ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519. 21

А.В. Бирюков

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО ГРАНУЛОМЕТРИИ

Рассмотрим дисперсную систему, состоящую из частиц различной крупности и формы. Крупность частицы будет характеризовать ее диаметром X, т. е. наибольшим линейным размером, а форму – мерой сферичности $C = GV / SX$, где V, S - объем и площадь поверхности частицы. Наибольшее значение меры сферичности, равное 1, у шара. Для сравнения приведем значение меры сферичности тетраэдра, куба, книги, монеты и иглы, равное соответственно 0,42; 0,57; 0,28; 0,14; 0,02.

Диаметр и объем частицы на практике измерить не сложно. Для оценки же площади поверхности можно использовать известную формулу Коши: $S=4p$, где p - средняя площадь проекции частицы на случайную плоскость. При этом при 20 испытаниях ошибка не превосходит 5%.

Диаметр случайно выбранной частицы является положительной случайной величиной, распределенной с некоторой плотностью $f(x)$ и моментами M_k , равными интегралу от произведения $x^k f(x)$ в границах от нуля до бесконечности, причем отношение $6M_2 /CM_3$ равно удельной площади поверхности частиц. Эта величина играет важную роль в изучении динамики дробления материалов.

Пусть с каждой частицей дисперсной системы связана некоторая ее характеристика, пропорциональная k- й степени диаметра. Это может быть площадь поверхности или объем частицы, содержание в ней какого – либо минерала и т.д. Тогда интегрируя отношение $x^k f(x) /M_k$ в границах от 0 до x, получим функцию гранулометрического состава дисперсной системы по данной характеристике. Эта функция обладает свойством $F_k(x) > F_{k+1}(x)$. Для доказательства справедливости этого неравенства достаточно рассмотреть разность $F_k(x) - F_{k+1}(x)$ и ее производную. Легко видеть, что эта разность положительна на всем интервале от нуля до бесконечности. В частности, $F_1(x) > F_3(x)$, т. е. оценка объемного содержания фракций широко распространенным методом линейных измерений приводит к существенным ошибкам.

Гранулометрический анализ обычно проводят в предположении, что частицы дисперсной системы геометрически подобны. Однако в действительности отношения $c_1=s /x^2$, $c_2=v /x^3$ являются случайными величинами, независящими от x. Поэтому правомерность постулирования геометрического подобия частиц нуждается в обосновании.

Обозначим через n число частиц дисперсной системы, а через S_0, V_0 - их суммарную площадь поверхности и суммарный объем. В силу независимости случайных величин c_1, c_2 от x

$$\overline{S}_0 = \overline{c}_1 M_2 n, \quad \overline{V}_0 = \overline{c}_2 M_3 n,$$

где чертой сверху обозначены средние значения.

Пусть σ_1^2, σ_2^2 дисперсии случайных величин c_1, c_2 .

Тогда дисперсии S_0, V_0 равны соответственно $\sigma_1^2 M_4 n$, $\sigma_2^2 M_6 n$, а коэффициенты вариации - $\sigma_1 M_4^{1/2} / \overline{c}_1 M_2 n^{1/2} \sigma_2 M_6^{1/2} / \overline{c}_2 M_3 n^{1/2}$.

Как видно, последние стремятся к нулю при возрастании n. Таким образом, замена случайных величин S_0, V_0 их средними значениями приводит к пренебрежимо малым погрешностям, что и доказывает правомерность постулирования геометрического подобия частиц в гранулометрических расчетах.

Часто применяемая операция усреднения частиц состоит в том, что реальная совокупность мысленно заменяется гипотетической, в которой все частицы имеют один и тот же диаметр, называемый средним диаметром. Эта операция является определенной, если указаны инварианты усреднения, т. е. величины, которые остаются неизменными при усреднении.

Обычно в роли инвариантов усреднения выступают число частиц n, суммарная площадь поверхности S_0 и суммарный объем V_0. Для пар инвариантов n, S_0 и n, V_0 из уравнений усреднения имеем средние диаметры соответственно $M_2^{1/2}, M_3^{1/3}$.

Другой способ построения средних характеристик крупности частиц состоит в интегрирова-

нии отношения $x^k f(x)/M_k$. При этом средний диаметр составляет M_{k+1}/M_k. На практике чаще всего используют средневзвешенный по объему диаметр, равный M_4/M_3.

Многие технологические процессы горного дела, металлургии, строительства и других отраслей производства предусматривают смешивание совокупностей частиц с различным гранулометрическим составом. Задача состоит в том, чтобы по известным характеристикам смешиваемых компонентов найти характеристики смешанной совокупности.

Обозначим через a_i, b_i $(i=1,2,\ldots,n)$ доли i-й компоненты соответственно по числу частиц и по суммарной характеристике частиц, пропорциональной некоторой степени их диаметра. Тогда плотность и моменты распределения диаметра частиц смешанной совокупности являются линейными комбинациями соответствующих характеристик смешанных компонент, где коэффициентами линейных комбинаций являются числа a_i. Аналогичную структуру имеет и функция гранулометрического состава с той лишь разницей, что коэффициентами линейной комбинации служат числа b_i.

Природными дисперсными системами являются различные геоматериалы и , в частности, массивы горных пород, рассеченные естественными трещинами на структурные блоки. Рассмотрим два типа трещиноватости массива – системную и хаотическую.

В осадочных породах обычно развиты три системы трещин, включая трещины между слоями осадконакопления. Геометрической моделью здесь является разбиение пространства тремя системами параллельных плоскостей. Такая трещиноватость обладает анизотропией в том смысле, что частота трещин различна в различных направлениях. Это является причиной сейсмической анизотропии массива.

Для определения направления, по которым частота трещин имеет экстремальные значения, рассмотрим три вектора $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$, ортогональные плоскостям – трещинам в системах и по модулю равные частоте трещин в направлении этих векторов. Тогда направление наибольшей суммарной частоты трещин определяет одна из линейных комбинаций $\overline{P}_1+\overline{P}_2+\overline{P}_3$, $\overline{P}_1+\overline{P}_2-\overline{P}_3$, $\overline{P}_1-\overline{P}_2+\overline{P}_3$, $-\overline{P}_1+\overline{P}_2+\overline{P}_3$, а именно та, которая имеет наибольший модуль.

Наименьшее значение частоты трещин достигается в одном из направлений, определяемых векторными произведениями $\overline{P}_1\times\overline{P}_2, \overline{P}_1\times\overline{P}_3, \overline{P}_2\times\overline{P}_3$, а именно в направлении векторного произведения с наименьшим модулем.

Эмпирические распределения диаметра структурных блоков с большей точностью аппроксимируются однопараметрическим бета – распределением с плотностью $f(x)=6x(x_0-x)/x_0^3$, моментами $M_k=6x_0^k/(k+2)(k+3)$ и функцией гранулометрического состава

$$F_k(x)=(k+3)(x/x_0)^{k+2},$$

где x_0 - наибольшее из наблюдаемых значений x.

Мера сферичности структурных блоков по замерам составляет в среднем 0,6. При этом удельная площадь поверхности блоков равна $15/x_0$. Она характеризует трещинную пустотность массива и его фильтрационные свойства.

Геометрической моделью хаотической трещиноватости является разбиение пространства пуассоновским полем плоскостей $ax+by+cz+1=0$ таким, что множество точек с координатами (a,b,c) является пуассоновским, т. е. вероятность попадания n точек в область единичного объема равна $\lambda^n exp(-\lambda)/n!$, где параметр λ равен среднему числу плоскостей, пересекающих единичный отрезок любой ориентации. Отсюда следует очень простой способ получения экспериментальной оценки параметра λ, состоящий в подсчете числа трещин, пересекающих произвольную прямую на обнажении породного массива.

При таком разбиении пространства структурные блоки являются выпуклыми многогранниками, для которых известны лишь некоторые средние геометрические характеристики [1]. Анализ этих средних характеристик позволяет сделать вывод в том, что диаметр структурных блоков распределен по эспоненциальному закону:

$$f(x)=\lambda\exp(-\lambda x),$$

$$M_k=k!/\lambda^k, \quad \lambda=1/M_1.$$

Частицы дисперсной системы бывают погружены в твердую непрозрачную среду как, например, при петрографическом анализе. В этом случае измеряем доступны лишь их сечения плоскостью. Однако восстановление геометрических характеристик трехмерных тел произвольной формы по их сечениям представляет собой нерешенную проблему интегральной геометрии.

Тем не менее для частиц, являющихся шарами, установлены соотношения [2]:

$$M_1=\pi/2N_{-1},\ M_2=2N_1/2N_1,$$

где M и N - моменты распределения диаметра шаров и диаметра их сечений. Для частиц произвольной формы эти соотношения являются приближенными.

Информацией о частицах трехмерной дисперсной системы очень часто служат результаты измерения частиц на ее поверхности. Однако получаемые при этом выборки не являются репрезентативными.

Обозначим через F и G множества частиц всей трехмерной дисперсной системы и множест-

во частиц на ее поверхности, а через $f(x)$ и $g(x)$ - плотности распределения диаметра частиц из F и G.. Как показывают наблюдения, содержание крупных частиц в G превосходит их содержание в F. Относительно мелких частиц соотношение обратное. Поэтому существует такое значение диаметра x_0 , для которого выполняются условия: $f(x)>g(x)$ при $x<x_0$, $f(x)<g(x)$ при $x>x_0$. Этим условиям удовлетворяет соотношение $f(x)=(x_0/x)g(x)$.

Пусть M_k и N_k моменты распределения диаметра частиц из F и G. Тогда, интегрируя приведенное соотношение между $f(x)$ и $g(x)$, получим $x_0=1/N_{-1}$, $M_k=N_{k-1}/N_{-1}$.

По структуре эти формулы совпадают с приведенными выше формулами, относящимися к случайным сечениям совокупности шаров. Здесь же аналогичные формулы получены для частиц произвольной формы и без использования методов интегральной геометрии.

Рассмотрим некоторые вопросы гранулометрии, связанные с динамикой дробления. Общее уравнение баланса энергии при дроблении представим в виде $HE=QA$, где H- коэффициент полезного действия процесса дробления; E- удельная (на единицу объема) энергия дробления; Q - удельная площадь вновь образованной поверхности; A - энергоемкость дробления, равная количеству энергии, затрачиваемой на образование единицы площади новой поверхности.

Если D - средневзвешенный по площади поверхности диаметр частиц, то $Q=c/D$ (c -мера сферичности), $E=cA/HD$. При увеличении расхода энергии (увеличении времени дробления) увеличивается и суммарная площадь поверхности частиц. Однако из физических соображений ясно, что такое увеличение имеет конечный предел, после которого коэффициент полезного действия становится равен нулю, а энергоемкость дробления – бесконечности.

Аппроксимацией распределения диаметра частиц при дроблении может служить степенной закон

$$f(x)=(m/a)(x/a)^{m-1},$$

где $m\in[0;1]$, $x\in[0;a]$. Для этого закона $M_k=ma^k/(m+k)$, $F_k(x)=(x/a)^{m+k}$.

При тонком измельчении зависимость параметра m от времени дробления t должна удовлетворять условно: при t=0 (начало процесса дробления) $m(t)=m_0$, а при $t\to\infty$ $m(t)\to 1$. Этому условию удовлетворяет дробно линейная функция $m(t)=(m_0+t)/(1+t)$.

Адекватность этой конструкции подтверждается результатами микроскопического анализа порошков, для которых эмпирические распределения диаметра частиц имеют практически постоянную плотность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сантало Л.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности. = М.: Наука, 1983.
2. *Кендалл М., Моран П.* Геометрические вероятности. – М.: Наука, 1972.

Автор статьи:
Бирюков
Альберт Васильевич
- докт.техн.наук, проф.каф. высшей математики КузГТУ
Тел. 8-3842-39-63-19