10. *Сорокин А.С.* Распространение вариационной теоремы П.П.Куфарева на многосвязные области. Вопросы геометрической теории функций. Т.4, Тр. Томск. Ун-та, 1966, с.221-239.

11. *Сорокин А.С.* Вариационный метод Г.М.Голузина-П.П.Куфарева и формула М.В.Келдыша-Л.И.Седова. ДАН СССР, Т.308, №2, (1989), с.273-277.

12. *Сорокин А.С.* Параметрическое представление функций в конечносвязных областях. Сиб.матем.ж., Т.38, №5, (1997), с. 1163-1178.

13. *Сорокин А.С.* Формулы Келдыша – Седова и дифференцируемость по параметру семейств однолистных функций в конечносвязных областях. РАН, Математические заметки, Т.58, №6, (1995), с. 878-889.

14. *Дундученко Л.Е.* Еще про формулу Шварца для $n-$связной круговой области. ДАН УССР, №11, 1966, с.1383-1386.

15. *Зморович В.А.* Об обобщении интегральной формулы Пуассона на $n-$связные круговые области. ДАН УССР, Т.7, (1958), с. 698-701.

16. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М-Л, 1963.

17. *Александров И.А.* Вариационные формулы для однолистных функций в двусвязных областях. Сиб.матем.ж., Т.4, №5, (1963), с. 967-976.

18. *Сирык Г.В.* О конформном отображении близких областей. Успехи математических наук, Т.9, № 5(71), (1956), с. 57-60.

19. *Сирык Г.В.* Обобщение вариационной формулы М.А.Лаврентьева для конформного отображения близких односвязных областей на случай двусвязных областей. Изв. Вузов, Математика, Т.5, (1960), с. 152-159.

Автор статьи:

Сорокин
Андрей Семенович
канд. физ.-мат.наук, доцент, ст.н.с.
(филиал КузГТУ , г. Новокузнецк)
тел.: 8(3843) 772459

УДК 519.6

В. А. Гоголин

ВЕКТОРНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задача линейного программирования состоит в оптимизации линейной формы (1) с n неотрицательными переменными (2) при m ограничениях в виде нестрогих линейных неравенств (3)

$$L(X)=\sum_{i=1}^{n} C_i X_i \qquad (1)$$

$$X_i \ge 0, i=1,\ldots,n \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ji} X_i . \le (\ge) B_j, \; j=n+1,\ldots,n+m. \qquad (3)$$

Область допустимых решений представляет выпуклый многогранник n-мерного пространства с наибольшим возможным числом граней $(n + m)$. Экстремальные значения (1) достигаются на его границах: в угловых точках, на гиперплоскостях, на гиперпрямых – в частности в точке пересечения n из $(n + m)$ гиперплоскостей, определяемых уравнениями для (2, 3). Наряду с симплекс-методом [1] имеются и другие методы решения линейных программ: метод эллипсоидов [2], метод внутренней точки [3] и их модификации.

Для выделения точки на границе области допустимых решений с максимальным значением линейной формы предлагается векторный алгоритм, состоящий в следующем. Все неравенства (2, 3) переписываются через знак меньше или равно. Выделяется градиент линейной формы $\vec{C}=\{C_1, ..., C_n\}$, градиенты (нормали) гиперплоскостей (2) $\vec{N}_1=\{-1,0,...,0\},...,\vec{N}_n\{0,...,0,-1\}$ и градиенты (нормали) гиперплоскостей (3) $\vec{N}_j=\{A_{j1},...,A_{jn}\}, (j=n+1,...n+m).$ Здесь обозначения A_{ji} сохранены, хотя у некоторых координат могут быть изменены знаки за счет изменения знаков неравенств. При таком изменении знаков координат нормалей гиперплоскостей, нормали будут обращены во внешность выпуклого многогранника допустимых решений. Определяем наиболее близкую к градиенту $\vec{C}$ нормаль $\vec{N}_k$ $(k=1,..., n+m)$ гиперплоскости и ее номер k по наибольшему значению косинусов углов между градиентом и нормалями. Из геометрического смысла ясно, что найденная гиперплоскость будет содержать угловую точку, в которой достигается максимум линейной формы. Из уравнения этой гиперплоскости выражаем одну из переменных и исключаем ее из (1) и (2, 3), понижая размерность задачи на единицу. Этот процесс понижения размерности продолжается до тех пор, пока останется только одна переменная, например X_1, с линейной формой $L(X) = C \cdot X_1 + D$. и с ограничениями вида $0 \le A \le X_1 \le B$.

Максимальное значение линейной формы достигается при $X_1 = B$, если $C \ge 0$; и при $X_1 = A$, если $C \le 0$ Затем процесс нахождения всех координат точки максимума выполняется в обратном порядке: по X_1 вычисляем, например, X_2, затем по ним – X_3 и так далее до X_n. При нахождении минимума - знаки координат ее градиента меняются на обратные.

Пример 1.

Максимизировать линейную форму (четырехмерная задача)

$$L(X) = 2X_1 + X_2 + 4X_3 + 3X_4$$

при ограничениях:

1) $X_1 \ge 0$; 2) $X_2 \ge 0$; 3) $X_3 \ge 0$; 4) $X_4 \ge 0$;

5) $X_1 + 3X_2 + X_3 + 2X_4 \le 12$;

6) $3X_1 \quad + 2X_3 + X_4 \ge 4$;

7) $4X_1 + 2X_2 + 3X_3 + X_4 \ge 6$;

8) $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \ge 1$.

Координаты градиента и внешних нормалей с учетом знаков ограничений имеют вид:

$\vec{C} = \{2; 1; 4; 3\}$,

$\vec{N}_1 = \{-1; 0; 0; 0\}$, $\vec{N}_2 = \{0; -1; 0; 0\}$,

$\vec{N}_3 = \{0; 0; -1; 0\}$, $\vec{N}_4 = \{0; 0; 0; -1\}$,

$\vec{N}_5 = \{1; 3; 1; 2\}$, $\vec{N}_6 = \{-3; 0; -2; -1\}$,

$\vec{N}_7 = \{-4; -2; -3; -1\}$, $\vec{N}_8 = \{-1; -1; -1; -1\}$.

После расчетов косинусов углов между градиентом и внешними нормалями, выбираем наибольший – между $\vec{C}$ и $\vec{N}_5$.

Выражаем из равенства 5) переменную $X_1 = 12 - 3X_2 - X_3 - 2X_4$ и ее подстановкой в линейную форму и ограничения имеем трехмерную задачу: максимизировать линейную форму

$$L(X) = -5X_2 + 2X_3 - X_4 + 24$$

при ограничениях:

1) $3X_2 + X_3 + 2X_4 \le 12$;

2) $X_2 \ge 0$; 3) $X_3 \ge 0$; 4) $X_4 \ge 0$;

6) $9X_2 + X_3 + 5X_4 \le 32$;

7) $10X_2 + X_3 + 7X_4 \le 44$;

8) $2X_2 + X_4 \le 11$.

Здесь координаты градиента и внешних нормалей с учетом знаков ограничений имеют вид:

$\vec{C} = \{-5; 2; -1\}$, $\vec{N}_1 = \{3; 1; 2\}$,

$\vec{N}_2 = \{-1; 0; 0\}$, $\vec{N}_3 = \{0; -1; 0\}$, $\vec{N}_4 = \{0; 0; -1\}$,

$\vec{N}_6 = \{9; 1; 5\}$, $\vec{N}_7 = \{10; 1; 7\}$, $\vec{N}_8 = \{2; 0; 1\}$.

После расчетов косинусов углов между градиентом и внешними нормалями, выбираем наибольший – между $\vec{C}$ и $\vec{N}_2$. Тогда $X_2=0$.

Отсюда имеем двухмерную задачу максимизации линейной формы

$$L(X) = 2X_3 - X_4 + 24$$

при ограничениях

1) $X_3 + 2X_4 \le 12$; 3) $X_3 \ge 0$; 4) $X_4 \ge 0$;

6) $X_3 + 5X_4 \le 32$; 7) $X_3 + 7X_4 \le 44$;

8) $X_4 \le 11$.

Координаты градиента и внешних нормалей с учетом знаков ограничений имеют вид:

$\vec{C} = \{2; -1\}$, $\vec{N}_1 = \{1; 2\}$,

$\vec{N}_3 = \{-1; 0\}$, $\vec{N}_4 = \{0; -1\}$,

$\vec{N}_6 = \{1; 5\}$, $\vec{N}_7 = \{11; 7\}$, $\vec{N}_8 = \{0; 1\}$.

После расчетов косинусов углов между градиентом и внешними нормалями, выбираем наибольший – между $\vec{C}$ и $\vec{N}_4$. Тогда $X_4=0$.

Отсюда имеем уже одномерную задачу максимизации $L(X) = 2X_3 + 24$ при ограничениях

1) $X_3 \le 12$; 3) $X_3 \ge 0$; 6) $X_3 \le 32$; 7) $X_3 \le 44$.

Таким образом, задача свелась к отысканию максимума линейной функции $L(X) = 2X_3 + 24$ на интервале [0,12], откуда $\max L(X) = 48$ при $X_1=0$, $X_2=0$, $X_3=12$, $X_4=0$.

Пример 2.

Минимизировать линейную форму

$$L(X) = 2X_1 + X_2 + 4X_3 + 3X_4$$

при тех же ограничениях (1-8).

Координаты «градиента» и внешних нормалей граней области допустимых решений с учетом знаков ограничений имеют вид:

$\vec{C} = \{-2; -1; -4; -3\}$,

$\vec{N}_1 = \{-1; 0; 0; 0\}$, $\vec{N}_2 = \{0; -1; 0; 0\}$,

$\vec{N}_3 = \{0; 0; -1; 0\}$, $\vec{N}_4 = \{0; 0; 0; -1\}$,

$\vec{N}_5 = \{1; 3; 1; 2\}$, $\vec{N}_6 = \{-3; 0; -2; -1\}$,

$\vec{N}_7 = \{-4; -2; -3; -1\}$, $\vec{N}_8 = \{-1; -1; -1; -1\}$.

Сводим задачу к трехмерной, исключая X_4 из ограничения 7) по условию наибольшей близости градиента к нормали грани области допустимых решений $X_4 = 6 - 4X_1 - 2X_2 - 3X_3$. После подстановки в линейную форму и ограничения имеем трехмерную задачу: минимизации

$$L(X) = -10X_1 - 5X_2 - 5X_3 + 18$$

при ограничениях

1) $X_1 \ge 0$;

2) $X_2 \ge 0$; 3) $X_3 \ge 0$; 4) $4X_1 + 2X_2 + 3X_3 \le 6$;

5) $7X_1 + X_2 + 5X_3 \ge 0$;

6) $7X_1 + 2X_2 + 5X_3 \ge 10$;

8) $5X_1 + 3X_2 + 4X_3 \geq 7$.

Размерность задачи по принятому критерию близости градиента и нормали грани области допустимых решений понижается на единицу после исключения X_3 из ограничения 4). Новая двухмерная задача имеет вид:

минимизировать линейную форму

$$L(X) = -10/3X_1 - 5/3X_2 + 8$$

при ограничениях

1) $X_1 \geq 0$; 2) $X_2 \geq 0$; 3) $2X_1 + X_2 \leq 3$;

5) $-X_1 + 7X_2 \leq 30$; 6) $X_1 - 4X_2 \geq 0$;

8) $X_1 - X_2 \leq 3$.

Одномерная задача свелась к минимизации $L(X) = 3$ при ограничениях $4/3 \leq X_1 \leq 3/2$.

Соответственно, $\min L(X) = 3$ при $4/3 \leq X_1 \leq 3/2$, $X_2 = 3 - 2X_1$, $X_3 = X_4 = 0$.

Достаточным условием применения векторного алгоритма, как следует из его процедуры, является включение в область допустимых решений всех ограничений. Например, когда все ограничения (3) имеют один знак неравенств и один знак правых частей. К таким задачам, в частности, относится задача о распределении ресурсов и задача о смесях. Число операций симплекс-метода имеет порядок m^3, число операций векторного алгоритма - порядок mn^2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Данциг Д.* Линейное программирование, его применение и обобщение. М.: Прогресс, 1966, 600с.

2. *Хачиян Л.Г.* Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, 20:1, с 51-68.

3. *Дикин И.И.* Метод внутренней точки в задачах линейного и нелинейного программирования. Издательство: Эдиториал УРСС, 2010, 120 с.

Автор статьи:

Гоголин
Вячеслав Анатольевич,
докт.техн.наук, проф. каф. математики КузГТУ
Email: inna-e@inbox.ru

УКД 519.21

А.В. Бирюков, Е.В.Гутова

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГРАНУЛОМЕТРИЯ

Рассмотрим дисперсную систему из частиц случайных размеров и формы. Размер частицы определяет ее диаметр x, распределенный с плотностью $f(x)$ и начальными моментами $m(k)$, равными математическому ожиданию k-ой степени диаметра.

Форму частицы характеризуют ее меры сферичности

$$p = s/x^2 \ , \ , \quad q = V/x^2$$

где $S, V -$ площадь поверхности и объем частицы.

Обозначим через $\bar{S}, \bar{V}, \bar{p}, \bar{q}$ математические ожидания. Тогда

$$\bar{S} = \bar{p}m, \ \bar{V} = \bar{q}m.$$

Величина $\bar{S}/\bar{V}$ равна суммарной площади поверхности частиц в единичном объеме. Она является основным параметром динамики дробления. Любая частица имеет геометрическую или физическую характеристику, пропорциональную $k - ой$ степени ее диаметра.

Интегрируя отношение $x^k f(x)/m(k)$ в границах от 0 до x, получим гранулометрическую функцию $t(x,k)$, которая дает описание фракционного состава дисперсной системы по заданной суммарной характеристике частиц.

В частности, при $k = 3$ она дает описание фракционного состава по суммарному объему частиц, что чаще всего востребовано инженерной практикой.

Частицы могут быть погружены в твердую среду, как при петрографическом анализе шлифов. В этом случае измерениям доступны лишь сечения частиц плоскостью.

Если $m(k)$и $n(k) -$ моменты распределения диаметра частиц и их степеней, то

$$m(1)=10 / n(-1)' \ ; \ m(2)=2n(1) / n(-2)'$$

где $n(-1)$ - среднее гармоническое диаметров сечений.

Эти формулы получены регрессионным анализом результатов лабораторных исследований.

В горном деле дисперсные системы представлены результатами дробления пород и полезных ископаемых. Диаметр их частиц обладает тем свойством, что плотность его распределения монотонно убывает. При этом законом распределения диаметра в большинстве случаев является треугольный закон с плотностью

$$f(x) = 2(1 - x),$$

где за масштабную единицу принята правая гра-