8. *Hermanns H., Meyer-Kayser J., Siegle M.* Multiterminal binary decision diagrams to represent and analyse continuous time Markov chains. In Proc. of 3rd Intl. Workshop on the Numerical Solution of Markov Chains, pages 188–207, 1999.

9. *Deavours D., Sanders W.* An efficient disk-based tool for solving large Markov models. Performance Evaluation, 33:67–84, 1998.

10. *Knottenbelt W.J.* Parallel Performance Analysis of Large Markov Models. PhD thesis, Department of Computing, Imperial College, 1999.

11. *Hillston J.* Tuning systems: From composition to performance. The Computer Journal, 2005. To appear.

12. *Bowman H., Bryans J., Derrick J.* Analysis of a multimedia stream using stochastic process algebra. In C. Priami, editor, 6th Int. Workshop on Process Algebras and Performance Modelling, pages 51–69, Nice, September 1998.

13. *Bradley J.T., Dingle N.J., Gilmore S.T., Knottenbelt W.J.* Derivation of passage-time densities in PEPA models using ipc: the Imperial PEPA Compiler. In G. Kotsis, editor, Proc. of the 11th IEEE/ACM Int. Symp. on Modeling, Analysis and Simulation of Computer and Telecommunications Systems, pages 344–351, October 2003. IEEE Computer Society Press.

14. *Thomas N., Bradley J.T., Knottenbelt W.J.* Stochastic analysis of scheduling strategies in a grid-based resource model. IEE Software Engineering, 151(5):232–239, September 2004.

15. *Hillston J., Kloul L., Mokhtari A.* Towards a feasible active networking scenario. Telecommunication Systems, 27(2–4):413–438, 2004.

16. *Gilmore S., Hillston J., Ribaudo M.* An efficient algorithm for aggregating PEPA models. IEEE Transactions on Software Engineering, 27(5):449–464, May 2001.

17. *Hillston J.* Compositional Markovian modelling using a process algebra. In W. Stewart, editor, Proc. of 2nd Int. Workshop on Numerical Solution of Markov Chains: Computationswith Markov Chains, Raleigh, North Carolina, Jan. 1995. Kluwer Academic Press.

18. *Gilmore S., Hillston J.* The PEPA Workbench: A Tool to Support a Process Algebra-based Approach to Performance Modelling. In Proc. of 7th Int. Conf. on Modelling Techniques and Tools for Computer Performance Evaluation, number 794 in LNCS, pages 353–368, Vienna, May 1994. Springer-Verlag.

19. *Soong T.* Random Differential Equations in Science and Engineering. Academic Press, 1973.

20. *Oksendal B.* Stochastic Differential Equations. Springer, 2003.

Автор статьи:

Сорокин
Андрей Семенович
- канд. физ.-мат.наук, доцент, ст.н.с.
(филиал КузГТУ в г. Новокузнецке),
тел.8(3843)725007

УДК 519. 21

А.В. Бирюков

ГРАНУЛОМЕТРИЯ ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ

В дисперсной системе, частицы которой заполняют некоторую трехмерную область, будем рассматривать множество *A,* состоящее из всех частиц дисперсной системы, и множество *B* частиц, расположенных на поверхности системы.

В основе гранулометрического анализа дисперсной системы лежат результаты измерений частиц из множества *A,* образующих репрезентативную выборку. Однако в большинстве случаев измерениям доступны лишь частицы из множества *B,* что не обеспечивает репрезентативность выборки.

Тем не менее, результаты таких измерений обычно распространяют на всю дисперсную систему, что приводит к существенному искажению гранулометрических характеристик.

Крупность частиц характеризуется диаметром x, т. е. наибольшим линейным размером.

Обозначим через $f(x)$ и $g(x)$ плотности распределения диаметра частиц из множеств *A* и *B,* а через M_k и N_k - моменты порядка k этих распределений, получаемых интегрированием функций $x^k f(x)$ и $x^k g(x)$ по всему диапазону значений.

Как показывают многочисленные наблюдения, доля крупных частиц в множестве *B* больше, чем в множестве *A*.

Для мелких частиц наблюдается обратная картина. Поэтому существует значение x_0 диаметра частиц, для которого выполняются условия: $f(x) < g(x)$ при $x > x_0$ и $f(x) > g(x)$ при $x <$

x_0 . Этим условиям отвечает соотношение

$$g(x) = (x/x_0)^m f(x) \ ,$$

где m - параметр.

Как показали эксперименты с частицами кварца и песчинками, значения m имеют незначительную вариацию с центром рассеяния $m=1$. В этом случае x_0 $g(x)=x\cdot f(x)$ и, интегрируя обе части этого равенства, получаем

$$x_0 = M_1 = 1/N_{-1} \ ,$$

где N_{-1} - среднее гармоническое диаметров частиц из множества *B:*

$$N_{-1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}$$

(здесь x_i - диаметры частиц, n - объем выборки). Умножая обе части равенства $g(x) /N_{-1} = x\, f(x)$ на x^{k-1} и интегрируя, получаем соотношение между моментами распределения диаметра частиц всей дисперсной системы и ее поверхности:

$$M_k = N_{k-1} \ / \ N_{-1} \ . \qquad (1)$$

Особую роль играют соотношения для k=1 и k=2

$$M_k = 1 \ / \ N_{-1} \ , \quad M_2 = N_1 / N_{-1} \ . \qquad (2)$$

Правые части (2) вычисляются по результатам измерения частиц на поверхности дисперсной системы, а левые являются основой гранулометрического анализа всей дисперсной системы.

Отметим структурное сходство между формулами (2) и соотношениями, полученными в монографии [1] для дисперсной системы, состоящей из шаров, и ее сечения случайной плоскостью. Если M_k - моменты распределения диаметра шаров, и N_k - моменты распределения диаметра сечений (кругов), то соотношения, найденные в [1] методами интегральной геометрии, имеют вид

$$M_k = \pi / 2N_{-1}, \quad M_2 = 2N_1 / N_{-1}.$$

С точностью до коэффициентов они совпадают с формулами (2). Однако, в отличие от методов, используемых в [1], наш подход применим к любым дисперсным системам, состоящим из частиц произвольной формы.

В практической гранулометрии наиболее часто в качестве характеристики средней крупности частиц (например, крупности взрывного дробления пород) используют средневзвешенный по объему диаметр [2]:

$$D_3 = M_4 / M_3.$$

Из формул (1) получаем

$$D_3 = N_3 / N_2 = D'_2 < D'_3 \ ,$$

где D'_2 , D'_3 - средневзвешенные по площади поверхности и объему диаметры частиц из множества *B*. Для некоторых законов распределения диаметра частиц различие между D'_2 и D'_3 может быть существенным. Например, для экспоненциального закона

$$D'_3 = 4N_1, \ D_3 = 2M_1 = 3N_1, \quad M_1 = 3N_1 / 4,$$

т. е. средний диаметр частиц всей дисперсной системы в 4/3 раза меньше среднего диаметра частиц, лежащих на ее поверхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кендалл М., Моран П.* Геометрические вероятности. - М.: Наука, 1972.

2. *Бирюков А.В. и др*. Статические модели в процессах горного производства. - Кемерово: Межвузиздат, 1994.

Автор статьи:

Бирюков
Альберт Васильевич
- докт.техн.наук, проф.каф. высшей математики КузГТУ
Тел. 8-3842-39-63-19