

УДК 625.72

П.А. Елугачев, М.А. Катасонов

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ТРАССИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНО-ПРОТЯЖЕННЫХ ОБЪЕКТОВ НА ПРИМЕРЕ САПР АД

Автомобильные дороги (АД) отличаются от других сложных в инженерном отношении продуктов человеческой деятельности своей чрезвычайной протяженностью и уникальностью привязки к конкретному ландшафту. Так как типовой проект АД содержит чертежи трех ее проекций (план, продольный и поперечные профили), их раздельный анализ не позволяет дать оценку дороге как пространственному сооружению с точки зрения потребительских свойств трассы (оптическая ясность, плавность и гармоничность проектируемой дороги) [7]. Перспективным считается определение оптически плавной трассы через понятие кручения [1-5].

Кручение представляет собой дифференциальную характеристику трассы как пространственной кривой и, следовательно, трасса должна иметь математическое описание в виде трехмерной функции. Удобнее всего трассу в пространстве задавать в виде системы параметрических уравнений:

$$\{x = x(l), y = y(l), z = z(l)\},$$

где l – текущий параметр (например, время движения по трассе).

Если форма плоской кривой определяется функцией ее кривизны, то форма пространственной кривой однозначно определяется совокупностью двух функций – кривизны и кручения [6]. Кривизна (ρ) пространственной трассы имеет тот же механический смысл ускорения поступательного движения автомобиля, что и для плоской трассы:

$$\rho = \sqrt{\frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) + (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}},$$

где x' , x'' – первая, вторая производные x по l и т. д.

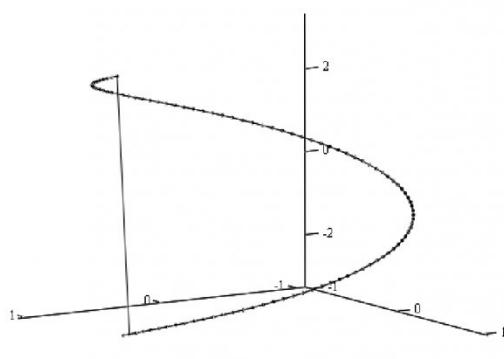


Рис. 1. Пространственный вид трассы автомобильной дороги выраженной винтовой кривой

Кручение – новое геометрическое понятие для трассы автомобильной дороги как кривой в пространстве, но именно кручением кривой можно объяснить многие из явлений зрительного восприятия, которые до сих пор оцениваются и объясняются на основе лишь эмпирических правил. Кручение (T) пространственной кривой определяется формулой:

$$T = R^2 \frac{|x' y' z'|}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3},$$

где $R=1/\rho$ – радиус кривизны.

Целью исследования является установление вида и величины кручения при сочетании разных видов аналитически заданных кривых в плане и продольном профиле и их взаимном расположении.

В исследовании рассматриваются такие сочетания кривых, которые в пространстве образуют линии, выходящие из плоскости.

Оценивать кручение пространственной кривой будем исходя из двух правил получения проектных данных:

- задание массива пространственных точек (если неизвестны элементы трассы, начала и концы кривых, их математическое описание, например, при паспортизации и диагностике автомобильных дорог, при проезде по оси дороги с GPS-приемником);
- аналитическое задание кривой (если элементы трассы известны, средствами традиционной методики трассирования при новом строительстве, ремонте и реконструкции дорог);

В первом случае плоскую кривую в плане $\{s_b, x_b, y_b\}$ и профиле $\{s_b, z_b\}$ (выраженную дискретной

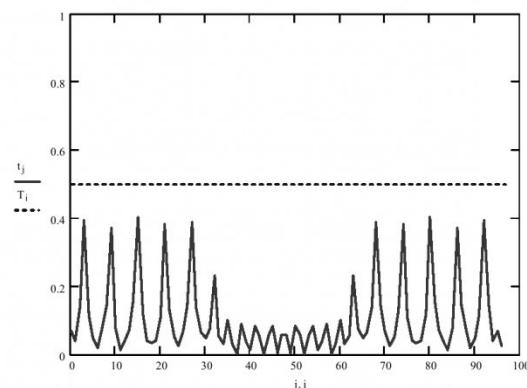


Рис. 2. Графики кручения: пунктир – для аналитически заданной кривой, линия – для кривой заданной базисом пространственных точек

моделью пространственных точек с фиксированным шагом) преобразуем в пространственный вид $\{x_i, y_i, z_i\}, i=0,1,\dots,N$.

Для определения кручения в конкретной точке пространства необходимо наличие минимального количества четырех последовательных пространственных точек кривой

$$P_i(x_i, y_i, z_i), i=1,2,3,4.$$

Тогда можно сформировать три пространственных вектора, задающие два последовательных изменения направления трассы от *входящего пространственного тангенса* (по аналогии с традиционными тангенсами):

$$q_i(U_i, V_i, W_i),$$

с координатами:

$$\begin{cases} U_i = x_{i+1} - x_i; \\ V_i = y_{i+1} - y_i; \\ W_i = z_{i+1} - z_i. \end{cases} \quad i=1,2$$

Полученные векторы позволяют вычислить векторы бинормалей с координатами:

$$\begin{cases} X_i = V_i * W_{i+1} - W_i * V_{i+1}; \\ Y_i = W_i * U_{i+1} - U_i * W_{i+1}; \\ Z_i = U_i * V_{i+1} - V_i * U_{i+1}, \end{cases} \quad i=1,2$$

Поворот вектора бинормали в пределе приближении точек, в соответствии с определением [6], задает угол кручения по формуле:

$$T = \arccos\left(\frac{b_1 * b_2}{|b_1| * |b_2|}\right),$$

где длина вектора $|b_i| = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}$, $i=1,2$

скалярное произведение

$$b_1 * b_2 = X_1 * X_2 + Y_1 * Y_2 + Z_1 * Z_2$$

Во втором случае кривая описана аналитически, и для нее необходимо предложить точный метод вычисления кручения. Для этого создадим заготовки для аналитического вычисления всех входящих в выражение (3) производных и определим пространственную кривизну по формуле:

$$K(t) = \frac{\left[\left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} z(t) \right)^2 \right] * \left[\left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right)^2 + \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right)^2 + \left(\frac{d^2}{dt^2} z(t) \right)^2 \right]}{\left[\left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} z(t) \right)^2 \right]^3} -$$

$$-\frac{\left[\left(\frac{d}{dt} x(t) \right) * \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) * \frac{d^2}{dt^2} y(t) + \left(\frac{d}{dt} z(t) \right) * \frac{d^2}{dt^2} z(t) \right]}{\left[\left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} z(t) \right)^2 \right]^3}$$

Кручение определяем по формуле:

$$T(t) = \frac{\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} x(t) & \frac{d}{dt} y(t) & \frac{d}{dt} z(t) \\ \frac{d^2}{dt^2} x(t) & \frac{d^2}{dt^2} y(t) & \frac{d^2}{dt^2} z(t) \\ \frac{d^3}{dt^3} x(t) & \frac{d^3}{dt^3} y(t) & \frac{d^3}{dt^3} z(t) \end{pmatrix}}{K(t) * \left[\left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} z(t) \right)^2 \right]^3}$$

На основе данного аппарата кручения при аналитическом выражении трассы АД, возможно, проводить анализ различных параметрических кривых, в том числе при сочетании элементов формирующих пространственную кривую постоянного уклона (винтовая кривая) (рис. 1). Например: аналитическое выражение кривой, $0 \leq t \leq \pi$:

$$x(t) = a \cos(t),$$

$$y(t) = a \sin(t),$$

$$z(t) = b(t - \pi)^k, k = 1.$$

Аналитический график кручения винтовой кривой имеет линейный вид (рис. 2).

При движении по такой пространственной кривой оптическая ясность будет обеспечиваться при соблюдении минимального расстояния видимости в плане в соответствии с категорией дороги (её кривизной).

С использованием пространственного моделирования трассы АД и изучения ее дифференциальных свойств в будущем возможно объяснить и описать ряд эмпирических правил трассирования автомобильных дорог, и тем самым формализовать эти законы для внедрения в САПР АД.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. СНиП 2.05.02-85. Автомобильные дороги. Госстрой СССР. – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1986. – 56 с.
2. Бойков В.Н., Елугачев М.А., Елугачев П.А. Применение кривых Безье при трассировании автомобильных дорог. – НИТ в Дорожной отрасли, №3 - 2005, стр. 17-20
3. Бабков В.Ф. Ландшафтное проектирование автомобильных дорог. - М.: Транспорт, 1980. - 189 с.
4. Дзенис П.Я., Рейнфельд В.Р. Пространственное проектирование автомобильных дорог. - М.: Транспорт. - 120 с.
5. Елугачев П.А. Опытное трассирование автомобильной дороги с использованием пространственных

кривых Безье. Электронный журнал «Исследовано в России», 96, 915-922, 2006. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2006/096.pdf>

6. Бойков В.Н., Шумилов Б.М., Елугачев П.А., Эшаров Э.А. Пространственное трассирование автомобильных дорог: Аспекты математической реализации// Экологические проблемы в транспортно-дорожном комплексе: Сб. науч. Тр. / МАДИ (ГТУ); УФ МАДИ (ГТУ); М., 2005, С. 63-75.

7. Бойков В.Н., Елугачев П.А., Крысин П.С. «Актуальность метода пространственного трассирования автомобильных дорог» Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета - №1, 2006 г., С. 145-149.

Авторы статьи:

Елугачев

Павел Александрович
- канд.техн.наук, доц. Томского
государственный архитектурно-
строительного университета
E-mail: PavelElugachev@indor.ru

Катасонов

Максим Александрович
- ассистент каф. автомобильных
дорог КузГТУ
E-mail: Katasonov@indor.ru