ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

А.С. Сорокин

К ВАРИАЦИОННОМУ МЕТОДУ ДЛЯ КОНЕЧНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Особенность вариационного метода в теории функций комплексного переменного, предложенного в 1943 году М.Шиффером [1] для многосвязных областей, состоит в необходимости использования конкретного аналитического задания для этих областей функций Грина. Нахождение таких функций составляет весьма трудную самостоятельную задачу. В 1946 – 1952 гг. Г.М.Голузин [2] предложил новое обоснование вариационного метода для однолистных функций в односвязных областях и в этом случае более детально его разработал. На основе своей работы [3], выполненной ещё в 1941 году, П.П.Куфарев [4] в 1954 году дал оригинальное доказательство теоремы Г.М. Голузина и получил основную вариационную формулу в иной, интегральной форме. Развивая идеи этой же работы, П.П.Куфарев и Н.В. Генина (Семухина) [5] распространили в этой новой форме вариационную теорему Г.М.Голузина на семейства однолистных функций в двусвязных областях. Важные результаты получены в этом же направлении на основании иных соображений С.А. Гельфером [6].

В [7] приведены теоремы, дающие возможность эффективно распространить вариационный метод Г.М.Голузина –П.П.Куфарева на области произвольной конечной связности. В качестве основной области рассматривается $(n+1)$ - связная область, полученная исключением из круга радиуса R_0 замкнутых попарно непересекающихся кругов с центрами в точках a_k и радиусами R_k, $k=1,2,..,n$, Обозначим эту область через K, а её граничные компоненты - $C(R_k)\colon |\zeta - a_k| = R_k$.

Прежде чем сформулировать вариационную теорему обратимся к весьма важной вспомогательной теореме, играющей существенную роль в доказательстве основной теоремы. В этой вспомогательной теореме приводится формула, обобщающая формулу Шварца для конечносвязной области. Результаты, ранее полученные в этом направлении Г.Мешковским [8], В.А. Зморовичем [9] получают дальнейшее развитие и усиление. Приведём формулировку теоремы, содержащую обобщение формулы Шварца [10-13]:

Теорема 1. Пусть $f(z)$ регулярная и однозначная внутри области K функция, вещественная часть которой на граничных компонентах $C(R_k)$ принимает значения $f_k(\zeta)$. Тогда имеет место формула

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\delta_k}{2\pi i} \int_{C(R_k)} f_k(\zeta) H_k(\zeta, z) \frac{d\zeta}{\zeta} -$$

$$-\frac{1}{4\pi i} \int_{C(R_0)} f_0(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{4\pi i} \int_{C(R_n)} f_n(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + iD$$

где D - вещественное число, $\delta_0 = 1$, $\delta_k = -1,\ k = 1,2,...,n.$

Далее, пусть

$$H_k(\zeta, z) = \frac{\zeta + z}{\zeta - z} +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\sum_{\substack{k_1 \\ k_1 \neq k}}^{k_{2\nu}} P(\zeta, z; k_1, ..., k_{2\nu}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{k_1 \\ k_1 \neq k}}^{k_{2\nu-1}} P(\zeta, z; k, k_1, ..., k_{2\nu-1}) \right],$$

при этом

$$P(\zeta, z; k_1, ..., k_{2\nu}) = \left[\frac{A_{k_{2\nu}} z}{\tau_\nu(0)} + \frac{A_{n-k_{2\nu}}}{t_{2\nu}}\right] \frac{\zeta}{\tau_\nu(z)} \prod_{p=1}^{2\nu} R_{k_p}^2 .$$

Кроме того,

$$\tau_\nu(z) = R_{k_{2\nu}}^2 t_{2\nu-1} - (z - a_{k_{2\nu}}) t_{2\nu},$$

причем

$$\sum_{\substack{k_1 \\ k_1 \neq k}}^{k_{2\nu}} = \sum_{\substack{k_1=0 \\ k_1 \neq k}}^{n} \sum_{\substack{k_2=0 \\ k_2 \neq k_1}}^{n} \cdots \sum_{\substack{k_{2\nu}=0 \\ k_{2\nu} \neq k_{2\nu-1}}}^{n},$$

а также

$$A_k = 1 + \frac{1}{2}(\delta_k - \delta_{n-k}).$$

Функции t_p определяются соотношениями

$$t_p = -b_{p-1} t_{p-1} + R_{k_{p-1}}^2 t_{p-2},$$

$$t_0 = 1,\ t_1 = \zeta - a_{k_1},$$

причем $b_p = a_{k_{p+1}} - a_{k_p}$, если p - чётное, и $b_p = \overline{a}_{k_{p+1}} - \overline{a}_{k_p}$, если p нечётное. Функции $f_k(\zeta)$ удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(R_m)} f_m(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-a_m}=$$

$$=\sum_{\substack{k=0\\k\neq m}}^{n}\frac{\delta_k}{2\pi i}\int\limits_{C(R_k)} f_k(\zeta)S_k(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta},$$

$$m=1,\dots,n,$$

где

$$S_k(\zeta)=T_k\left(\zeta,\overline{L}_m(\infty)\right)+\frac{\delta_k-1}{2}T_k(\zeta,\infty),$$

причем

$$T_k(\zeta,z)=\frac{1}{2}H_k(\zeta,z)-\frac{\zeta L_k'(\zeta)}{2L_k(\zeta)}H_k\left(L_k(\zeta),\overline{z}\right).$$

Кроме того,

$$L_k(\zeta)=\overline{a}_k+\frac{R_k^2}{\zeta-a_k}.$$

Отметим, что киевский математик Л.Е.Дундученко [14], продолжая работы В.А.Зморовича [15] , получил вполне аналогичную теорему для плоскости с исключенными кругами.

Теперь приведём формулировку основной вариационной теоремы.

Теорема 2. Пусть функция $f(z)$ голоморфна и однолистна в области K и функция $f_k(z,t)=f(z)+tq_k(z)+o(t)$ голоморфна и однолистна при каждом $t\in[0,T]$ в кольце $R_k<|z-a_k|\le R_k+\varepsilon_k$, при малых $\varepsilon_k>0$, $k=1,2,..,n$ отображает его на область с граничными континуумами $C_{R_k}(t)$ и $C_k(t)$. Далее, пусть $f_0(z,t)=f(z)+tq_k(z)+o(t)$ при каждом $t\in[0,T]$ голоморфна и однолистна в кольце $R_0-\varepsilon_0\le|z|<R_0$, $\varepsilon_0>0$, и отображает это кольцо на область с граничными континуумами $C_0(t)$ и $C_{R_0}(t)$. Будем считать, что каждый $C_{R_k}(t)$ лежит внутри $C_k(t)$, $k=1,2,..,n$, $C_{R_0}(t)$ - вне $C_0(t)$, ни одна из кривых $C_k(t)$, $k=1,2,..,n$, не лежит внутри другой, а вместе с тем все они лежат внутри $C_0(t)$. Пусть функции $R_k(t)$, $k=0,1,\dots,n$, дифференцируемы в точке $t=0$, $R_k(0)=R_k$. Тогда функция $\Phi(z,t)$, конформно и однолистно отображающая область $K(t)$ на $(n+1)-$связную область $B(w,t)$, граница которой состоит из континуумов $C_k(t)$, $k=1,2,..,n$, представима внутри $K(t)$ в виде

$$\Phi(z,t)=f(z)+t\,f'(z)P(z)+o(t),$$

где

$$P(z)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\delta_k}{2\pi i}\lim_{\rho_k\to R_k}\int\limits_{C(\rho_k)}\operatorname{Re}B_k(\zeta)H_k(\zeta,z)\frac{d\zeta}{\zeta}-$$

$$-\frac{d}{dt}\ln\sqrt{R_0(0)R_n(0)}-$$

$$-\frac{1}{4\pi i}\lim_{\rho_0\to R_0}\int\limits_{C(\rho_0)}\operatorname{Re}B_0(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}-$$

$$-\frac{1}{4\pi i}\lim_{\rho_n\to R_n}\int\limits_{C(\rho_n)}\operatorname{Re}B_n(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}+iD,$$

причем

$$B_k(\zeta)=\frac{q_k(\zeta)}{\zeta\,f'(\zeta)}.$$

Если в этой теореме положить n=1, то получаем теорему П.П.Куфарева и Н.В.Гениной (Семухиной) [5].

Если затем устремить R_1 к нулю, то получаем теорему П.П.Куфарева [3].

Эта теорема позволяет нам развить исследования в трёх направлениях.

Прежде всего, получено обобщенное уравнение Лёвнера для семейств однолистных конформных отображений в конечносвязных областях. Однако в случае уже двусвязных областей такое уравнение громоздко и эффективного применения пока не имеет.

Затем, из вариационной теоремы выводится формула для приближённого отображения многосвязной области на близкую к ней область. Такие результаты для односвязных областей хорошо известны, они получены М.А.Лаврентьевым [16] и составляют основу вариационно-геометрического метода. Для двусвязных областей соответствующие результаты также известны, они получены И.А.Александровым [17] и Г.В.Сирыком [18,19].

Приведём обобщение на $(n+1)$ - связные области вариационной формулы М.А. Лаврентьева.

Теорема 3. Пусть $(n+1)$ - связная область B имеет граничные компоненты C_k :

$$w_k(\vartheta)=a_k+R_k\left[1+\sigma_k(\vartheta)\right]\ell^{i\vartheta},$$

$0\le\vartheta\le2\pi$, $Jm\,\sigma_k(\vartheta)=0$, $k=0,1,..,n$. Будем считать, что $|\sigma_k(\vartheta)|<\varepsilon$, где малое $\varepsilon>0$, и C_k звездообразна относительно a_k . Пусть $\Phi(z)$ конформно и однолистно отображает область K на область B . Тогда с точностью до малых порядка $o(\varepsilon)$ внутри K

$$\Phi(z)\approx z\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{\delta_k}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sigma_k(\vartheta)\frac{H_k\left(a_k+R_k\ell^{i\vartheta},z\right)}{1+a_kR_k^{-1}\ell^{-i\vartheta}}d\vartheta+\right.$$

$$+1-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)d\vartheta-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\sigma_n(\vartheta)d\vartheta-\frac{d}{dt}\ln\sqrt{R_0(0)R_n(0)}\Big\}$$

При этом

$$\frac{d}{dt}\ln\frac{R_0(0)}{R_m(0)}=$$

$$=\sum_{\substack{k=0\\k\neq m}}^{n}\frac{\delta_k}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sigma_k(\vartheta)\frac{R_k\ell^{i\vartheta}S_k\left(a_k+R_k\ell^{i\vartheta}\right)}{a_k+R_k\ell^{i\vartheta}}d\vartheta-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sigma_m(\vartheta)d\vartheta,\ m=1,\dots,n.$$

Третьим направлением применения вариационной является обоснование метода внутренних вариаций для конечносвязных областей. Этот метод позволяет для каждой функции заданного класса построить в определённом смысле близкую функцию этого же класса. Эта вариационная формула в свою очередь позволяет свести задачу о нахождении экстремума функционала, заданного на классе функций к изучению подкласса функций, удовлетворяющих определенному, впрочем весьма трудному дифференциально – функциональному уравнению. Все же в ряде случаев это уравнение удаётся решить и получить вид экстремальных функций и вместе с тем в наиболее благоприятных условиях найти множество значений функционала. Для иллюстрации наших результатов, развивающих метод внутренних вариаций и полученных по указанной схеме, укажем всего лишь на один круг экстремальных проблем.

Обозначим через $S(a_k,R_k;a,b)$- множество функций $f(z)$ голоморфных и однолистных в области K и отображающих эту область на $(n+1)-$связную область так, что $f(a)=b$, $a\in K$, $b-$ данное комплексное число. Этот класс не пуст. Но он не является компактным в себе, так как вместе с функцией $f(z)$ ему принадлежит функция $A[f(z)-b]+b$, где $A-$произвольное комплексное число. Образуем подкласс $S(a_k,R_k;a,b,c)$,составленный из функций $f(z)$ класса $S(a_k,R_k;a,b)$, для которых $f'(a)=c$, где $c-$ комплексное число. Этот подкласс является компактным в себе.

На классе функций $S(a_k,R_k;a,b,c)$ определим область значений функционала $I(f)=\ln\frac{f(z_1)}{f(z_2)}$, где z_1 и z_2 - фиксированные числа. Заметим, что области значений этого функционала на классах $S(a_k,R_k;a,b)$ и $S(a_k,R_k;a,b,c)$ совпадают.

Доказано, что граничные функции, удовлетворяя определенному дифференциальному уравнению первого порядка, отображают области определения на всю плоскость, исключая разрезы, составленные из конечного числа аналитических дуг, причем один из разрезов уходит на бесконечность. Аналогичные результаты получаются для более общих функционалов.

Отметим, что с увеличением порядка связности области быстро возрастают трудности исследования экстремальных задач. Если для односвязных областей коэффициенты дифференциально-функционального уравнения являются дробно-рациональными функциями, то для двусвязных – записываются через эллиптические функции, а для трёх и более связных областей– функциями значительно более сложными, построенными как ядра обобщенной формулы Шварца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schiffer M.* Variation of the Green-function and theory of the p-valued functions. Amer.J.Math. T. 65 (1943) , p.341-360.

2. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. Гостехиздат, М-Л, 1952.

3. *Куфарев П.П.* Об однопараметрических семействах аналитических функций. Матем. сборник. Т.13(55), (1943), с.87-118.

4. *Куфарев П.П.* Об одном свойстве экстремальных областей задачи коэффициентов. ДАН СССР, Т.97 (1954), с.391-393.

5. *Куфарев П.П., Генина (Семухина)Н.В.* О распространении вариационного метода Г.М.голузина на двусвязные области. ДАН СССР, Т.107 (1956), с.505-507.

6. *Гельфер С.А.* О распространении вариационного метода Голузина-Шиффера на многосвязные области. ДАН СССР, Т.142 (1962), с.503-507.

7. Александров И.А., Сорокин А.С. О распространении вариационного метода Г.М.Голузина-П.П.Куфарева на многосвязные области. ДАН СССР, Т.175, №6, (1967), с.1207-1210.

8. *Meschkowski H.* Darstellung analytischer Funktions durch den Randwinkel des Bildbereiches.. Math.Zeit., Bd. 62, №2, (1955), s.161-166.

9. *Зморович В.А.* Об обобщении интегральной формулы Шварца на $n-$связные круговые области. ДАН УССР, Т.5, (1958), с. 489-492.

10. *Сорокин А.С.* Распространение вариационной теоремы П.П.Куфарева на многосвязные области. Вопросы геометрической теории функций. Т.4, Тр. Томск. Ун-та, 1966, с.221-239.

11. *Сорокин А.С.* Вариационный метод Г.М.Голузина-П.П.Куфарева и формула М.В.Келдыша-Л.И.Седова. ДАН СССР, Т.308, №2, (1989), с.273-277.

12. *Сорокин А.С.* Параметрическое представление функций в конечносвязных областях. Сиб.матем.ж., Т.38, №5, (1997), с. 1163-1178.

13. *Сорокин А.С.* Формулы Келдыша – Седова и дифференцируемость по параметру семейств однолистных функций в конечносвязных областях. РАН, Математические заметки, Т.58, №6, (1995), с. 878-889.

14. *Дундученко Л.Е.* Еще про формулу Шварца для $n-$связной круговой области. ДАН УССР, №11, 1966, с.1383-1386.

15. *Зморович В.А.* Об обобщении интегральной формулы Пуассона на $n-$связные круговые области. ДАН УССР, Т.7, (1958), с. 698-701.

16. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М-Л, 1963.

17. *Александров И.А.* Вариационные формулы для однолистных функций в двусвязных областях. Сиб.матем.ж., Т.4, №5, (1963), с. 967-976.

18. *Сирык Г.В.* О конформном отображении близких областей. Успехи математических наук, Т.9, № 5(71), (1956), с. 57-60.

19. *Сирык Г.В.* Обобщение вариационной формулы М.А.Лаврентьева для конформного отображения близких односвязных областей на случай двусвязных областей. Изв. Вузов, Математика, Т.5, (1960), с. 152-159.

Автор статьи:

Сорокин
Андрей Семенович
канд. физ.-мат.наук, доцент, ст.н.с.
(филиал КузГТУ , г. Новокузнецк)
тел.: 8(3843) 772459

УДК 519.6

В. А. Гоголин

ВЕКТОРНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задача линейного программирования состоит в оптимизации линейной формы (1) с n неотрицательными переменными (2) при m ограничениях в виде нестрогих линейных неравенств (3)

$$L(X)=\sum_{i=1}^{n} C_i X_i \quad (1)$$

$$X_i \geq 0, i=1,\ldots,n \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ji} X_i . \leq (\geq) B_j \,, j=n+1,\ldots,n+m. \quad (3)$$

Область допустимых решений представляет выпуклый многогранник n-мерного пространства с наибольшим возможным числом граней $(n + m)$. Экстремальные значения (1) достигаются на его границах: в угловых точках, на гиперплоскостях, на гиперпрямых – в частности в точке пересечения n из $(n + m)$ гиперплоскостей, определяемых уравнениями для (2, 3). Наряду с симплекс-методом [1] имеются и другие методы решения линейных программ: метод эллипсоидов [2], метод внутренней точки [3] и их модификации.

Для выделения точки на границе области допустимых решений с максимальным значением линейной формы предлагается векторный алгоритм, состоящий в следующем. Все неравенства (2, 3) переписываются через знак меньше или равно. Выделяется градиент линейной формы $\vec{C}=\{C_1,\ldots,C_n\}$, градиенты (нормали) гиперплоскостей (2) $\vec{N}_1=\{-1,0,\ldots,0\},\ldots,\vec{N}_n\{0,\ldots,0,-1\}$ и градиенты (нормали) гиперплоскостей (3) $\vec{N}_j=\{A_{j1},\ldots,A_{jn}\}, (j=n+1,\ldots n+m)$. Здесь обозначения A_{ji} сохранены, хотя у некоторых координат могут быть изменены знаки за счет изменения знаков неравенств. При таком изменении знаков координат нормалей гиперплоскостей, нормали будут обращены во внешность выпуклого многогранника допустимых решений. Определяем наиболее близкую к градиенту $\vec{C}$ нормаль $\vec{N}_k$ $(k=1,\ldots,n+m)$ гиперплоскости и ее номер k по наибольшему значению косинусов углов между градиентом и нормалями. Из геометрического смысла ясно, что найденная гиперплоскость будет содержать угловую точку, в которой достигается максимум линейной формы. Из уравнения этой гиперплоскости выражаем одну из переменных и