

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.21

А.С.Сорокин

### ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ХАРАКТЕРИСТИК НА ОСНОВЕ СТРОГИХ БИПОДОБИЯ И БИМОДЕЛИРОВАНИЯ

#### §1. Введение

В работе рассмотрено бимоделирование, которое основано на отмеченном мультипереходе системы PEPA [1], и исследованы некоторые его свойства. Определение строгого бимоделирования основано на понимании того, что строгие бигомотетичные компоненты в состоянии выполнить те же самые действия, приводящие к производным множествам. Эти производные множества в свою очередь сами строго бигомотетичны. В §2 показано, что это свойство может быть выражено с помощью определения отношения строгого бимоделирования. Тогда строгое биподобие наиболее полно удовлетворяет условиям отношения строгого бимоделирования. Остальная часть работы занята изучением свойств отношения строгого биподобия  $\infty$ .

В §3 это отношение изучено с точки зрения алгебры процесса. Показано, что строгое биподобие есть отношение соответствия для системы PEPA [2-7]. В §4 обсуждены применения строгого биподобия для смоделированных компонент системы.

Отношения между строгим биподобием и основным марковским процессом изучены в §5 [7-10]. Наконец, в §6 предложено, как строгое биподобие может быть использовано для метода упрощения модели. Отношение используется, для того чтобы найти компоненты, которые выполняют те же самые действия. Далее проверяют, для того чтобы гарантировать поведение компоненты, действительно ли оно то же самое. Если для одной компоненты найдется меньшее производное множество, то она может заменить другую компоненту в модели PEPA [2,4,5] и привести к пространству состояний основного марковского процесса. Демонстрируем это использование строгого биподобия для упрощения пространства состояний на одной из моделей MSMQ [2].

#### § 2. Определение строгого биподобия

Бимоделирование предназначено, чтобы зафиксировать одинаковое наблюдаемое поведение. Нужно разъяснить, какие аспекты поведения могут быть зафиксированы при наблюдении и обстановка, при которой проводится наблюдение.

В терминах PEPA имеется несколько возможностей того, как проводить наблюдения. Например, может ли наблюдатель знать относительную частоту, с которой происходят альтернативные действия, или возможные производные множества, встречающиеся в условиях движения данной компоненты? Фиксируется ли наблюдателем время пребывания каждой компоненты?

Альтернативный способ представлять отношение строгого бимоделирования в терминах отмеченной системой мультиперехода дает рабочая семантика языка. Две компоненты строго бигомотетичны, если они способны выполнять одинаковые действия, и получающиеся производные множества будут также строго бигомотетичны.

Тогда, когда в PEPA отмеченная система переходов производит мультидиаграмму, то кратность каждого действия также должна быть рассмотрена.

Определение строгого бимоделирования, которое представлено в этой работе, является простым расширением строгого бимоделирования CCS в PEPA [2, 6-8]. В системе CCS две компоненты строго бигомотетичны, если любому  $\alpha$  действию одной компоненты соответствует  $\alpha$  действие другой; кроме того, каждая  $\alpha$ -производная одной компоненты строго бигомотетична к некоторой  $\alpha$ -производной другой. Таким образом, для системы PEPA действия компоненты заменим на её действия и предъявим то же самое требование к производным множествам. Отметим, что это не налагает условий на кратности действий в компонентах. Например, это привело бы к эквивалентности, в которой  $P + P$  считают эквивалентно  $P$ , хотя сначала компонента  $P + P$ , казалось бы, действовала дважды с такой скоростью как  $P$ .

Самый простой способ избежать этой ситуации состоит в том, чтобы добавить дополнительное условие к строгому бимоделированию, заключающееся в очевидной оценке всех типов действий, и то же самое для этих двух компонент. Таким образом, в соответствии с CCS, а также в соответствии с марковскими процессами, предполагаем участия наблюдателя, который сравнивает их текущее поведение и не учитывает информацию о предыдущем поведении компонен-

ты. В частности, нет необходимости рассматривать относительную частоту или вероятность для переходов или для производных множеств.

**Определение 1.** *Бинарное отношение  $R \subseteq C \times C$ , с компонентами  $a$  является строгим бимоделированием, если существует такое  $(P, Q) \in R$ , что для любого  $\alpha \in A$ , выполнены следующие условия:*

- 1)  $r_\alpha(P) = r_\alpha(Q)$ ; и для всех  $a \in Act$
- 2) для любого  $P \xrightarrow{a} P'$  существует такое  $Q'$ , что  $Q \xrightarrow{a} Q'$  и  $(P', Q') \in R$ ;
- 3) для любого  $Q \xrightarrow{a} Q'$  существует такое  $P'$ , что  $P \xrightarrow{a} P'$  и  $(P', Q') \in R$ .

Так как отношение идентичности удовлетворяет всем условиям определения 1, то любая компонента является элементом строгого бимоделирования. Из условий симметричности следует, что, если  $R$  есть строгое бимоделирование, то и  $R^{-1}$  – также есть строгое бимоделирование. Условия являются также транзитивными и сохраняют свойства при объединении. Таким образом, имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** *Пусть каждый  $R_i$  ( $i=1,2,\dots$ ) есть строгое бимоделирование. Тогда следующие отношения:  $Id_C$ ,  $R_1 R_2$ ,  $R_i^{-1}$ ,  $\bigcup_{i \in I} R_i$  также будут строгими бимоделированиями.*

**Доказательство.** Доказательство следует непосредственно из определения 1.

Теперь определим отношение строгого биподобия  $\propto$ .

**Определение 2.** *Если  $P$  и  $Q$  - строгое бигометричны, то  $P \propto Q$  при условии, что  $(P, Q) \in R$ , а для каждого строгого бимоделирования  $R$  имеет место :*

$$\propto = \bigcup \{R : R \text{-строгое бимоделирование}\}$$

Из этого определения и теоремы 1 следует, что  $\propto$  является также строгим бимоделированием и что оно является отношением эквивалентности.

Для того, чтобы показать  $P \propto Q$ , необходимо определить отношение строгого бимоделирования  $R$  такого, что  $(P, Q) \in R$ . Так как это усложняет рассмотрение всех производных  $P$  и  $Q$  и их возможных взаимодействий, то задача может оказаться нетривиальной. Определим более слабое отношение, чем отношение строгого бимоделирования  $\propto$ . Оно использует классы эквивалентности, индуцированные на производные множества каждой компоненты в отношении  $\propto$ .

Тогда две компоненты удовлетворяют от-

ношению

$R$ , если они соответствуют действиям и очевидным оценкам типов действий. Каждая  $\alpha$  – производная принадлежит классу эквивалентности, в котором найдётся элемент, принадлежащий  $R$  с некоторым элементом класса эквивалентности. Этот класс содержит  $\alpha$  – производную в производном множестве другой компоненты.

**Определение 3.** *Отношение  $R$  является ограниченно строгим бимоделированием  $\propto$ , если существует такое  $P R Q$ , что для любого  $\alpha \in A$ , выполнены следующие условия:*

- 1)  $r_\alpha(P) = r_\alpha(Q)$ ; для всех  $\alpha \in Act$ ,
- 2) для любого  $P \xrightarrow{a} P'$  существует такое  $Q'$ , что  $Q \xrightarrow{a} Q'$  и  $P' \propto R \propto Q'$ ;
- 3) для любого  $Q \xrightarrow{a} Q'$  существует такое  $P'$ , что  $P \xrightarrow{a} P'$  и  $P' \propto R \propto Q'$ .

Для того чтобы показать, что между компонентами выполняется строгое биподобие, достаточно показать, что между ними выполняется ограничено строгое бимоделирование  $\propto$ .

Имеет место следующая лемма.

**Лемма 1.** *Если  $R$  - ограничено строгое бимоделирование  $\propto$ , то отношение  $\propto R \propto$  является строгим бимоделированием.*

**Доказательство.** Пусть  $P \propto R \propto Q$ . Тогда существуют такие производные  $P_1 \in ds(P)$  и  $Q_1 \in ds(Q)$ , что  $P \propto P_1 R Q_1 \propto Q$ . Для действий  $P$  и  $Q$  имеют место диаграммы :

$$\begin{array}{ccc} P & \propto & P_1 \\ a \downarrow & & \downarrow a \\ P' & \propto & P'_1 \\ r_\alpha(P) = r_\alpha(P_1) & & , \\ P_1 R Q_1 & & \\ a \downarrow & & \downarrow a \\ P'_1 & \propto & R \propto Q'_1 \\ r_\alpha(P_1) = r_\alpha(Q_1) & & , \\ Q_1 & \propto & Q \\ a \downarrow & & \downarrow a \\ Q'_1 & \propto & Q' \\ r_\alpha(Q_1) = r_\alpha(Q) & & . \end{array}$$

Заметим, что  $\propto$ , как отношение эквивалентности, является транзитивным, и поэтому из этих диаграмм получаем :

$$\begin{array}{cccc}
 P & \propto & R & \propto & Q \\
 a \downarrow & & & & \downarrow a \\
 P' & \propto & R & \propto & Q' \\
 r_\alpha(P) = r_\alpha(Q)
 \end{array}$$

**Теорема 2.** Если  $R$  – ограниченно строгое бимоделирование  $\infty$ , то  $R \subseteq \infty$ .

**Доказательство.** По лемме 1 имеем, что  $\infty R \infty$  есть строгое бимоделирование, тогда получаем, что  $\infty R \infty \subseteq \infty$ . Но так как  $Id_C \subseteq \infty$ , то  $R \subseteq \infty R \infty$ . Следовательно, имеет место  $R \subseteq \infty$ .

Этот результат будет использован в дальнейшем, когда докажем конгруэнтность отношения  $\infty$ .

### § 3. Свойства отношения строгого биподобия

В этом разделе исследуем свойства отношения строгого биподобия в процессе алгебраического контекста. Докажем, что конгруэнтность отношения строгого биподобия сохраняется для комбинаторов языка и для рекурсивных определений. Также покажем, что любые изоморфные компоненты строго бигомотетичны.

#### 3.1 Конгруэнтность строгого биподобия

Чтобы показать конгруэнтность строгого биподобия для системы PEPA, покажем, что отношение сохранено для каждого из комбинаторов языка. Например, это означает, что если  $P_1$  строго бигомотетично относительно  $P_2$ , то можно заменить  $P_1$  в компоненте  $P_1 \triangleright_L \triangleleft Q$  на  $P_2$ .

##### Теорема 3. (Сохранность комбинаторов)

Пусть  $P_1 \propto P_2$ , тогда

1.  $a.P_1 \propto a.P_2$ ;
2.  $P_1 + Q \propto P_2 + Q$ ;
3.  $P_1 \triangleright_L \triangleleft Q \propto P_2 \triangleright_L \triangleleft Q$ ;
4.  $P_1 / L \propto P_2 / L$ .

##### Доказательство.

1. Единственно возможно действие  $a.P_1$  или  $a.P_2$ , где  $a = (\alpha, r)$  для некоторого типа действия  $\alpha$  и его оценки  $r$ . Таким образом, для всех  $\beta \in A$  имеет место :

$$r_\beta(a.P_1) = \begin{cases} r & \text{если } \beta = \alpha \\ 0 & \text{если } \beta \neq \alpha \end{cases} = r_\beta(a.P_2).$$

Кроме того, производные  $P_1$  и  $P_2$ , сами себе бигомотетичны,  $P_1 \propto P_2$ . Следовательно,

$$a.P_1 \propto a.P_2.$$

2. Рассмотрим  $P_1 + Q$  и  $P_2 + Q$ . Для любого  $P$  и  $Q$ , и для каждого  $\alpha \in A$ ,  $r_\alpha(P+Q) = r_\alpha(P) + r_\alpha(Q)$ . Таким образом, из  $r_\alpha(P_1) = r_\alpha(P_2)$  для каждого  $\alpha \in A$ , заключаем, что  $r_\alpha(P_1 + Q) = r_\alpha(P_2 + Q)$ .

Предположим, что  $P_1 + Q \xrightarrow{a} P'$ .

Случай 1. Пусть  $P_1 \xrightarrow{a} P'$ ; из  $P_1 \propto P_2$  следует, что для любого  $P''$  имеет место  $P_2 \xrightarrow{a} P''$  и  $P' \propto P''$ . Тогда следует, что  $P_2 + Q \xrightarrow{a} P''$  и  $P' \propto P''$ .

Случай 2. Пусть  $Q \xrightarrow{a} P'$ . Тогда в силу симметрии  $P_2 + Q \xrightarrow{a} P'$ , и  $P' \propto P'$ .

3. Рассмотрим  $P_1 \triangleright_L \triangleleft Q$  и  $P_2 \triangleright_L \triangleleft Q$  и определим отношение  $R$  следующим образом

$$R = \{(Q_1 \triangleright_L \triangleleft Q, Q_2 \triangleright_L \triangleleft Q) | Q_1 \propto Q_2\}.$$

Заметим, что для любого  $P$  и  $Q$ , и для всех  $\alpha \in A$ ,

$$r_\alpha(P \triangleright_L \triangleleft Q) = \begin{cases} \min(r_\alpha(P), r_\alpha(Q)), & \text{если } \alpha \in L, \\ r_\alpha(P) + r_\alpha(Q), & \text{если } \alpha \notin L. \end{cases}$$

По определению

$$(P_1 \triangleright_L \triangleleft Q, P_2 \triangleright_L \triangleleft Q) \in R.$$

Кроме того, для всех  $\alpha \in A$ , выполняется  $r_\alpha(P_1) = r_\alpha(P_2)$ , из этого следует, что  $r_\alpha(P_1 \triangleright_L \triangleleft Q) = r_\alpha(P_2 \triangleright_L \triangleleft Q)$ , для всех  $\alpha \in A$ .

Рассмотрим  $P_1 \triangleright_L \triangleleft Q \xrightarrow{a} R$ , где  $a = (\alpha, r)$ .

Случай 1.  $P_1 \xrightarrow{a} P'_1$  и  $R \equiv P'_1 \triangleright_L \triangleleft Q$ ,  $\alpha \notin L$ .

Пусть  $P_1 \propto P_2$  и  $P'_1$  задано так, что  $P_2 \xrightarrow{a} P'_2$  и  $P'_1 \propto P'_2$ . Итак, если  $R \equiv P'_2 \triangleright_L \triangleleft Q$ ,  $P_2 \triangleright_L \triangleleft Q \xrightarrow{a} R$  и определено  $R$ , то  $(R, R') \in R$ .

Случай 2.  $Q \xrightarrow{a} Q'$  и  $R \equiv P'_1 \triangleright_L \triangleleft Q$ ,  $\alpha \notin L$ .

Этот случай подобен случаю 1.

Случай 3. Пусть  $\alpha \in L$  и

$$P_1 \xrightarrow{(\alpha, r_1)} P'_1, Q_1 \xrightarrow{(\alpha, r_2)} Q'_1, \\ R \equiv P'_1 \triangleright_L \triangleleft Q'.$$

Тогда

$$r = \frac{r_1}{r_\alpha(P_1)} \frac{r_2}{r_\alpha(Q)} \min(r_\alpha(P_1), r_\alpha(Q)).$$

Пусть  $P_1 \propto P_2$  и  $P'_2$  задано так, что  $P_2 \xrightarrow{(\alpha, r_1)} P'_2$ , и  $P'_1 \propto P'_2$ .

Итак, если  $R' \equiv P'_2 \triangleright_L \triangleleft Q'$  и

$P_2 \triangleright_L \triangleleft Q \xrightarrow{a} R'$ , то, по определению,

$$(R, R') = (P'_2 \triangleright_L \triangleleft Q', P'_2 \triangleright_L \triangleleft Q') \in R.$$

Тогда в силу симметрии следует, что  $R$  есть строгое бимоделирование. Следовательно,

$$P_1 \triangleright_L \triangleleft Q \propto P_2 \triangleright_L \triangleleft Q.$$

4. Покажем, что  $P_1/L \propto P_2/L$ . Для этого определим отношение  $R$  следующим образом:

$$R = \{(Q_1/L, Q_2/L) | Q_1 \propto Q_2\}.$$

Ранее было показано, что это отношение есть строгое бимоделирование.

Далее покажем, что множества рекурсивных определений также сохраняют отношение строгого биподобия. Определение строгого биподобия распространено на компоненты выражений следующим образом:

**Определение 4.** Пусть  $E$  и  $F$  выражения, содержащие переменные  $\tilde{X}$ . Если для любого множества индексов компонент  $\tilde{P}$  имеет место  $E\{\tilde{P}/\tilde{X}\} \propto F\{\tilde{P}/\tilde{X}\}$ , то  $E \propto F$ ,

Отсюда следует конгруэнтность  $\propto$ .

**Теорема 4. (Сохранение при рекурсивном определении).**

Пусть  $\tilde{E}$  и  $\tilde{F}$  содержат переменные  $\tilde{X}$ .

Пусть далее  $\tilde{A} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{E}\{\tilde{A}/\tilde{X}\}$ ,  $\tilde{B} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{F}\{\tilde{B}/\tilde{X}\}$  и  $\tilde{E} \propto \tilde{F}$ . Тогда  $\tilde{A} \propto \tilde{B}$ .

**Доказательство.** Для этого достаточно, чтобы было доказано для уравнений рекурсии  $E$  и  $F$ ,

что  $E \propto F$ , где  $A = E\{A/X\}$  и  $B = F\{B/X\}$ .

Строим отношение  $R$  следующим образом:

$$R = \{(G\{A/X\}, G\{B/X\}) | G \text{ содержит переменное } X\}$$

и покажем, что  $R$  есть ограниченно строгое бимоделирование  $\propto$ . По индукции делаем вывод, что для произвольного типа действия  $\alpha$ , очевидная оценка действий  $\alpha$  в  $G\{A/X\}$  и  $G\{B/X\}$  остается той же, то есть  $r_\alpha(G\{A/X\}) = r_\alpha(G\{B/X\})$ . Особо рассматриваются возможные формы  $G$ ; случай  $G \equiv X$  опущен.

**Случай 1 (Базовый случай):** Пусть  $G \equiv (\beta, r)G'$ . Тогда  $G\{A/X\} \equiv (\beta, r)G'\{A/X\}$  и

$$r_\alpha(G\{A/X\}) = \begin{cases} r, & \text{если } \alpha = \beta \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Легко видеть что

$$r_\alpha(G\{B/X\}) = \begin{cases} r, & \text{если } \alpha = \beta \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, из этого следует

$$r_\alpha(G\{A/X\}) = r_\alpha(G\{B/X\}).$$

**Случай 2:** Пусть  $G \equiv G_1 + G_2$ . Применяя индукцию и определение  $r_\alpha()$  получим :

$$\begin{aligned} r_\alpha(G\{A/X\}) &= r_\alpha(G_1\{A/X\}) + r_\alpha(G_2\{A/X\}) \\ &= r_\alpha(G_1\{B/X\}) + r_\alpha(G_2\{B/X\}) = r_\alpha(G\{B/X\}). \end{aligned}$$

**Случай 3:** Пусть  $G \equiv G_1 \triangleright_L \triangleleft G_2$ . Тогда по определению

$$r_\alpha(G\{A/X\}) = \begin{cases} r_\alpha(G_1\{A/X\}) + r_\alpha(G_2\{A/X\}), & \text{если } \alpha \notin L \\ \min(r_\alpha(G_1\{A/X\}), r_\alpha(G_2\{A/X\})), & \text{если } \alpha \in L. \end{cases}$$

Таким образом, по индукции, начиная с  $G_1$  и  $G_2$  приходим к выводу, что

$$r_\alpha(G\{A/X\}) = r_\alpha(G\{B/X\}).$$

**Случай 4:** Пусть  $G \equiv G'/L$ . Если  $\alpha \in L$ , то  $r_\alpha(G\{A/X\}) = 0 = r_\alpha(G\{B/X\})$ . Иначе, по индукции  $r_\alpha(G\{A/X\}) = r_\alpha(G'\{A/X\})$ .

**Случай 5:** Пусть  $G \equiv C$ , где  $C$  есть постоянная. Тогда по определению  $C$  ассоциирована с некоторой компонентой  $C = S$ . Из этого следует, что  $r_\alpha(G\{A/X\}) = r_\alpha(S) = r_\alpha(G\{B/X\})$ . Так как  $\alpha$  произвольно, то  $(G\{A/X\}, G\{B/X\}) \in R$  существует для всех  $\alpha \in A$ ,  $r_\alpha(G\{A/X\}) = r_\alpha(G'\{A/X\})$ .

Покажем, что любому действию  $G\{A/X\}$  соответствует действие  $G\{B/X\}$ . Рассмотрим произвольное действие  $a \in \text{Act}(G\{A/X\})$ , такое, что  $G\{A/X\} \xrightarrow{a} P'$ . По индукции покажем, что для каждого действия  $a$  существуют  $Q''$  и  $Q'$  такие, что  $G\{B/X\} \xrightarrow{a} Q''$  и  $(P', Q') \in R$ .

Отдельно рассмотрены всевозможные формы  $G$ .

**Случай 1:** Пусть  $G \equiv aG'$ . Тогда

$$G\{A/X\} \equiv a.G'\{A/X\}$$

По определению также следует, что

$$G\{B/X\} \equiv a.G'\{B/X\} \xrightarrow{a} G'\{B/X\},$$

где  $(G'\{A/X\}, G'\{B/X\}) \in R$ .

**Случай 2:** Пусть  $G \equiv X$ . Тогда  $G\{A/X\} \equiv A$ , и  $A \xrightarrow{a} P'$ . Из этого следует, что  $E\{A/X\} \xrightarrow{a} P'$ .

По индукции предполагаем, что существуют такие  $Q''$  и  $Q'$ , что  $E\{B/X\} \xrightarrow{a} Q'' \propto Q'$  и  $(P', Q') \in R$ . Если  $E \propto F$ , то существует такое

$Q'''$ , что  $F\{B/X\} \xrightarrow{a} Q'' \propto Q'$ . Так как  $B = F\{B/X\}$  и  $G\{B/X\} \equiv B$ , то действие  $G\{B/X\}$  соответствует действию  $F\{B/X\}$ , и поэтому

$$G\{B/X\} \xrightarrow{a} Q'' \propto Q' \text{ и } (P', Q') \in R.$$

*Случай 3:* Пусть  $G \equiv G_1 + G_2$ . Тогда

$$G\{A/X\} \equiv G_1\{A/X\} + G_2\{A/X\}$$

и действие  $G\{A/X\} \xrightarrow{a} P'$  может быть предложено для любой компоненты. Отдельно рассматриваются случаи

$$G_1\{A/X\} \xrightarrow{a} P' \text{ и } G_2\{A/X\} \xrightarrow{a} P'.$$

*Случай 4:* Пусть  $G \equiv G_1 \triangleright_L \triangleleft G_2$ . Тогда

$$G\{A/X\} \equiv G_1\{A/X\} \triangleright_L \triangleleft G_2\{A/X\}.$$

Рассмотрим некоторое такое действие

$a(\alpha, r)$ , что  $G\{A/X\} \xrightarrow{a} P'$ . Тогда возникает три различных ситуации:

1) когда  $\alpha \notin L$ , то это единичное действие из  $G_1\{A/X\}$ ;

2) когда  $\alpha \notin L$ , то это единичное действие из  $G_2\{A/X\}$ ; и

3) когда  $\alpha \in L$ , то это разделенное действие из  $G_1\{A/X\}$  и  $G_2\{A/X\}$ . Рассматриваем только третий случай, а другие два рассматриваются подобно ему.

*Случай 4.* 3). Пусть  $\alpha \in L$ :  
 $G_1\{A/X\} \xrightarrow{(\alpha, r_1)} P'_1$ ,       $G_2\{A/X\} \xrightarrow{(\alpha, r_2)} P'_2$ ,  
 $P' \equiv P'_1 \triangleright_L \triangleleft P'_2$ .

$$r = \frac{r_1}{r_\alpha(G_1\{A/X\})} \frac{r_2}{r_\alpha(G_2\{A/X\})} \min(r_\alpha(G_1\{A/X\}), r_\alpha(G_2\{A/X\}))$$

Поскольку для переходов  $G_1$  и  $G_2$  есть более простой вывод, то по индукции предполагаем, что существуют такие  $Q'_1$  и  $Q'_2$ , а также  $Q''_2$  и  $Q'_2$ , что имеет место

$$G_1\{B/X\} \xrightarrow{(\alpha, r_1)} Q''_1 \propto Q'_1, \quad G_2\{B/X\} \xrightarrow{(\alpha, r_2)} Q''_2 \propto Q'_2$$

Кроме того,  $(P'_1, Q'_1) \in R$  и  $(P'_2, Q'_2) \in R$ .

Итак, полагая  $Q'' \equiv Q''_1 \triangleright_L \triangleleft Q''_2$  и  $Q' \equiv Q'_1 \triangleright_L \triangleleft Q'_2$  получаем

$$G\{B/X\} \xrightarrow{a} Q'' \propto Q', \text{ где } a' = (\alpha, r_B).$$

Но так как

$$r_\alpha(G_1\{A/X\}) = r_\alpha(G_1\{B/X\})$$

$$r_\alpha(G_2\{A/X\}) = r_\alpha(G_2\{B/X\}),$$

то

$$\begin{aligned} r_B &= \frac{r_1}{r_\alpha(G_1\{B/X\})} \frac{r_2}{r_\alpha(G_2\{B/X\})} \times \\ &\times \min(r_\alpha(G_1\{B/X\}), r_\alpha(G_2\{B/X\})) = r. \end{aligned}$$

Так как  $(P'_1, Q'_1) \in R$ , то можем найти  $H_1$  такое, что  $P'_1 \equiv H_1\{A/X\}$  и  $Q'_1 \equiv H_1\{B/X\}$ . Так же можем найти  $H_2$  такое, что

$$P'_2 \equiv H_2\{A/X\} \text{ и } Q'_2 \equiv H_2\{B/X\}.$$

Следовательно, полагая  $H \equiv H_1 \triangleright_L \triangleleft H_2$ , получаем  $(P', Q') \equiv (H\{A/X\}, H\{B/X\}) \in R$

*Случай 5:* Пусть  $G \equiv G'/L$ . Отдельно считаем случаи для скрытых или нет переходов  $G'$ . От переходов  $G$  переходим к  $G'$ , для которых есть более простой вывод. Доказательство этого утверждения следует из прямого применения метода индукции.

*Случай 6:* Пусть  $G \equiv C$ , где  $C$  - постоянная. Предположим, что  $C$  ассоциирован с некоторым определением  $C = S$ .

Так как  $X$  не представлен в  $G$ , то  $G\{A/X\}$  и  $G\{B/X\}$  оба идентичны  $C$ .

Следовательно, у обоих будет та же самая  $a$ -производная  $P'$ , где  $(P', P) \equiv (P'\{A/X\}, P'\{B/X\})$ .

Таким образом, показано, что каждому действию  $G\{A/X\}$  соответствует  $G\{B/X\}$ , и в силу симметричности аргумента отметим, что каждому действию  $G\{B/X\}$  так же соответствует  $G\{A/X\}$ . Из этого следует, что отношение

$$R = \{(G\{A/X\}, G\{B/X\}) \mid G \text{ содержит переменную } X\}$$

Ограниченно строгое бимоделирование  $\propto$ .

Следовательно, если выберем  $G \equiv X$ , из этого следует необходимость  $A \propto B$ .

### 3.2 Изоморфизм и строгое биподобие

В [1,2] было представлено понятие изоморфизма компонент. Две компоненты изоморфны, если они генерируют дифференцированные диаграммы с одинаковой структурой. Такие компоненты отличаются только обозначением производных.

В следующей теореме устанавливаем изоморфизм компонент - более строгое отношение между компонентами, чем строгое биподобие, т. е.,

$$= \subset \propto \quad (1)$$

**Лемма 2.** Если  $F$  - изоморфизм компонент, то для любого  $P$ ,  $P \propto F(P)$ .

**Доказательство.** Пусть  $F$  есть изоморфизм компонент. Известно, что это - инъективная функция с  $Act(P) = Act(F(P))$ , а для всех  $a \in Act$ , где  $a$  - производные  $F(P)$ , является так же отображением  $F$  для  $a$ -производных  $P$ . Таким

образом ясно, что  $P$  и  $F(P)$  выполняют те же самые действия, с теми же кратностями. Все действия  $P$  и  $F(P)$  соответствуют допустимым оценкам. Это следует по индукции из структуры  $P$  и теоремы 3, что каждая  $a$ -производная  $P$  строго бигомотетична к  $a$ -производной  $F(P)$ .

**Теорема 5.** Если  $P$  и  $Q$  – изоморфизмы компонент, тогда  $P \propto Q$ .

**Доказательство.** Это непосредственно следует из леммы 2.

Из этого можем вывести, что в эквациональных законах, установленных для изоморфных компонент в [1,2] можно вновь заменить “=” на “ $\propto$ ”.

#### Следствие 1. (Выбор)

1.  $P + Q \propto Q + P$
2.  $P + (Q + R) \propto (P + Q) + R$

#### Следствие 2. (Сокрытие)

1.  $(P + Q)/L \propto P/L + Q/L$
2.  $((\alpha, r)P)/L \propto \begin{cases} (\tau, r)P/L, & \alpha \in L, \\ (\alpha, r)P/L, & \alpha \notin L. \end{cases}$
3.  $(P/L)/K \propto P/(L \cap K)$
4.  $P/L \propto P$ , если  $L \cap \bar{A}(P) = 0$

#### Следствие 3. (Кооперация)

1.  $P \triangleright_L \triangleleft_Q \propto Q \triangleright_L \triangleleft_P$
2.  $P \triangleright_L \triangleleft_Q \left( Q \triangleright_L \triangleleft_R \right) \propto \left( P \triangleright_L \triangleleft_Q \right) \triangleright_L \triangleleft_R$
3.  $\left( P \triangleright_L \triangleleft_Q \right) / (K \cup M) \propto \left( (P/K) \triangleright_L \triangleleft_Q (Q/K) \right) / M$ , где  $K \cap M = K \cap L = 0$ .
4.  $P \triangleright_K \triangleleft_Q \propto P \triangleright_L \triangleleft_Q$ , если  $K \cap (\bar{A}(P) \cup \bar{A}(Q)) = L$
5.  $\left( P \triangleright_L \triangleleft_Q \right) \triangleright_K \triangleleft_R \propto \begin{cases} P \triangleright_L \triangleleft_Q & \text{если } \bar{A}(R) \cap L \setminus K = 0 \\ Q \triangleright_L \triangleleft_K & \text{и } \bar{A}(P) \cap K \setminus L = 0 \\ & \text{и } \bar{A}(R) \cap L \setminus K = 0 \\ & \text{и } \bar{A}(Q) \cap M \setminus L = 0 \end{cases}$

#### Следствие 4. (Константа)

Если  $A = P$ , тогда  $A \propto P$ .

#### Следствие 5. (Закон о расширении)

Пусть  $P \equiv \left( P_1 \triangleright_L \triangleleft_{P_2} \right) / K$  при  $L, K \subset A$ . Тогда  $P \propto \sum \{(\alpha, r) \left( P_1 \triangleright_L \triangleleft_{P_2} \right) / K \mid P_1 \xrightarrow{(\alpha, r)} P_1'; \alpha \notin L \cup K\}$   $+ \sum \{(\alpha, r) \left( P_1 \triangleright_L \triangleleft_{P_2} \right) / K \mid P_2 \xrightarrow{(\alpha, r)} P_2'; \alpha \notin L \cup K\}$   $+ \sum \{(\tau, r) \left( P_1 \triangleright_L \triangleleft_{P_2} \right) / K \mid P_1 \xrightarrow{(\alpha, r)} P_1'; \alpha \in K \setminus L\}$   $+ \sum \{(\tau, r) \left( P_1 \triangleright_L \triangleleft_{P_2} \right) / K \mid P_2 \xrightarrow{(\alpha, r)} P_2'; \alpha \in K \setminus L\}$

$$+ \sum \left\{ \begin{array}{l} (\alpha, r) \left( P_1 \triangleright_L \triangleleft_{P_2} \right) / K \mid P_1 \xrightarrow{(\alpha, r)} P_1'; \\ | P_2 \xrightarrow{(\alpha, r)} P_2'; \alpha \in L \setminus K \end{array} \right. \\ r = \frac{r_1}{r_\alpha(P_1)} \frac{r_2}{r_\alpha(P_2)} \min(r_\alpha(P_1), r_\alpha(P_2)) \} \\ + \sum \left\{ \begin{array}{l} (\tau, r) \left( P_1 \triangleright_L \triangleleft_{P_2} \right) / K \mid P_1 \xrightarrow{(\alpha, r)} P_1'; \\ | P_2 \xrightarrow{(\alpha, r)} P_2'; \alpha \in L \cap K \end{array} \right. \\ r = \frac{r_1}{r_\alpha(P_1)} \frac{r_2}{r_\alpha(P_2)} \min(r_\alpha(P_1), r_\alpha(P_2)) \} .$$

Отметим, что легко построить компоненты, которые строго бигомотетичны, но не изоморфны. Как указано в уравнении (1) отношение “ $\subset$ ”, а не “ $\subseteq$ ”.

	$\stackrel{\text{def}}{=} a.B_1$
$\stackrel{\text{def}}{=} A_0 = a.A_1$	$\stackrel{\text{def}}{=} B_1 = b.B_2$
$\stackrel{\text{def}}{=} A_1 = b.A_0$	$\stackrel{\text{def}}{=} B_2 = a.B_3$
	$\stackrel{\text{def}}{=} B_3 = b.B_0$

Рис. 1: Пример показывающий, что  $A \propto B$ , но не предполагающий  $A = B$ .

Например, просто проверить, что отношение  $R = \{(A_0, B_0), (A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3)\}$ , (2)

есть строгое бимоделирование для компонент  $A$  и  $B$ , как показано на рис. 1. Здесь не может быть никакого изоморфизма между производными множествами  $A$  и  $B$ , так как они не имеют одинакового числа элементов. Таким образом,  $A \propto B$ , но  $A \neq B$ .

#### § 4. Строгое биподобие и компоненты системы

Отношение  $P \propto Q$  описывает компоненты системы, смоделированной для компонент PEPA  $P$  и  $Q$ . Пусть  $Sys_P$  и  $Sys_Q$  обозначают систему компонент, смоделированных для  $P$  и  $Q$ , а записывают это следующим образом  $P \propto Q$ . Это следует из определения строгого бимоделирования, так как множество действий, мульти множество действий и оценки этих двух компонент равны

$$A(P) = A(Q) \quad Act(P) = Act(Q) \quad q(P) = q(Q) \quad (3)$$

В терминах компонент систем  $Sys_P$  и  $Sys_Q$  это означает, что при наблюдении оказалось, что они выполняют те же самые действия и с теми же оценками и, что их средняя задержка перед выполнением некоторого действия будет той же самой.

Кроме того, можем вывести из уравнений (3), что вероятность (или относительная частота) у выполненного действия будет данного типа. Она такая же, как и у этих двух компонент  $Sys_P$  и

$Sys_Q$ .

Строгое отношение бимоделирования между  $P$  и  $Q$  гарантирует, что то же самое отношение должно существовать между соответствием производных, т. е. если  $P \xrightarrow{a} P'$ , то найдется такое  $Q'$ , что  $Q \xrightarrow{a} Q'$  и  $P' \propto Q'$ . Это означает, что любая последовательность действий, которая может быть выполнена для  $P$ , также будет выполнена и для  $Q$ .

Таким образом, если считаем компоненты принадлежащими системам  $Sys_P$  и  $Sys_Q$ , тогда возможные последовательности действий, которые они могут выполнить, являются теми же самыми. Однако нельзя дать заключение об относительных частотах этих последовательностей действий. Иногда такое же действие в компоненте PEPA может привести к различным производным.

Отношение строгого биподобия не обязательно говорит что-нибудь об относительной частоте результатов действий, или даже оценке перехода между производными.

Например, рассмотрим простые компоненты на рис. 2. Для того чтобы проверить отношение  $R\{(P, Q), (P', Q')\}$  строгого бимоделирования, полагая  $a = (\alpha, r_\alpha)$  и  $b = (\beta, r_\beta)$ ,

$$r_\gamma(P) = \begin{cases} 3r_\alpha & \gamma = \alpha \\ 0 & \gamma \neq \alpha \end{cases} = r_\lambda(Q)$$

$$r_\gamma(P') = \begin{cases} r_\beta & \gamma = \beta \\ 0 & \gamma \neq \beta \end{cases} = r_\lambda(Q')$$

и соответствия действий в парах:

$$\begin{array}{lll} \left\{ \begin{array}{l} P \xrightarrow{a} P \\ Q \xrightarrow{a} Q \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} P \xrightarrow{a} P' \\ Q \xrightarrow{a} Q' \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} P' \xrightarrow{b} P \\ Q' \xrightarrow{b} Q \end{array} \right\} \end{array}$$

Рассмотрим оценки перехода между производными  $P$  и  $Q$  соответственно:

$$\begin{array}{lll} q(P, P) = 2r_a & q(P, P') = r_a & q(P', P) = r_b \\ q(Q, Q) = r_a & q(Q, Q') = 2r_a & q(Q', Q) = r_b \end{array}$$

$\stackrel{\text{def}}{=} P = a.P + a.P + a.P'$	$\stackrel{\text{def}}{=} Q = a.Q + a.Q' + a.Q'$
$\stackrel{\text{def}}{=} P' = b.P$	$\stackrel{\text{def}}{=} Q' = b.Q$

Рис. 2 : Строгое бигомотетичные компоненты с различными оценками перехода.

В терминах компонент систем  $Sys_P$  и  $Sys_Q$  это показывает, что продолжительное наблюдение этих двух систем должно различать их, так как  $\beta$  действия происходят в  $Sys_P$  менее часто.

Множественные случаи действий того же самого типа могут возникнуть в компонентах PEPA двумя способами. Во-первых, у смоделированной компоненты системы может быть неоднократная

способность выполнять соответствующее действие. Например, если компонента – кооперация двух идентичных компонент и тип действия не принадлежит множеству кооперации, тогда существуют два различных пути, по которым действие может быть представлено как два отдельных действия. Во-вторых, у действия в компоненте системы может быть больше чем один возможный вариант. В этом случае компонента PEPA представляет собой единственное действие в системе нескольких действий, каждое из которых с соответствующим типом и оценкой действий, для того чтобы определить вероятность результата. Отметим, что это имеет место во втором случае, когда результаты равновероятны. Множественные представления того же самого действия будут рассмотрены как многочисленные случаи этого действия в компоненте PEPA. Это может произойти в любых типовых комбинациях PEPA.

В строго бигомотетичных компонентах все действия происходят с той же самой кратностью, а рассогласование оценок перехода может произойти только тогда, когда появляется более чем одна производная, получающаяся от данного действия. По крайней мере, для одной из таких производных рассогласование оценок перехода достигается при более чем одном случае действий. В двух строго бигомотетичных компонентах эта способность к выполнению действий приводит к различным производным, отличающимся оценками переходов.

Таким образом, очевидно, что это определение строгого биподобия не гарантирует того, что компоненты при экспериментировании неразличимы. С другой стороны, если можно гарантировать, что этого не происходит, то отношение гарантирует то же самое поведение компонент. Метод упрощения модели изложен в общих чертах в [1,11-14].

## § 5. Строгое биподобие и марковский процесс

В этом разделе исследуем в перспективе отношение строгого биподобия и основного марковского процесса, как эквивалентность от модели к модели, так и как эквивалентность от состояния к состоянию.

В частности, отметим, что отношение  $P \propto Q$  отражает марковские процессы, полученные для  $P$  и  $Q$ . Рассмотрено индуцированное разделение для  $\propto$  на пространстве состояний модели, но установлено, что вообще говоря, нет оснований для точного агрегирования.

Как показано в [1,9,10], два марковских процесса эквивалентны, если они имеют одно и то же число состояний и с теми же оценками перехода между состояниями. В отличие от этого изоморфные компоненты и строго бигомотетичные компоненты не всегда будут эквивалентны

марковскому процессу. Например, пусть компоненты  $A$  и  $B$  представлены на рис. 1, а строгое бимоделирование уравнением (2). Здесь  $A$  и  $B$  не могут быть изоморфными, потому что у производных множеств нет равного числа элементов, соответствующие марковские процессы не могут быть эквивалентными, поскольку у них нет того же самого числа состояний.

Иногда полезно рассматривать более слабую форму эквивалентности между марковским процессом, а именно, эквивалентность укрупнения.

**Определение 5.** Два марковских процесса,  $\{X_i\}$  и  $\{Y_j\}$ , являются укрупненным эквивалентом, если найдутся укрупненное разделение  $\{X_i\}$ ,  $\{X_{[l]}\}$ , и укрупненное разделение  $\{Y_j\}$ ,  $\{Y_{[l]}\}$  такие, что существует инъективная функция  $f$ , которая удовлетворяет условию

$$q(X_{[k]}, X_{[l]}) = q(Y_{f([k])}, Y_{f([l])}).$$

Таким образом, два марковских процесса имеют эквивалентное укрупнение, если у них существует укрупненное разделение с тем же числом элементов, а также найдется взаимно-однозначное соответствие между разделениями, которое соответствует присоединенным оценкам перехода между разделениями. Отметим, что для любого процесса найдется тривиальное разделение укрупнения, которое формирует собственное разделение для каждого состояния. Отметим, что не рассматривается вырожденное разделение, в котором присутствуют все состояния, формирующие единственное разделение.

Если рассматривать строгое бигомотетичные компоненты  $A$  и  $B$ , представленные на рис. 1, то можно видеть, что состояния, соответствующие  $B_0$  и  $B_2$ , а также  $B_1$  и  $B_2$ , могут быть объединены в сформированное укрупненное разделение основного пространства состояний. Кроме того, использование этого разделения и тривиального разделения  $A$  доказывает, что марковские процессы, лежащие в основе  $A$  и  $B$ , являются укрупненным эквивалентом.

Однако, строгое биподобие не предполагает более слабую форму эквивалентности между соответствующими марковскими процессами. Например, если считать  $P$  и  $Q$  основными компонентами пространства состояний, представленных на рис. 2, единственным возможным разделением, а именно, тривиальным или вырожденным. Так как оценки перехода между строгое бигомотетичными производными множествами различны, то из этого следует, что марковские процессы могут не быть укрупненным эквивалентом.

Отметим, что из существования строгое биподобия между компонентами не следует, что можно установить какое-либо отношение между соответствующими марковскими процессами.

Строгое биподобие есть отношение эквива-

лентности на множестве всех компонент и также индуцирует отношение эквивалентности по производному множеству любой компоненты. Рассмотрим, какое отношение имеет строгое биподобие между производными отдельной компоненты к структуре марковского процесса, генерированного для компонент. Исследуем строгое биподобие как эквивалентность от состояния к состоянию, считаем, что разделение индуцировано для  $\infty$  по производному множеству компонент. Если разделение укрупненное, то агрегированный процесс будет марковским процессом.

$\stackrel{\text{def}}{=}$	$C_0 = a.C_1 + a.C_2$
$\stackrel{\text{def}}{=}$	$C_1 = b.C_1 + b.C_3 + b.C_4$
$\stackrel{\text{def}}{=}$	$C_2 = b.C_2 + b.C_3 + b.C_4$
$\stackrel{\text{def}}{=}$	$C_3 = c.C_0$
$\stackrel{\text{def}}{=}$	$C_4 = c.C_0$

Рис. 3: Пример индуцирования с помощью  $\infty$  неукрупненного разделения.

Если для каких-нибудь двух состояний из разбиения существует укрупненное разделение, то их классифицируют по любому другому классу разделения агрегированной оценкой перехода

Отметим, что строгое биподобие между компонентами не гарантирует еще, что оценки перехода соответствуют производным множествам. Строго бигомотетичные компоненты из производного множества будут элементами из того же класса разделения индуцированы с помощью  $\infty$ .

Из этого следует, что возможно сформировать такое разделение, что элементы из того же класса имеют различные оценки перехода из других классов разделения. Например, рассмотрим компоненту  $C$ , представленную на рис. 3. Разделяя производное множество с помощью  $\infty$ , получаем следующее разделение:  $C_{[0]} = \{C_0\}$ ,  $C_{[1]} = \{C_1, C_2\}$ ,  $C_2 = \{C_3, C_4\}$ .

Пусть имеем неукрупненное разделение

$$q(C_1, C_{[2]}) = q(C_1, C_3) + q(C_1, C_4) = 2r_b,$$

$$q(C_2, C_{[2]}) = q(C_2, C_3) + q(C_2, C_4) = r_b.$$

Из этого следует, что для формирования укрупненного разделения на пространстве состояний компонент  $\infty$  не может быть использован. Разделение, сформированное с помощью  $\infty$  на пространстве состояний модели, может использовано для агрегирования. Для того чтобы вычислить условную вероятность любого из состояний для каждого разделения прежде должен быть использован некоторый метод формирования агрегированного процесса.

Рассмотрим, существует ли эквивалентность

между основными марковскими процессами и строгом биподобии, что соответствует передаче компонент в систему PEPA.

Компонента PEPA содержит информацию о типах воздействия на действия так же как оценку самих действий. Таким образом, всегда будет потеря информации при переходе от компоненты PEPA к основному марковскому процессу. Построим не строго бигомотетичные компоненты, которые генерируют тот же самый марковский процесс.

Например, рассмотрим такие  $T_1$  и  $T_2$ , что

$$T_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\text{task}_1, r)T_1, \quad T_2 \stackrel{\text{def}}{=} (\text{task}_2, r)T_2.$$

$T_1$  и  $T_2$  генерируют марковский процесс, хотя они не строго бигомотетичны, они не даже изоморфны. Так же можно построить процессы, которые воспроизводят укрупнение эквивалентных марковских процессов, но, тем не менее, они не строго бигомотетичны.

Расширение марковского процесса, начиная с более чем с одного действия, не решает задачу представления в компоненте системы PEPA. Отмеченный для всех типов действий переход может быть представлен как единый переход в отмеченном марковском процессе. Отметим, что определение эквивалентного расширения марковского процесса и определение укрупненного эквивалента расширенного марковского процесса есть результат применения не строго бигомотетичных компонент. Пусть компоненты  $X$  и  $Y$  представлены на рис. 4. Здесь  $X$  и  $Y$  генерируют эквивалентные расширенные марковские процессы, но между ними нет никакого строгого бимоделирования.

Следовательно, эквивалентность между марковскими процессами, даже если они расширены для всех типов действий, не позволяет сделать вывод о строгом бимоделировании между соответствующими компонентами. Строгое биподобие, вообще говоря, не предоставляет достаточно полную информацию о вероятностном поведении компонент основных марковских процессов для получения любых отношений между ними.

## § 6. Упрощение модели с помощью строгого биподобия

Используем строгое биподобие для упрощения модели.

$\stackrel{\text{def}}{=} (\alpha,$	$\stackrel{\text{def}}{=} (\alpha,$
$\stackrel{\text{def}}{=} (\gamma, t$	$\stackrel{\text{def}}{=} (\gamma, t$

Рис. 4: Компоненты, реализующие один и тот же марковский процесс.

Как показано в §4, одного строгого биподобия недостаточно, для того чтобы гарантировать то же самое поведение компонент в течение длительного времени. Укажем простое дополнительное условие, гарантирующее неизменность поведения компонент в задаче с оценками перехода. Подход к упрощению модели основан на строгом биподобии. Это условие описано в пункте 6.1 и проиллюстрировано в пункте 6.2.

В §4 было отмечено, что рассогласование оценки перехода в строго бигомотетичной компоненте может произойти только тогда, когда, по крайней мере, в одной из компонент для некоторого действия  $a$ , найдется более чем одна  $a$ -производная. И, кроме того, для каждой из производных найдется по крайней мере более чем одно  $a$  действие. Различные оценки перехода происходят только потому, что во многих случаях появляются компоненты с различными производными множествами.

Таким образом, видим, что если две строго бигомотетичные компоненты удовлетворяют следующему условию (Условие 1), то относительное число частот последовательностей действий для этих компонент будет тем же самым.

**Условие 1.** Пусть  $P$  удовлетворяет условию, что если для всех  $P' \in ds(P)$  и для всех  $a \in Act(P')$ , то

1) найдется только одна  $a$ -производная  $P'$ ; или

2) найдется только одно действие  $a$ , соответствующее  $a$ -производной  $P'$ .

Если две компоненты строго бигомотетичны и обе удовлетворяют условию 1, то оценки перехода для производных, которые тоже являются строго бигомотетичными, для этих двух компонент будут теми же самыми. Из этого следует, что вероятностное поведение двух компонент будет тем же самым. В частности, относительная частота последовательностей действий будет соответствовать этим двум компонентам.

### 6.1 Метод упрощения модели

Предлагаемый подход к упрощению модели включает в себя замену компоненты высшего уровня в модели PEPA на другую компоненту, у которой найдется меньшее производное множество, но с эквивалентным поведением.

$$\begin{aligned} Node_{j_0} &\stackrel{\text{def}}{=} (in, \lambda).Node_{j_1} + (walk\_E_j, \perp).Node_{j_0} \\ &\qquad\qquad\qquad \text{для } 1 \leq j \leq N \\ Node_{j_1} &\stackrel{\text{def}}{=} (walk\_F_j, \perp).Node_{j_2} \\ Node_{j_2} &\stackrel{\text{def}}{=} (serve_j, \mu_j).Node_{j_0} + (walk\_E_j, \perp).Node_{j_2}, \\ \text{где} \qquad \mu_j &= \begin{cases} \mu & \text{если } j = 1 \\ t\mu & \text{если } 1 < j \leq N \end{cases} \end{aligned}$$

Как показано в §4, одного строгого биподобия недостаточно, для того чтобы гарантировать то же самое поведение компонент в течение длительного времени. Укажем простое дополнительное условие, гарантирующее неизменность поведения компонент в задаче с оценками перехода. Подход к упрощению модели основан на строгом биподобии. Это условие описано в пункте 6.1 и проиллюстрировано в пункте 6.2.

В §4 было отмечено, что рассогласование оценки перехода в строго бигомотетичной компоненте может произойти только тогда, когда, по крайней мере, в одной из компонент для некоторого действия  $a$ , найдется более чем одна  $a$ -производная. И, кроме того, для каждой из производных найдется по крайней мере более чем одно  $a$  действие. Различные оценки перехода происходят только потому, что во многих случаях появляются компоненты с различными производными множествами.

Таким образом, видим, что если две строго бигомотетичные компоненты удовлетворяют следующему условию (Условие 1), то относительное число частот последовательностей действий для этих компонент будет тем же самым.

**Условие 1.** Пусть  $P$  удовлетворяет условию, что если для всех  $P' \in ds(P)$  и для всех

$a \in Act(P')$ , то

1) найдется только одна  $a$ -производная  $P'$ ; или

2) найдется только одно действие  $a$ , соответствующее  $a$ -производной  $P'$ .

Если две компоненты строго бигомотетичны и обе удовлетворяют условию 1, то оценки перехода для производных, которые тоже являются строго бигомотетичными, для этих двух компонент будут теми же самыми. Из этого следует, что вероятностное поведение двух компонент будет тем же самым. В частности, относительная частота последовательностей действий будет соответствовать этим двум компонентам.

### 6.1 Метод упрощения модели

Предлагаемый подход к упрощению модели включает в себя замену компоненты высшего уровня в модели PEPA на другую компоненту, у которой найдется меньшее производное множество, но с эквивалентным поведением.

$$\begin{aligned} Node_{j_0} &\stackrel{\text{def}}{=} (in, \lambda).Node_{j_1} + (walk\_E_j, \perp).Node_{j_0} \\ &\qquad\qquad\qquad \text{для } 1 \leq j \leq N \\ Node_{j_1} &\stackrel{\text{def}}{=} (walk\_F_j, \perp).Node_{j_2} \\ Node_{j_2} &\stackrel{\text{def}}{=} (serve_j, \mu_j).Node_{j_0} + (walk\_E_j, \perp).Node_{j_2}, \\ \text{где} \qquad \mu_j &= \begin{cases} \mu & \text{если } j = 1 \\ t\mu & \text{если } 1 < j \leq N \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_j &\stackrel{\text{def}}{=} (\text{walk\_} F_j, \omega)(\text{serve}_j, \perp) S_{j+1} + (\text{walk\_} E_j, \omega) S_{j+1} \\
&\quad \text{где } j+1=1 \quad \text{когда } j=N \\
\text{Когда } N=4: \\
A'_{\text{sym}} &\stackrel{\text{def}}{=} (\text{Node}_{10} \parallel \text{Node}_{20} \parallel \text{Node}_{30} \parallel \text{Node}_{40}) \underset{\{\text{walk\_} F_j,}{\parallel} \underset{\text{walk\_} E_j, \text{serve}_j\}}{(\text{S}_1 \parallel \text{S}_1)} \\
SS_{\{i,j\}} &\stackrel{\text{def}}{=} (\text{walk\_} F_i, \omega) SS_{\{i+1,j\}} + (\text{walk\_} E_i, \omega) SS_{\{i+1,j\}} \\
&+ (\text{walk\_} F_i, \omega) SS_{\{i,j+1\}} + (\text{walk\_} E_i, \omega) SS_{\{i,j+1\}} \\
SS_{\{i+1,j\}} &\stackrel{\text{def}}{=} (\text{serve}_i, \perp) SS_{\{i+1,j\}} + (\text{walk\_} E_j, \omega) SS_{\{i+1,j+1\}} \\
&+ (\text{walk\_} F_j, \omega) SS_{\{i+1,j+1\}} \\
SS_{\{i,j+1\}} &\stackrel{\text{def}}{=} (\text{walk\_} E_i, \omega) SS_{\{i+1,j+1\}} \\
&+ (\text{walk\_} F_i, \omega) SS_{\{i+1,j+1\}} + (\text{serve}_j, \perp) SS_{\{i,j+1\}} \\
SS_{\{i+1,j+1\}} &\stackrel{\text{def}}{=} (\text{serve}_i, \perp) SS_{\{i+1,j+1\}} + (\text{serve}_j, \perp) SS_{\{i+1,j+1\}} \\
&\quad \text{где } j+1=1 \quad \text{когда } j=N \text{ и } j+1=1 \quad \text{когда } i=N \\
\text{Когда } N=4: \\
A'_{\text{sym}} &\stackrel{\text{def}}{=} (\text{Node}_{10} \parallel \text{Node}_{20} \parallel \text{Node}_{30} \parallel \text{Node}_{40}) \underset{\{\text{walk\_} F_j,}{\parallel} \underset{\text{walk\_} E_j, \text{serve}_j\}}{(\text{S}_1 \parallel \text{S}_1)} \times \\
&\times SS_{\{1,1\}} \quad \text{для } 1 \leq j \leq 4
\end{aligned}$$

Рис. 5: Оригинальная и измененная PEPA модель асимметричной системы MSMQ с четырьмя узлами.

Компонента замены должна быть строго бигометрической к оригиналу компоненты, и обе компоненты должны удовлетворять условию 1.

Пусть  $\propto$  соответствие измененной модели строго бигометрической по отношению к оригинальной модели. Итак, если оригинальная модель сделана, то измененная модель удовлетворяет условию 1. Таким образом, сохранено поведение модели и найдено альтернативное представление системы.

Так как действия этих двух моделей одинаковы, то структура будет незатронутой. Таким образом, изменение модели не может увеличить размерность пространства состояний основного марковского процесса.

Таким образом, модель может быть построена простым способом с каждой из компонент модели, представленной явно [1,2]. Это могло бы привести к  $a$ -модели, имеющей большое пространство состояний.

Заменить часть компонент модели и упростить пространство состояний возможно используя этот подход.

## 6.2 Упрощение модели MSMQ, использующей

### строгое биподобие

Проиллюстрируем подход, описанный в общих чертах в предыдущем разделе, используя одно исследование случая асимметричной системы MSMQ [1,2]. Упростив пространство состояний основного марковского процесса, найдем более простую строго бигометрическую замену компонент, представляющих два обслуживающих устройства системы. Оригинальная и измененная PEPA модели системы представлены на рис. 5.

В оригинальной модели каждое обслуживающее устройство смоделировано явно, в виде компоненты  $S_j$ .

$$S_j \stackrel{\text{def}}{=} (\text{walk\_} F_j, \omega)(\text{serve}_j, \perp) S_{j+1} + (\text{walk\_} E_j, \omega) S_{j+1}.$$

Эти два обслуживающих устройства в системе представлены как компоненты высокого уровня, являющиеся параллельной комбинацией двух таких компонент:  $S_1 \parallel S_1$ . Именно эти компоненты высокого уровня заменяем. Используем тот факт, что могут предпринять действия комбинации двух обслуживающих устройств. Определено местонахождение этих двух обслуживающих устройств, но не известно местоположение каждого из них. Заменяем  $S_i \parallel S_j$  одной компонентой  $SS_{\{i,j\}}$  определенной следующим образом:

$$SS_{\{i,j\}} \stackrel{\text{def}}{=} (\text{walk\_} F_i, \omega) SS_{\{i+1,j\}} + (\text{walk\_} E_j, \omega) SS_{\{i+1,j\}} +$$

$$(\text{walk\_} F_i, \omega) SS_{\{i,j+1\}} + (\text{walk\_} E_j, \omega) SS_{\{i,j+1\}}$$

$$SS_{\{i+1,j\}} \stackrel{\text{def}}{=} (\text{serve}_i, \perp) SS_{\{i+1,j\}} + (\text{walk\_} E_j, \omega) SS_{\{i+1,j+1\}} + (\text{walk\_} F_j, \omega) SS_{\{i+1,j+1\}}$$

$$SS_{\{i,j+1\}} \stackrel{\text{def}}{=} (\text{walk\_} E_i, \omega) SS_{\{i+1,j+1\}} + (\text{walk\_} F_i, \omega) SS_{\{i+1,j+1\}} + (\text{serve}_j, \perp) SS_{\{i,j+1\}}$$

$$SS_{\{i+1,j+1\}} \stackrel{\text{def}}{=} (\text{serve}_i, \perp) SS_{\{i+1,j+1\}} + (\text{serve}_j, \perp) SS_{\{i+1,j+1\}}$$

Компонента  $SS_{\{i,j\}}$  кажется на первый взгляд более сложной, чем  $S_i \parallel S_j$ , но, тем не менее, она генерирует меньшее производное множество.

Например, в случае  $N = 4$ , производное множество  $S_1 \parallel S_1$  состоит из 64 элементов, из которых 56 элементов принадлежат производному множеству  $A_{\text{sym}}$ . Представлены не все производные, например,  $(\text{serve}_1, \perp) S_2 \parallel (\text{serve}_1, \perp) S_2$ . Вопреки определению узла, такое производное множество  $A_{\text{sym}}$  должно иметь больше чем один элемент в узле 1.

Отметим, что  $SS_{\{1,1\}}$  содержит только 36 элементов, 32 из которых принадлежат производному множеству  $A_{sym}$ .

Рассмотрим отношение  $R$ ,

$$R = \left\{ \begin{array}{l} \left( (S_i \parallel S_j), SS_{\{i,j\}} \right) \left( (S_j \parallel S_i), SS_{\{i,j\}} \right), \\ \left( (serve_i, \perp), S_{i+1} \right) \left( (serve_j, \perp), S_{j+1} \right), SS_{\{i+1, j+1\}} \right\}, \\ \left( (serve_i, \perp), S_{i+1} \right) \left( S_j, SS_{\{i+1, j\}} \right) \\ \left( S_i, (serve_j, \perp), S_{j+1} \right) SS_{\{i, j+1\}} \end{array} \right\}, \quad 1 < i, j < N,$$

легко проверить, что оно есть строгое бимоделирование. Кроме того, легко видеть, что  $S_1 \parallel S_1$  и  $SS_{\{1,1\}}$  удовлетворяют условию 1.

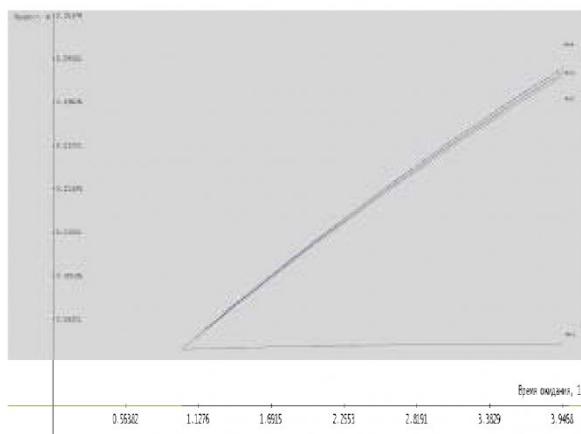


Рис.6. Зависимость прироста измененной и оригинальной асимметричной модели MSMQ от времени ожидания обслуживания в узле N

Таким образом, в модели асимметричной системы MSMQ заменяем  $(S_1 \parallel S_1)$  компонентой высокого уровня  $SS_{\{1,1\}}$ , для того чтобы сформировать измененную модель  $A'_{sym}$ . Из теоремы 3 следует, что  $A_{sym} \propto A'_{sym}$ .

$$A_{sym} \stackrel{\text{def}}{=} \left( N_1 \parallel \cdots \parallel N_N \right) \underset{\{walk\_F_j, walk\_E_j, serve_j\}}{\triangleright \triangleleft} (S_1 \parallel S_1)$$

$$A'_{sym} \stackrel{\text{def}}{=} \left( N_1 \parallel \cdots \parallel N_N \right) \underset{\{walk\_F_j, walk\_E_j, serve_j\}}{\triangleright \triangleleft} (SS_{\{1,1\}})$$

В [2] указано, что марковский процесс для модели  $A_{sym}$  с четырьмя узлами имеет 560 элементов в пространстве состояний. Измененная модель  $A'_{sym}$  при  $N=4$  имеет 312 элементов.

На основе выводов, полученных при анализе моделей, считаем, что критерии качества работы, остались теми же самыми, поскольку при упрощении структура моделей не затронута.

На рис. 6 представлена зависимость прироста измененной и оригинальной асим-

метричной модели MSMQ от времени ожидания обслуживания в узле N.

Математическая модель прироста измененной и оригинальной асимметричной модели MSMQ от времени ожидания обслуживания в узле N будет иметь следующий вид:

$$\text{при } N=1 \quad W = -8.875 * 10^{-5} t^2 + 0.000855t + 0.1856;$$

$$\text{при } N=2 \quad W = -0.00095t^2 + 0.02315t + 0.1642;$$

$$\text{при } N=3 \quad W = -0.00095t^2 + 0.0234t + 0.1639;$$

$$\text{при } N=4 \quad W = -0.001t^2 + 0.024t + 0.1635.$$

На рис.7 представлена зависимость прироста измененной и оригинальной асимметричной модели MSMQ как от времени ожидания обслуживания в узле N так и от номера узла N. Математическая модель прироста измененной и оригинальной асимметричной модели MSMQ как от времени ожидания обслуживания в узле N так и от номера узла N будет иметь следующий вид:

$$W = -(0.000149N^3 - 0.001326N^2 + 0.00379N - 0.002527)t^2 \\ + (0.003712N^3 - 0.03329N^2 + 0.09618N - 0.06574)t \\ - 0.003567N^3 + 0.03199N^2 - 0.09243N + 0.2496.$$

## Заключение

Анализ полученных на основе бимоделирования результатов показывает практические преимущества формирования моделей по сравнению с простыми системами. Определение строгого бимоделирования базируется на способности строго бигомотетичных компонент выполнять действия, приводящие к производным множествам. Эти производные множества в свою очередь сами строго бигомотетичны. Отношения между строгим биподобием и основным марковским процессом могут быть использованы как один из методов упрощения модели. При упрощении модели находят компоненты, которые выполняют одинаковые действия. Для гарантии поведения компонент проверяют, действительно ли является тем же самым. С точки зрения алгебры процесса, если для одной компоненты найдется меньшее производное множество, то она может заменить другую компоненту в модели и привести к пространству состояний основного марковского процесса.

Практическое применение данного подхода автоматического формирования модели с помощью строгого биподобия и строгого бимоделирования заключается в динамическом планировании задач в параллельных и распределенных приложениях.

Подобные автоматические подходы важны в системах, где модель должна обновляться постоянно и динамически в зависимости от текущего состояния ресурсов.

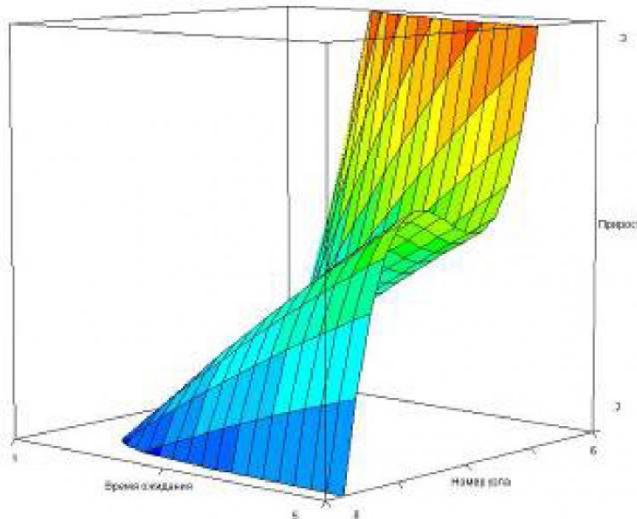


Рис.7. Зависимость прироста измененной и оригинальной асимметричной модели MSMQ от времени ожидания обслуживания и от номера узла N

Автоматический подход к формированию РЕРА-модели надёжности основан на применении строгого биподобия и строгого бимоделирования для смоделированных компонент системы.

Установлено, строгое бимоделирование является следствием отмеченного мультиперехода системы РЕРА.

Так как строгое биподобие есть отношение соответствия для систем РЕРА, то оно наиболее полно удовлетворяет условиям отношения строгого бимоделирования.

Использование строгого биподобия и строгого бимоделирования применено для упрощения пространства состояний одной из моделей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aldinucci M, Danelutto M. Algorithmic Skeletons Meeting Grids. // Parallel Computing, 32(7-8). 2006. p. 449–462.
2. Hillston J. A Compositional Approach to Performance Modelling. Cambridge University Press, 1996.
3. Сорокин А.С. Применение полумарковских процессов к определению характеристик надежности технологических схем. // Вестн. Кузбасского гос. тех. унив., 2005. № 1. С. 3 -9.
4. Сорокин А.С. Структурное моделирование надежности технологических систем с использованием скелетонов// Вестн. Кузбасского гос. тех. унив., 2008. № 4(68). С. 31-45.
5. Сорокин А.С. Математическое моделирование оценки надежности технологических систем// Вестн. Кузбасского гос. тех. унив., 2008. № 5(69). Кемерово, С. 28-37.
6. Сорокин А.С. Применение методов теории вероятностей к исследованию некоторых процессов производства. // Труды 4-ой междунар. Конф. Кибернетика и технологии XXI века. Воронеж, 2003. С. 312-323.
7. Сорокин А.С. Марковские процессы в теории надежности технологических систем гидродобычи угля // Вестн. Кузбасского гос. тех. унив., 2008. № 1. С. 61-69.
8. Коэн Дж., Боксма О. Границные задачи в теории массового обслуживания. М.: МИР, 1987.
9. Королюк В.С., Томусяк А.А. Описание функционирования резервированных систем посредством полумарковских процессов // Кибернетика, вып.5, 1965.
10. Баруча-Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их применение. Наука, М., 1969. 511C.
11. Сорокин А.С. Алгоритм решения систем уравнений Колмогорова (Оценка качества системы).//Вторая Всероссийская научная конф. Проектирование инженерных и научных приложений в среде MATLAB. М., 2004. С. 389 – 397.
12. Черчлин У., Акоф Л. Введение в исследование операций. М.: Наукова Думка, 1968.
13. Adian S.I. Defining Relations and Algorithmic Problems for Groups and Semigroups// Proc. Steklov Inst. Math. 1996. V.85.

14. Адян С.И. Оценка сложности вывода в одной системе подстановок // ДРАН , 2009. Т. 428, №3, С.295-299.

Автор статьи:

Сорокин  
Андрей Семенович  
- канд. физ.-мат.наук, доцент, ст.н.с.  
(филиал КузГТУ , г. Новокузнецк)  
тел.: 8(3843) 772459