

8. Hermanns H., Meyer-Kayser J., Siegle M. Multiterminal binary decision diagrams to represent and analyse continuous time Markov chains. In Proc. of 3rd Intl. Workshop on the Numerical Solution of Markov Chains, pages 188–207, 1999.
9. Deavours D., Sanders W. An efficient disk-based tool for solving large Markov models. Performance Evaluation, 33:67–84, 1998.
10. Knottenbelt W.J. Parallel Performance Analysis of Large Markov Models. PhD thesis, Department of Computing, Imperial College, 1999.
11. Hillston J. Tuning systems: From composition to performance. The Computer Journal, 2005. To appear.
12. Bowman H., Bryans J., Derrick J. Analysis of a multimedia stream using stochastic process algebra. In C. Priami, editor, 6th Int. Workshop on Process Algebras and Performance Modelling, pages 51–69, Nice, September 1998.
13. Bradley J.T., Dingle N.J., Gilmore S.T., Knottenbelt W.J. Derivation of passage-time densities in PEPA models using ipc: the Imperial PEPA Compiler. In G. Kotsis, editor, Proc. of the 11th IEEE/ACM Int. Symp. on Modeling, Analysis and Simulation of Computer and Telecommunications Systems, pages 344–351, October 2003. IEEE Computer Society Press.
14. Thomas N., Bradley J.T., Knottenbelt W.J. Stochastic analysis of scheduling strategies in a grid-based resource model. IEE Software Engineering, 151(5):232–239, September 2004.
15. Hillston J., Kloul L., Mokhtari A. Towards a feasible active networking scenario. Telecommunication Systems, 27(2–4):413–438, 2004.
16. Gilmore S., Hillston J., Ribaud M. An efficient algorithm for aggregating PEPA models. IEEE Transactions on Software Engineering, 27(5):449–464, May 2001.
17. Hillston J. Compositional Markovian modelling using a process algebra. In W. Stewart, editor, Proc. of 2nd Int. Workshop on Numerical Solution of Markov Chains: Computations with Markov Chains, Raleigh, North Carolina, Jan. 1995. Kluwer Academic Press.
18. Gilmore S., Hillston J. The PEPA Workbench: A Tool to Support a Process Algebra-based Approach to Performance Modelling. In Proc. of 7th Int. Conf. on Modelling Techniques and Tools for Computer Performance Evaluation, number 794 in LNCS, pages 353–368, Vienna, May 1994. Springer-Verlag.
19. Soong T. Random Differential Equations in Science and Engineering. Academic Press, 1973.
20. Oksendal B. Stochastic Differential Equations. Springer, 2003.

□ Автор статьи:

Сорокин
Андрей Семенович
- канд. физ.-мат. наук, доцент, ст.н.с.
(филиал КузГТУ в г. Новокузнецке),
тел.8(3843)725007

УДК 519. 21

А.В. Бирюков

ГРАНУЛОМЕТРИЯ ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ

В дисперсной системе, частицы которой заполняют некоторую трехмерную область, будем рассматривать множество A , состоящее из всех частиц дисперсной системы, и множество B частиц, расположенных на поверхности системы.

В основе гранулометрического анализа дисперсной системы лежат результаты измерений частиц из множества A , образующих репрезентативную выборку. Однако в большинстве случаев измерениям доступны лишь частицы из множества B , что не обеспечивает репрезентативность выборки.

Тем не менее, результаты таких измерений обычно распространяют на всю дисперсную систему, что приводит к существенному искажению гранулометрических характеристик.

Крупность частиц характеризуется диаметром x , т. е. наибольшим линейным размером.

Обозначим через $f(x)$ и $g(x)$ плотности распределения диаметра частиц из множеств A и B , а через M_k и N_k - моменты порядка k этих распределений, получаемых интегрированием функций $x^k f(x)$ и $x^k g(x)$ по всему диапазону значений.

Как показывают многочисленные наблюдения, доля крупных частиц в множестве B больше, чем в множестве A .

Для мелких частиц наблюдается обратная картина. Поэтому существует значение x_0 диаметра частиц, для которого выполняются условия: $f(x) < g(x)$ при $x > x_0$ и $f(x) > g(x)$ при $x <$

x_0 . Этим условиям отвечает соотношение

$$g(x) = (x/x_0)^m f(x),$$

где m - параметр.

Как показали эксперименты с частицами кварца и песчинками, значения m имеют незначительную вариацию с центром рассеяния $m=1$. В этом случае $x_0 g(x)=x f(x)$ и, интегрируя обе части этого равенства, получаем

$$x_0 = M_1 = 1/N_{-1},$$

где N_{-1} - среднее гармоническое диаметров частиц из множества B :

$$N_{-1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{-1}$$

(здесь x_i - диаметры частиц, n - объем выборки). Умножая обе части равенства $g(x) / N_{-1} = x f(x)$ на x^{k-1} и интегрируя, получаем соотношение между моментами распределения диаметра частиц всей дисперсной системы и ее поверхности:

$$M_k = N_{k-1} / N_{-1}. \quad (1)$$

Особую роль играют соотношения для $k=1$ и $k=2$

$$M_k = 1 / N_{-1}, \quad M_2 = N_1 / N_{-1}. \quad (2)$$

Правые части (2) вычисляются по результатам измерения частиц на поверхности дисперсной системы, а левые являются основой гранулометрического анализа всей дисперсной системы.

Отметим структурное сходство между формулами (2) и соотношениями, полученными в монографии [1] для дисперсной системы, состоящей из

шаров, и ее сечения случайной плоскостью. Если M_k - моменты распределения диаметра шаров, и N_k - моменты распределения диаметра сечений (кругов), то соотношения, найденные в [1] методами интегральной геометрии, имеют вид

$$M_k = \pi / 2 N_{-1}, \quad M_2 = 2 N_1 / N_{-1}.$$

С точностью до коэффициентов они совпадают с формулами (2). Однако, в отличие от методов, используемых в [1], наш подход применим к любым дисперсным системам, состоящим из частиц произвольной формы.

В практической гранулометрии наиболее часто в качестве характеристики средней крупности частиц (например, крупности взрывного дробления пород) используют средневзвешенный по объему диаметр [2]:

$$D_3 = M_4 / M_3.$$

Из формул (1) получаем

$$D_3 = N_3 / N_2 = D'_2 < D'_3,$$

где D'_2 , D'_3 - средневзвешенные по площади поверхности и объему диаметры частиц из множества B . Для некоторых законов распределения диаметра частиц различие между D'_2 и D'_3 может быть существенным. Например, для экспоненциального закона

$$D'_3 = 4N_1, \quad D_3 = 2M_1 = 3N_1, \quad M_1 = 3N_1 / 4,$$

т. е. средний диаметр частиц всей дисперсной системы в $4/3$ раза меньше среднего диаметра частиц, лежащих на ее поверхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности. - М.: Наука, 1972.
2. Бирюков А.В. и др. Статические модели в процессах горного производства. - Кемерово: Межвузиздат, 1994.

□ Автор статьи:

Бирюков

Альберт Васильевич

- докт.техн.наук, проф.каф. высшей математики КузГТУ
Тел. 8-3842-39-63-19