

$$8) 5X_1 + 3X_2 + 4X_3 \geq 7.$$

Размерность задачи по принятому критерию близости градиента и нормали грани области допустимых решений понижается на единицу после исключения  $X_3$  из ограничения 4). Новая двухмерная задача имеет вид:

минимизировать линейную форму

$$L(X) = -10/3X_1 - 5/3X_2 + 8$$

при ограничениях

$$1) X_1 \geq 0; \quad 2) X_2 \geq 0; \quad 3) 2X_1 + X_2 \leq 3;$$

$$5) -X_1 + 7X_2 \leq 30; \quad 6) X_1 - 4X_2 \geq 0;$$

$$8) X_1 - X_2 \leq 3.$$

Одномерная задача свелась к минимизации

$$L(X) = 3 \text{ при ограничениях } 4/3 \leq X_1 \leq 3/2.$$

Соответственно,  $\min L(X) = 3$  при  $4/3 \leq X_1 \leq 3/2, X_2 = 3 - 2X_1, X_3 = X_4 = 0$ .

Достаточным условием применения векторного алгоритма, как следует из его процедуры, является включение в область допустимых решений всех ограничений. Например, когда все ограничения (3) имеют один знак неравенств и один знак правых частей. К таким задачам, в частности, относится задача о распределении ресурсов и задача о смесях. Число операций симплекс-метода имеет порядок  $m^3$ , число операций векторного алгоритма - порядок  $mn^2$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данциг Д. Линейное программирование, его применение и обобщение. М.: Прогресс, 1966, 600с.
2. Хачиян Л.Г. Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, 20:1, с 51-68.
3. Дикин И.И. Метод внутренней точки в задачах линейного и нелинейного программирования. Издательство: Эдиториал УРСС, 2010, 120 с.

Автор статьи:

Гоголин

Вячеслав Анатольевич,  
докт.техн.наук, проф. каф. математики КузГТУ  
Email: [inna-e@inbox.ru](mailto:inna-e@inbox.ru)

## УКД 519.21

**А.В. Бирюков, Е.В. Гутова**

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГРАНУЛОМЕТРИЯ

Рассмотрим дисперсную систему из частиц случайных размеров и формы. Размер частицы определяет ее диаметр  $x$ , распределенный с плотностью  $f(x)$  и начальными моментами  $m(k)$ , равными математическому ожиданию  $k$ -ой степени диаметра.

Форму частицы характеризуют ее меры сферичности

$$p = s/x^2, \quad q = V/x^2$$

где  $S, V$  – площадь поверхности и объем частицы.

Обозначим через  $\bar{S}, \bar{V}, \bar{p}, \bar{q}$  математические ожидания. Тогда

$$\bar{S} = \bar{p}m, \quad \bar{V} = \bar{q}m.$$

Величина  $\bar{S}/\bar{V}$  равна суммарной площади поверхности частиц в единичном объеме. Она является основным параметром динамики дробления. Любая частица имеет геометрическую или физическую характеристику, пропорциональную  $k$ -ой степени ее диаметра.

Интегрируя отношение  $x^k f(x)/m(k)$  в границах от 0 до  $x$ , получим гранулометрическую функцию  $t(x, k)$ , которая дает описание фракционного состава дисперской системы по заданной суммарной характеристике частиц.

В частности, при  $k = 3$  она дает описание фракционного состава по суммарному объему частиц, что чаще всего востребовано инженерной практикой.

Частицы могут быть погружены в твердую среду, как при петрографическом анализе шлифов. В этом случае измерениям доступны лишь сечения частиц плоскостью.

Если  $m(k)$  и  $n(k)$  – моменты распределения диаметра частиц и их степеней, то

$$m(1) = 10/n(-1); \quad m(2) = 2n(1)/n(-2)$$

где  $n(-1)$  – среднее гармоническое диаметров сечений.

Эти формулы получены регрессионным анализом результатов лабораторных исследований.

В горном деле дисперсные системы представлены результатами дробления пород и полезных ископаемых. Диаметр их частиц обладает тем свойством, что плотность его распределения монотонно убывает. При этом законом распределения диаметра в большинстве случаев является треугольный закон с плотностью

$$f(x) = 2(1-x),$$

где за масштабную единицу принята правая гра-

ница значений диаметра.

Для этого закона

$$m(k) = \frac{2}{(k+1)(k+2)},$$

$$t(x, k) = (k+2)x^{k+1} - (k+1)x^{k+2}.$$

Для продуктов дробления меры сферичности частиц по результатам измерений имеют центры рассеяния  $\bar{p} = 3, \bar{q} = 1/3$ . Следовательно, для треугольного закона

$$\frac{\bar{S}}{\bar{V}} = \frac{5}{m(1)}.$$

Среднюю крупность частиц дисперсной системы можно характеризовать их средневзвешенным диаметром

$$w(k) = \frac{m(k+1)}{m(k)},$$

или с учетом треугольного закона

$$w(k) = \frac{3(k+1)m(1)}{k+3}.$$

Основой поиска закона распределения диаметра служит репрезентативная выборка, содержащая результаты измерений. Но измерения обычно проводят лишь на поверхности трехмерной области, содержащей дисперсную систему. Это не дает репрезентативную выборку и требует соответствующей корректировки.

Обозначим через  $f(x), m(k)$  и  $q(x), n(k)$  плотность и моменты распределения диаметра частиц всей дисперсной системы и частиц на ее поверхности.

Очевидно, существует такое значение диаметра  $x = z$ , для которого  $f(x) > q(x)$  при  $x < z$ , и  $f(x) < q(x)$  при  $x > z$ . Этому условию удовлетворяет равенство

$$f(x) = \frac{z}{x} q(x).$$

Интегрируя это равенство по всем значениям диаметра, получим искомую взаимосвязь в виде

$m(k) = n(k-1) / n(-1)$ .  $f(x) = q(x) / x n(-1)$ ,  
где  $n(-1)$  есть среднее гармоническое диаметров частиц на поверхности дисперсной системы.

В частности,  $n(1) = m(2)/m(1)$ , и для треугольного закона

$$n(1) = \frac{3m(1)}{2},$$

т.е. средний диаметр частиц на поверхности в полтора раза превосходит средний диаметр всех частиц.

В природе дисперсные системы представлены породными массивами, рассечеными естественными трещинами на структурные блоки. Массивы осадочных пород угольных месторождений обычно имеют три системы трещин. Направление с наибольшей частотой трещин определяет один из векторов

$$\begin{aligned} a + b - c, \\ a - b + c, \\ -a + b + c, \end{aligned}$$

имеющий наибольший модуль, где  $a, b, c$  – векторы, ортогональные системам трещин и по модулю равные частоте трещин в системах. В этом направлении сейсмическая волна максимально теряет свою скорость и амплитуду.

Если число систем трещин в массиве больше трех, то он становится практически изотропным. В изотропном массиве диаметр структурных блоков по результатам измерений распределен по экспоненциальному закону, т.е.

$$m(k) = [m(1)]^k \cdot k!,$$

а меры сферичности блоков имеют центры рассеяния

$$\bar{p} = 3, \bar{q} = \frac{1}{4}.$$

Таким образом

$$\frac{\bar{S}}{\bar{V}} = \frac{4}{m(1)}.$$

Эта величина характеризует трещинную пустотность и фильтрационные свойства массива.

В заключение отметим, что этот эмпирически полученный результат совпадает с результатом исследования разбиения пространства на многоугольники пуассоновским полем плоскостей.

#### Авторы статьи

Бирюков  
Альберт Васильевич,  
докт.техн наук,  
профессор КузГТУ.  
Email: [bav.vm@kuzstu.ru](mailto:bav.vm@kuzstu.ru)

Гутова  
Елена Владимировна,  
ст. преподаватель  
каф.математики КузГТУ  
Email: [elenagutova@mail.ru](mailto:elenagutova@mail.ru)