc будут действовать соответст-

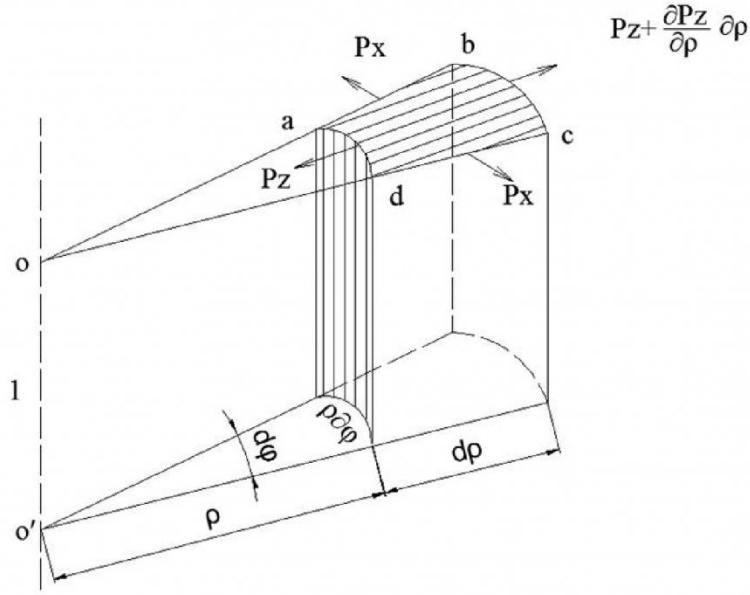


Рис. 1. Элемент внешней оболочки анкера

вующие силы

$$\begin{aligned} & -p_z \rho d\varphi l \\ & -p_z + \frac{\partial p_z}{\partial \rho} d\rho (\rho + d\rho) d\varphi l = \\ & = p_z \rho d\varphi l + p_z d\rho d\varphi l + \\ & + \frac{\partial p_z}{\partial \rho} (d\rho^2) d\varphi l + \frac{\partial p_z}{\partial \rho} d\rho \rho d\varphi l \approx \\ & p_z \rho d\varphi l + p_z \rho d\varphi l + \frac{\partial p_z}{\partial \rho} d\rho \rho d\varphi l \end{aligned} \quad (2)$$

Так как проекция $\rho d\varphi$ на направление z равна нулю, получаем

$$p_z d\rho d\varphi l + \frac{\partial p_z}{\partial \rho} \rho d\rho d\varphi l \quad (3)$$

Отсюда следует уравнение равновесия

$$\begin{aligned} & p_z d\rho d\varphi l + \frac{\partial p_z}{\partial \rho} \rho d\rho d\varphi l - p_x d\rho d\varphi l = \\ & = d\rho d\varphi \left(p_z + \frac{\partial p_z}{\partial \rho} \rho - p_x \right) = 0, \end{aligned}$$

т.к.

$$d\rho d\varphi \neq 0, \quad (4)$$

получаем

$$\left(p_z + \frac{\partial p_z}{\partial \rho} \rho - p_x \right) = 0 \quad (5)$$

В случае деформации кольца радиальное смещение точки, расположенной на расстоянии от оси кольца выражается соотношением $\rho + d\rho$.

При бесконечно малом смещении по направлению радиуса получаем приращение $\frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho$.

Относительное радиальное удлинение по направлению от центра выражается равенством

$$e_z = \frac{\partial u}{\partial \rho}.$$

Поскольку длина окружности возрастает пропорционально ее радиусу, то относительное удлинение окружности будет выражаться формулой

$$e_x = \frac{2\pi(\rho+u)-2\pi\rho}{2\pi\rho} = \frac{u}{\rho}. \quad (6)$$

Относительное удлинение по соответствующим осям будет задаваться последующими уравнениями

$$e_z = \frac{p_z}{E} - \sigma \frac{p_x}{E} \text{ и } e_x = \frac{p_x}{E} - \sigma \frac{p_z}{E}, \quad (7)$$

где σ – коэффициент поперечного сжатия, E – модуль упругости.

Выразим напряжения p_x и p_z

$$p_x = \frac{E}{1-\sigma^2} (e_x + \sigma e_z) = \frac{E}{1-\sigma^2} \left(\frac{u}{\rho} + \sigma \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \quad (8)$$

$$p_z = \frac{E}{1-\sigma^2} (e_z + \sigma e_x) = \frac{E}{1-\sigma^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \sigma \frac{u}{\rho} \right) \quad (9)$$

Подставляя уравнения (9) и (8) в уравнение равновесия (5) получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{u}{\rho} = 0 \quad (10)$$

Из (10) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} = const. \quad (11)$$

Напряжения p_x для всех точек растягивающие и поэтому имеют положительное значение.

При действии на цилиндр только наружного или внутреннего давления знаки эпюр во всех точках цилиндра одинаковы.

Эпюры изменения радиального и окружного напряжения для случая действия только наружного давления показаны на рис.2.

Эти напряжения во всех точках цилиндра отрицательны, что соответствует сжатию

При нагружении внутренним давлением эпюры изменения радиального и окружного напряжений показаны на рис.3.

Окружное напряжение в этом случае является расширяющим, а радиальное сжимающим.

Принимая

$$u = A\rho + \frac{B}{\rho}, \quad A \text{ и } B \text{ постоянные,} \quad (12)$$

получаем

$$\frac{u}{\rho} = A + \frac{B}{\rho^2} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial \rho} = A - \frac{B}{\rho^2}. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (8) и (9), получаем

$$p_x = \frac{E}{1-\sigma^2} \left[A + \frac{B}{\rho^2} + \sigma \left(A - \frac{B}{\rho^2} \right) \right] = \frac{E}{1-\sigma^2} \left[A(1+\sigma) + \frac{B}{\rho^2}(1-\sigma) \right], \quad (14)$$

$$p_z = \frac{E}{1-\sigma^2} \left[A(1+\sigma) + \frac{B}{\rho^2}(1-\sigma) \right] \quad (15)$$

Рассмотрим частные случаи, когда $\rho = b$ и напряжение p_z соответствует наружному давлению $-p_{\text{нар}}$

$$A(1+\sigma) - \frac{B}{b^2}(1-\sigma) = -p_{\text{нар}} \cdot \frac{1-\sigma^2}{E} \quad (16)$$

Внутренне напряжение соответственно определяется уравнением при $\rho = a$

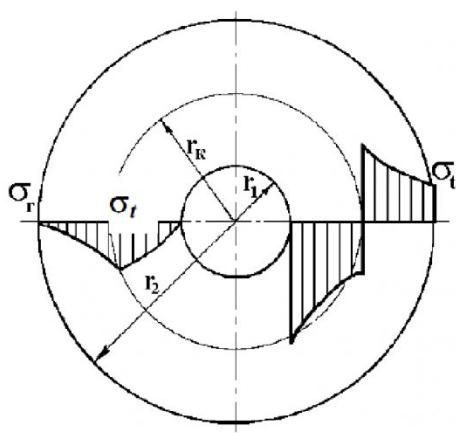


Рис. 2. Эпюры изменения радиального и окружного напряжения для случая действия наружного давления

$$A(1+\sigma) - \frac{B}{a^2}(1-\sigma) = -p_{\text{вн.}} \frac{1-\sigma^2}{E} \quad (17)$$

Используя выражения (16) и (17), находим значения постоянных A и B .

$$A = \frac{(1+\sigma)}{E} \left(\frac{a^2 p_{\text{вн.}} - b^2 p_{\text{нап.}}}{b^2 - a^2} \right), \quad (18)$$

$$B = \frac{(1+\sigma)}{E} \left(\frac{p_{\text{вн.}} - p_{\text{нап.}}}{b^2 - a^2} \right) a^2 b^2, \quad (19)$$

Подставляя (18) и (19) в (14) и (15), получаем

$$p_x = \frac{a^2 p_{\text{вн.}} - b^2 p_{\text{нап.}}}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 (p_{\text{вн.}} - p_{\text{нап.}}) a^2 b^2}{\rho^2 (b^2 - a^2)} \quad (20)$$

$$p_z = \frac{a^2 p_{\text{вн.}} - b^2 p_{\text{нап.}}}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 (p_{\text{вн.}} - p_{\text{нап.}}) a^2 b^2}{\rho^2 (b^2 - a^2)} \quad (21)$$

Величина перемещения будет определяться по формуле

$$u = A\rho + \frac{B}{\rho} = \frac{1-\sigma}{E} \left(\frac{a^2 p_{\text{вн.}} - b^2 p_{\text{нап.}}}{b^2 - a^2} \right) \rho + \frac{1+\sigma}{E} \frac{a^2 (p_{\text{вн.}} - p_{\text{нап.}}) a^2 b^2}{\rho (b^2 - a^2)} \quad (22)$$

Если наружное давление отсутствует и, принимая во внимание, что $\rho = a$, выражение (22) преобразуется к виду

$$\delta_1 = \frac{p_{\text{вн.}} a}{E} \left[\frac{(1-\sigma)a\rho^2 + (1+\sigma)ab^2}{(b^2 - a^2)\rho} \right] = \frac{p_{\text{вн.}} a}{E} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \sigma \right) \quad (23)$$

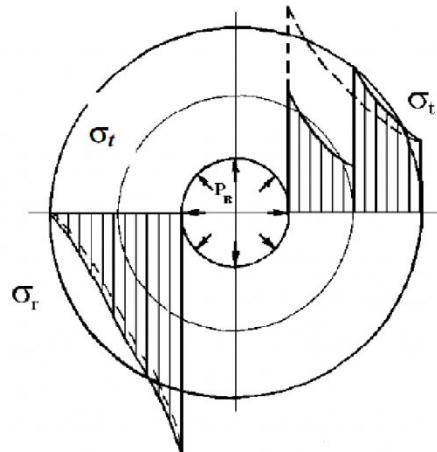


Рис. 3. Эпюры изменения радиального и окружного напряжения для случая действия внутреннего давления

где δ_1 – увеличение внутреннего радиуса.

Это уравнение равносильно напряженному состоянию всей оболочки.

В случае действия только внешнего давления напряжения будут определяться формулам

$$p_x = -\frac{b^2 p_{\text{нап.}}}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{\rho^2} \right) \quad (24)$$

и

$$p_z = -\frac{b^2 p_{\text{нап.}}}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) \quad (25)$$

С увеличением наружного давления происходит уменьшение радиуса на величину

$$\delta_2 = \frac{p_{\text{вн.}} b}{E} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \sigma \right) \quad (26)$$

Рассмотрим трубчатую конструкцию, состоящую из двух соосных трубок с плотно прилегающими поверхностями (рис. 4).

Внешнее давление $p_{\text{нап.}}$ вызовет сокращение наружного радиуса.

Внутреннее давление $p_{\text{вн.}}$, напротив, вызовет увеличение радиуса внутренней цилиндрической оболочки.

Разность между радиусами при давлении p определяется соотношением:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{p_{\text{вн.}} a}{E} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \sigma \right) + \frac{p_{\text{вн.}} b}{E} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \sigma \right) = \frac{pb}{E} \frac{2b^2(c^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \quad (27)$$

Из (27) находим

$$p = \frac{E\delta}{b} \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}{2b^2(c^2 - a^2)} \quad (28)$$

Применяя выражение (28), где $a = 0,01$ м, $b =$

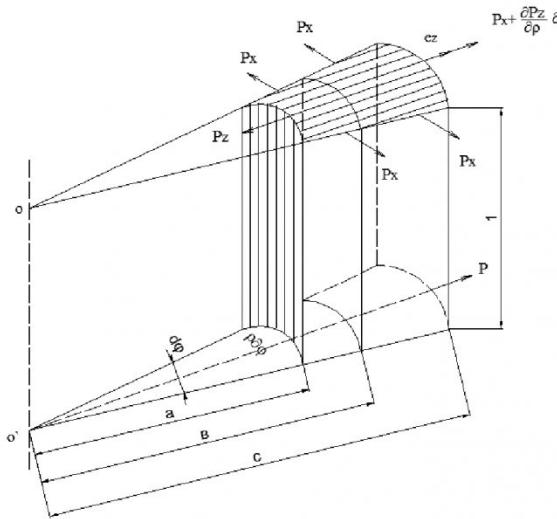


Рис. 4

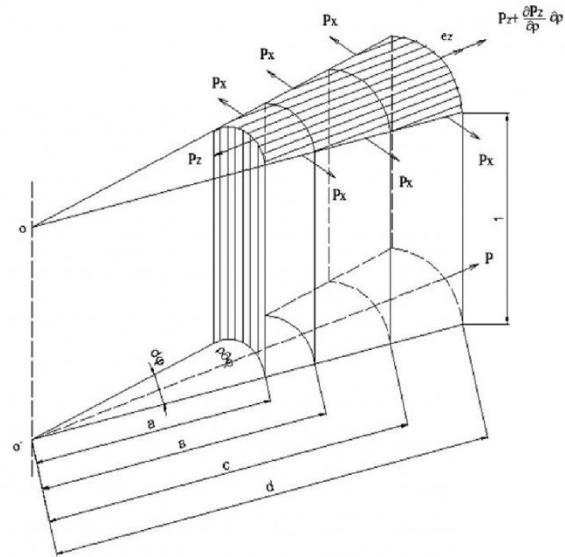


Рис. 5

$0,02 \text{ м}$, $c = 0,03 \text{ м}$, $p_{\text{вн}} = 20 \text{ кПа}$, модуль упругости материала (сталь)цилиндров $E = 2 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2$, $\delta = 0,01 \text{ м}$, получаем $p = 0,23 \text{ кПа}$.

Установившееся давление p будет определяться как упругостью материала, так и его геометрическими параметрами.

Если конструкцию дополнить эластомерной тонкой оболочкой между металлическими трубками, у которой модуль упругости на четыре порядка меньше, чем у металлов (рис. 5), то в целом вид эпюры, представленной на рис. 3 не изменится. В этом случае при увеличении внешнего дав-

ления, внутренняя оболочка будет защищена от разрушения.

Согласно [1], при уменьшении напряжений в точках на внутренней поверхности между цилиндрами происходит повышение прочности цилиндров и потому достаточно провести замену сплошного цилиндра на многослойный.

Исходя из изложенного, можно заключить, что многослойные трубчатые системы позволяют экономить материал без ухудшения её прочностных характеристик.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко, С. П. Сопротивление материалов: в 2 т. – Москва: Наука, 1965.
2. Пат. 124310 РФ, Е 21 D 21/00. Трубчатый анкер фрикционного типа / Войтов М. Д., Копытов А. И., Трипус Т. Е. – № 2012117494/03; Заявл. 26.04.2012; Опублик. 20.01.2013; Бюл. № 2.
3. Пат. 133199 РФ, Е 21 D 21/00. Анкер / Войтов М. Д., Копытов А. И., Трипус Т. Е. – № 2013118036/03; Заявл. 18.04.2013; Опублик. 10.10.2013; Бюл. № 28.
4. Буялич, К. Г. Оценка параметров герметичности гидростоеек механизированных крепей. – автореф. диссертации на соискание уч. степени к.т.н. – Кемерово, 2012. – 19 с.
5. Ткачев, В. А. Исследование напряженно-деформированного состояния трубчатого анкера фрикционного типа в массиве пород / В. А. Ткачев, А. Ю. Прокопов, В. Е. Толкачев // Горный информационно-аналитический бюллетень № 2 (научно-технический журнал) – Москва: Горная книга, 2010. – 35 с.
6. Першин, В.Ф. Тонкостенные оболочки вращения, толстостенные и составные цилиндры: Метод.указ. / Сост.: В.Ф. Першин, Ю.Т. Селиванов. Изд. Тамб. гос. техн. ун-та. – Тамбов, 2001. – 20 с.

Авторы статьи:

Войтов
Михаил Данилович,
канд. техн. наук, проф.
каф. строительства подземных
сооружений и шахт КузГТУ
Тел. 8-3842-396378

Фадеев
Юрий Александрович,
докт. физ. мат. наук,
проф. каф. математики
КузГТУ
Тел. 8-3842-396318

Трипус
Татьяна Евгеньевна,
ассистент каф. строительства
подземных сооружений и шахт
КузГТУ.
Тел. 8-3842-396378