

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

**УДК 517.54**

**А.С. Сорокин**

### **СПЕЦИАЛЬНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИЙ И ОДНОРОДНАЯ СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ПАРАМЕТРАМИ**

**Введение.** Начало теории краевых задач было положено в первом десятилетии прошлого столетия работами классиков математики Д. Гильбертом и А. Пуанкаре; и она была существенно продвинута трудами Ф. Нетера и Т. Карлемана. Последующий период развития этой теории почти целиком связан с трудами российских математиков. В работах С.Г.Михлина, И.И.Данилюка, В.Н.Монахова, И.Н.Векуа, Э.И.Зверовича, П.А. Крутицкого, Ф.Д. Гахова основное внимание уделено качественному исследованию решений краевых задач. Решение многих практически важных задач (например, смешанная задача аналитических функций для односвязных и двусвязных областей, задача Дирихле для плоскости со щелями) в работах Ф.Д.Гахова, Н.И.мусхелишвили, А.В.Бицадзе, Л.И. Седова, Г.М.Голузина, Л.А. Аксентьева, Л.Е. Дундученко даётся в замкнутой форме. Используя методы теории функций комплексного переменного, строится интегральное представление регулярной и однозначной в многосвязной круговой области функции, являющейся решением смешанной задачи аналитических функций в этой области, с явным заданием ядерных функций.

Указанные формулы, обобщающие формулу Шварца на случай конечносвязных круговых областей, представляет собой развитие и усиление результатов В.Н. Монахова [1] и П.А. Крутицкого [2,3].

В настоящей статье продолжаются исследования аналитических представлений решений краевых задач теории аналитических функций [4-7]. Целью данной работы является построение представления регулярной и однозначной в многосвязной круговой области функции, являющейся общим решением смешанной однородной краевой задачи с параметрами в классе Мусхелишвили  $h_0$  [5-11]. В связи с необходимостью преодоления эффектов многозначности, проявляющихся из-за многосвязности области, указываются дополнительные условия разрешимости задачи.

**1.Специальная система уравнений для функций  $\varphi_k(z)$ .** Пусть вещественные числа

$R_k > 0$  и комплексные числа  $a_k$  ( $a_0 = a_n = 0$ ,  $k = 0,1,..,n$ ) таковы, что выполняются неравенства

$$\left| a_k \right| < R_0 - R_k, \quad \left| a_k - a_j \right| > R_k - R_j, \\ k \neq j; \quad k=1,..,n \quad (1.1)$$

Рассмотрим область  $K$  в плоскости  $z$ , представляющую пересечение круга  $D_0 : |z| < R_0$ , с внешностью кругов  $D_k : |z - a_k| > R_k$ ,  $k = 0,1,..,n$ , где  $a_k$  и  $R_k$  удовлетворяют условиям (1.1), и называть её  $(n+1)$ -связной круговой областью. Пусть на границах компонентах  $C_k(\zeta) : |\zeta - a_k| = R_k$ ,  $k=0,1,..,n$ , заданы точки

$$a_{1,k}; b_{1,k}; a_{2,k}; b_{2,k}; \dots; a_{p_k,k}; b_{p_k,k} \quad (1.2)$$

расположенные в порядке записи.

Сформулируем смешанную краевую задачу для многосвязных круговых областей. Следуя Монахову [1, гл.1, §4, п.6], назовём ее задачей Р:

Нахождение аналитической внутри  $(n+1)$ -связной круговой области  $K$  функции  $f(z)$  по известным значениям её вещественной части  $f_k(\zeta)$  на дугах  $a_{j,k}; b_{j,k}$ ,  $j = 1,..,p_k$ , и по известным значениям её мнимой части  $g_k(\zeta)$  на дугах  $b_{j,k}; a_{j+1,k}$ ,  $j = 1,..,p_k$ ,  $a_{p_k+1,k} = a_{1,k}$  и

$$N = \sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^{p_k} (p_{j,k} + q_{j,k}) \text{ вещественных постоянных}$$

$$u_{j,k}^m, \quad m = 1,..,p_{j,k} \quad j = 1,..,p_k, \quad k = 0,1,..,n$$

и  $v_{j,k}^\mu$ ,  $\mu = 1,..,q_{j,k}$ ,  $j = 1,..,p_k$ ,  $k = 0,1,..,n$  свидём к решению специальных систем уравнений, используя представление функцию  $f(z)$  в виде [4]

$$f(z) = M + \sum_{k=0}^n \varphi_k(z), \quad (1.3)$$

где  $M$  - некоторая постоянная,  $\varphi_k(z)$  – регулярная функция в  $D_k$ ,  $k = 0,1,..,n$

Обозначим

$$G_k(z) = \prod_{j=1}^{p_k} \sqrt{(z - b_{j,k})/(z - a_{j,k})}, \quad k = 0,1,..,n \quad (1.4)$$

где рассматривается та ветвь корня, которая положительна на бесконечности.

Введем обозначения

$$\hat{f}_k(\zeta) = \begin{cases} \tilde{f}_k(\zeta) \text{ на дугах } L_k' = \bigcup_{j=1}^{p_k} (a_{j,k}; b_{j,k}), \\ i\tilde{g}_k(\zeta) \text{ на дугах } L_k'' = \bigcup_{j=1}^{p_k} (b_{j,k}; a_{j+1,k}), \end{cases} \quad j = 1, \dots, p_k; \quad k = 0, 1, \dots, n$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{f}_k(\zeta) &= \begin{cases} f_k(\zeta) \text{ на дугах } L_k' \setminus \bigcup_{j=1}^{p_k} L_{j,k}, \\ f_k(\zeta) + \ell^{a_k(\zeta)} u_{j,k}^m \text{ на дугах } L_{j,k} = \bigcup_{m=1}^{q_{j,k}} (\alpha_{j,k}^m, \beta_{j,k}^m) \subset L_k', \end{cases} \\ &\quad j = 1, \dots, p_k; \quad k = 0, 1, \dots, n, \\ \tilde{g}_k(\zeta) &= \begin{cases} g_k(\zeta) \text{ на дугах } L_k'' \setminus \bigcup_{j=1}^{p_k} L_{j,k}, \\ g_k(\zeta) + \ell^{a_k(\zeta)} v_{j,k}^\mu \text{ на дугах } L_{j,k} = \bigcup_{\mu=1}^{q_{j,k}} (\gamma_{j,k}^\mu, \beta_{j,k}^\mu) \subset L_k'', \end{cases} \\ &\quad j = 1, \dots, p_k; \quad k = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Функцию  $\lambda(\zeta) = \overline{G_k(\zeta)}$ ,  $\zeta \in C_k(\zeta)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  будем называть коэффициентом задачи Р.

Обозначим

$$\frac{1}{2\pi} \{\arg \lambda(\zeta)\}_{C_k(\zeta)} = \kappa_k, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (1.4*)$$

причем все кривые  $C_k(\zeta)$  обходятся в положительном направлении относительно области  $D_k$  (внутренние кривые  $C_k(\zeta)$  по часовой стрелке,

наружная - против). Величину  $\kappa = \sum_{k=0}^n \kappa_k$  назовём индексом задачи Р.

С целью более компактной записи  $N = \sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^{p_k} (p_{j,k} + q_{j,k})$  вещественных постоянных  $u_{j,k}^m$ ,  $m = 1, \dots, p_{j,k}$ ,  $j = 1, \dots, p_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  и  $v_{j,k}^\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, q_{j,k}$ ,  $j = 1, \dots, p_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  будем использовать постоянные  $w_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , связанные соотношением

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \Phi_{k,j}(z) w_j &\equiv \sum_{j=1}^{p_k} \sum_{m=1}^{p_{j,k}} \Phi_k(z, \alpha_{j,k}^m, \beta_{j,k}^m) u_{j,k}^m \\ &+ \sum_{j=1}^{p_k} \sum_{\mu=1}^{q_{j,k}} \Phi_k(z, \gamma_{j,k}^\mu, \delta_{j,k}^\mu) v_{j,k}^\mu, \end{aligned} \quad (1.4')$$

где

$$\Phi_k(z, \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi i} \int_{C_k(\zeta)} \frac{G_k(\zeta) h_k(\zeta, \alpha, \beta)}{\zeta - z} dz, \quad (1.5')$$

$$h_k(\zeta, \alpha, \beta) = \begin{cases} \ell^{a_k(\zeta)} \text{ на дугах } (\alpha, \beta) \subset C_k(\zeta), \\ 0 \quad \text{на дугах } C_k(\zeta) \setminus (\alpha, \beta). \end{cases}$$

Из формул (1.4) следует, что функции  $G_k(\zeta)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  на  $\gamma_k$ : на дугах  $a_{j,k}; b_{j,k}$ ,  $j = 1, \dots, p_k$ , принимает чисто мнимые значения.

В силу принятых обозначений на граничных компонентах  $G_k(\zeta)$  области  $K$  имеют место следующие соотношения

$$G_k(\zeta) f(\zeta) - \overline{G_k(\zeta) f(\zeta)} = 2G_k(\zeta) \hat{f}_k(\zeta), \quad \zeta \in C_k(\zeta), \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (1.5)$$

В дальнейшем нам потребуется

**Лемма 1.1.** Если  $\zeta \in C_k(\zeta)$ , то имеет место следующее соотношение

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2\pi i} d \ln(\zeta - A) \right) &= \frac{1}{2\pi i} d \ln(\zeta - a_k) \\ &- \frac{1}{2\pi i} d \ln(\zeta - \overline{L_k(A)}), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$L_k(\zeta) = \overline{a_k} + \frac{R_k^2}{\zeta - a_k}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (1.7)$$

Для доказательства леммы достаточно заметить, что для точек, лежащих на  $C_k(\zeta)$ , выполняется следующее тождество

$$\overline{\zeta} \equiv \overline{a_k} + \frac{R_k^2}{\zeta - a_k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Обратимся к выводу специальных систем уравнений для определения функций  $\varphi_k(z)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Умножим обе части равенства (1.5) на  $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$  и проинтегрируем произведение по  $C_m(\zeta)$ ,  $m = 0, 1, \dots, n$ , предполагая, что  $z \in K$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k(\zeta)} \frac{G_k(\zeta) f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k(\zeta)} \frac{\overline{G_k(\zeta) f(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta \\ = \hat{F}_k(z) + \sum_{j=1}^N \Phi_{k,j}(z) w_j, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$\hat{F}_k(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{C_k(\zeta)} \frac{G_k(\zeta) \hat{f}_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (1.9)$$

Применяя ко второму интегралу в формуле (1.8) лемму 1.1 имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k(\zeta)} \frac{G_k(\zeta) f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k(\zeta)} \frac{\overline{G_k(\zeta) f(\zeta)}}{\zeta - a_k} d\zeta$$

$$+\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k(\zeta)} \frac{\overline{G_k(\zeta)f(\zeta)}}{\zeta - L_k(z)} d\zeta = \hat{F}_k(z) + \sum_{j=1}^N \Phi_{k,j}(z) w_j \quad (1.10)$$

Затем в полученном равенстве (1.10) заменим  $f(z)$  по формуле (1.3) и, преобразовав результат с помощью формул Коши и (1.7), придём к следующим соотношениям:

В случае  $k=0$

$$G_0(z)M + G_0(z)\varphi_0(z) - \overline{M}G_0(0) \\ - \sum_{p=1}^n \overline{G_0}L_0(z)\overline{\varphi_p}L_0(z) = \hat{F}_0(z) + \sum_{j=1}^N \Phi_{0,j}(z)w_j. \quad (1.11)$$

В случае  $k \neq 0$

$$-G_k(z)\varphi_k(z) - \overline{MG_k(a_k)} - \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq k}}^n \overline{G_k(a_k)}\overline{\varphi_p(a_k)} \\ + \overline{MG_k}L_k(z) + \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq k}}^n \overline{G_k}L_k(z)\overline{\varphi_p}L_k(z) = \hat{F}_k(z) \\ + \sum_{j=1}^N \Phi_{k,j}(z)w_j, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.12)$$

В формулах (1.11) и (1.12) под  $\varphi_k \overline{L_m}(z)$  понимается суперпозиция функций  $\varphi_k(t)$  и  $t = \overline{L_m}(z) \equiv \overline{L_m(z)}$ ; так же следует в дальнейшем понимать символы  $\overline{L_k}L_m(z)$ ,  $\hat{\psi}_p \overline{L_k}(z)$ ,  $\hat{\psi}_p \overline{L_k}L_m(z)$ .

Полагая в (1.11)  $z=0$  и в (1.12)  $z=\infty$ , с учётом  $\varphi_0(0)=0$  и  $\varphi_p(\infty)=0$ ,  $p=1, \dots, n$ , получаем соответственно

$$G_0(0)M - \overline{MG_0}(0) = \hat{F}_0(0) + \sum_{j=1}^N \Phi_{0,j}(0)w_j \quad (1.13)$$

$$-\overline{MG_k(a_k)} - \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq k}}^n \overline{G_k(a_k)}\overline{\varphi_p(a_k)} + \overline{MG_k}L_k(\infty) \\ + \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq k}}^n \overline{G_k}L_k(\infty)\overline{\varphi_p}L_k(\infty) = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.14)$$

Заметим, что соотношение (1.14) является тождеством. Тогда с помощью (1.13) система (1.11) и (1.12) принимает вид

$$G_0(z)\varphi_0(z) - \sum_{p=1}^n [\overline{G_0}L_0(z)\overline{\varphi_p}L_0(z)]_0^z = \\ \left[ \hat{F}_0(z) + \sum_{j=1}^N \Phi_{0,j}(z)w_j - G_0(0)M \right]_0^z, \quad (1.15)$$

$$\left. G_k(z)\varphi_k(z) - \overline{G_k}L_k(z)\sum_{\substack{p=0 \\ p \neq k}}^n \overline{\varphi_p}L_k(z) \right|_\infty^z = \\ \left[ \overline{MG_k}L_k(z) - \hat{F}_k(z) - \sum_{j=1}^N \Phi_{k,j}(z)w_j \right]_\infty^z, \\ k = 1, \dots, n. \quad (1.16)$$

Введём обозначения

$$A_k(z) = \frac{\overline{G_k}L_k(z)}{G_k(z)}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.16')$$

Тогда из (1.15) и (1.16) следует

$$\left. \varphi_0(z) - A_0(z)\sum_{p=1}^n \overline{\varphi_p}L_0(z) \right|_0^z = \frac{\hat{F}_0(z) - \hat{F}_0(0)}{G_0(z)} \\ + \frac{1}{G_0(z)} \sum_{j=1}^N [\Phi_{0,j}(z) - \Phi_{0,j}(0)]w_j + \left( \frac{G_0(0)}{G_0(z)} - 1 \right) M, \quad (1.17)$$

$$\left. \varphi_k(z) - A_k(z)\sum_{p=0 \\ p \neq k}^n \overline{\varphi_p}L_k(z) \right|_\infty^z = \\ \left( A_k(z) - \frac{\overline{G_k(a_k)}}{G_k(z)} \right) \overline{M} + \delta_k \frac{\hat{F}_k(z)}{G_k(z)} + \\ \frac{\delta_k}{G_k(z)} \sum_{j=1}^N \Phi_{0,j}(z)w_j, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.18)$$

Заметим, что правые части системы (1.17) – (1.18) есть линейные функции относительно  $M$ ,  $M$ ,  $w_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

Функции  $\varphi_k(z)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , будем отыскивать в виде суммы

$$\varphi_k(z) = M\varphi'_k(z) + \overline{M}\varphi''_k(z) + \hat{\varphi}_k(z) \\ + \sum_{j=1}^N w_j \tilde{\varphi}_{k,j}(z), \quad (1.19)$$

где  $\varphi'_k(z)$ ,  $\varphi''_k(z)$ ,  $\hat{\varphi}_k(z)$ ,  $\tilde{\varphi}_{k,j}(z)$ ,  $j = 1, \dots, N$  – регулярные функции в  $D_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Подставив (1.19) в (1.17) и (1.18) и приравняв коэффициенты при  $M$ ,  $\overline{M}$  и  $w_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , получим

$$\hat{\varphi}_k(z) - A_k(z)\sum_{\substack{p=0 \\ p \neq k}}^n \overline{\hat{\varphi}_p}L_k(z) \Big|_{b_k}^z = \Phi'_k(z), \\ k = 0, 1, \dots, n, \quad (1.20)$$

$$\varphi'_0(z) - A_0(z)\sum_{p=1}^n \overline{\varphi''_p}L_0(z) \Big|_{b_0}^z = G'_0(z), \quad (1.21)$$

$$\varphi_0''(z) - A_0(z) \sum_{p=1}^n \overline{\varphi_p'} L_0(z) \Big|_{b_0}^z = 0, \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \varphi_k'(z) - A_k(z) \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq k}}^n \overline{\varphi_p'} L_k(z) \Big|_{b_k}^z &= 0, \\ k &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} \varphi_k''(z) - A_k(z) \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq k}}^n \overline{\varphi_p''} L_k(z) \Big|_{b_k}^z &= G_k'(z), \\ k &= 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_{k,j}(z) - A_k(z) \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq k}}^n \overline{\widetilde{\varphi}_{p,j}} L_k(z) \Big|_{b_k}^z \\ = \frac{\delta_k}{G_k(z)} [\Phi_{k,j}(z) - \Phi_{k,j}(b_k)], \\ j = 1, \dots, N, \quad k = 0, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (1.20')$$

где

$$\Phi_k'(z) = \delta_k \frac{\hat{F}_k(z) - \hat{F}_k(0)}{G_k(z)}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (1.25)$$

$$G_0'(z) = \frac{G_0(0)}{G_0(z)} - 1, \quad (1.26)$$

$$G_k'(z) = A_k(z) - \frac{\overline{G_k(a_k)}}{G_k(z)}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.27)$$

При этом  $b_0 = 0$ ,  $b_k = \infty$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Пусть

$$\varphi_k^\oplus(z) = \varphi_k'(z) + \varphi_k''(z), \quad \varphi_k^\otimes(z) = \varphi_k'(z) - \varphi_k''(z), \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (1.28)$$

Из (1.21) - (1.24) с учётом (1.28) следует

$$\begin{aligned} \varphi_k^\oplus(z) - A_k(z) \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq k}}^n \overline{\varphi_p^\oplus} L_k(z) \Big|_{b_k}^z &= G_k'(z), \\ k &= 0, 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} \varphi_k^\otimes(z) + A_k(z) \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq k}}^n \overline{\varphi_p^\otimes} L_k(z) \Big|_{b_k}^z &= \delta_k G_k'(z), \\ k &= 0, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (1.30)$$

Таким образом, функции  $\varphi_k'(z)$  и  $\varphi_k''(z)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  определяются с помощью соотношений

$$\varphi_k'(z) = \frac{\varphi_k^\oplus(z) + \varphi_k^\otimes(z)}{2}, \quad (1.31)$$

$$\varphi_k''(z) = \frac{\varphi_k^\oplus(z) - \varphi_k^\otimes(z)}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (1.32)$$

## 2. Условия согласованности граничных

значений  $\hat{f}_k(\zeta)$  задачи Р.

Установим условия при которых поставленная выше задача Р имеет решение в классе однозначных функций.

В каждом дополнении многосвязной области  $K$  возьмём ровно по одной точке  $z_k^*$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $z_k^* \in CD_k$ .

Умножая обе части равенства (1.5) на  $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\zeta}{\zeta - z_k^*}$  и проинтегрируем произведение по  $C_k(\zeta)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , предполагая, что  $z_k^* \in CK$ .

Тогда с помощью леммы 1.1 получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k(\zeta)} \frac{G_k(\zeta) f(\zeta)}{\zeta - z_k^*} d\zeta \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k(\zeta)} \frac{G_k(\zeta) f(\zeta)}{\zeta - \alpha_k} d\zeta \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k(\zeta)} \frac{G_k(\zeta) f(\zeta)}{\zeta - \overline{L_k(z_k^*)}} d\zeta \\ &= \hat{F}_k(z_k^*) + \sum_{j=1}^N \Phi_{k,j}(z_k^*) w_j, \quad k = 0, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.1)$$

В соотношении (2.1) заменим  $f(\zeta)$  по формуле (1.3) и преобразовав результат с помощью формулы (1.7) и формулы Коши, получим:

В случае  $k=0$

$$\begin{aligned} &\overline{G_0} L_0(z_0^*) \overline{M} + \overline{G_0} L_0(z_0^*) \overline{\varphi_0} L_0(z_0^*) - \overline{MG_0}(0) \\ &- \sum_{p=1}^n G_0(z_0^*) \varphi_p(z_0^*) = \hat{F}_0(z_0^*) + \sum_{j=1}^N \Phi_{0,j}(z_0^*) w_j, \\ &z_0^* \in CD_0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В случае  $k \neq 0$

$$\begin{aligned} &MG_k(z_k^*) - \overline{MG_k(a_k)} + \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq k}}^n G_k(z_k^*) \varphi_p(z_k^*) \\ &+ \overline{MG_k} L_k(z_k^*) \\ &+ \sum_{p=0}^n [\overline{G_k} L_k(z_k^*) \overline{\varphi_p} L_k(z_k^*) - \overline{G_k(a_k)} \overline{\varphi_p(a_k)}] = \\ &\hat{F}_k(z_k^*) + \sum_{j=1}^N \Phi_{k,j}(z_k^*) w_j, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В частности, если точки выбраны следующим образом:  $z_0^* = \infty$ ,  $z_k^* = a_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , то соотношение (2.2) превращается в тождество, а формулы (2.3) принимают вид

$$MG_k(a_k) - \overline{MG_k(a_k)}$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq k}}^n [G_k(a_k) \varphi_p(a_k) - \overline{G_k(a_k)} \overline{\varphi_p(a_p)}] \\ &= \hat{F}_k(a_k) + \sum_{j=1}^N \Phi_{k,j}(a_k) w_j, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Введём обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_k &= \hat{F}_k(a_k) \\ &+ \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq k}}^n [\overline{G_k(a_k)} \hat{\varphi}_p(a_k) - G_k(a_k) \hat{\varphi}_p(a_k)], \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{k,j} &= -\Phi_{k,j}(a_k) \\ &+ \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq k}}^n [G_k(a_k) \varphi_{p,j}(a_k) - \overline{G_k(a_k)} \overline{\varphi_{p,j}(a_k)}], \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{k,N+1} &= G_k(a_k) - \overline{G_k(a_k)} \\ &+ \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq k}}^n [G_k(a_k) \varphi_p^\oplus(a_k) - \overline{G_k(a_k)} \overline{\varphi_p^\oplus(a_k)}], \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{k,N+2} &= i \left\{ G_k(a_k) - \overline{G_k(a_k)} \right. \\ &\left. + \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq k}}^n [G_k(a_k) \varphi_p^\otimes(a_k) - \overline{G_k(a_k)} \overline{\varphi_p^\otimes(a_k)}] \right\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из (1.13) и (2.4) с учётом (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) получаем систему уравнений относительно  $M$ ,  $\overline{M}$  и  $w_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ ,

$$\sum_{j=1}^N \tilde{\alpha}_{k,j} w_j + \tilde{\alpha}_{k,N+1} \operatorname{Re} M + \tilde{\alpha}_{k,N+2} \operatorname{Im} M = \tilde{\beta}_k, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (2.9)$$

Применяя к (2.9) метод кластерного агрегирования [12], основанный на объединении (агрегировании) отдельных уравнений системы (2.9) в отдельные группы (кластеры), сформируем два кластера:

$$-\sum_{j=1}^N \operatorname{Re} \Phi_{k,j}(a_k) w_j = \operatorname{Re} \hat{F}_k(a_k), \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,j} w_j + \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,N+1} \operatorname{Re} M \\ + \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,N+2} \operatorname{Im} M = \operatorname{Im} \tilde{\beta}_k, \quad k = 0, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.11)$$

Пусть  $rg$  - ранг системы (2.11).

Если  $rg=2$ , то правые части (2.11) связаны условиями совместности системы

$$\begin{vmatrix} \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,N+1} & \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,N+2} & \operatorname{Im} \tilde{\beta}_k - \sum_{j=1}^N \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,j} w_j \\ \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,N+1} & \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,N+2} & \operatorname{Im} \tilde{\beta}_m - \sum_{j=1}^N \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,j} w_j \\ \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{p,N+1} & \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{p,N+2} & \operatorname{Im} \tilde{\beta}_p - \sum_{j=1}^N \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{p,j} w_j \end{vmatrix} = 0,$$

$k \neq m \neq p; \quad k = 0, 1, \dots, n$

Раскрыв этот определитель по элементам последнего столбца, получаем  $n-1$  условий согласованности граничных значений

$\hat{f}_k(\zeta)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , в следующем виде

$$\begin{aligned} \Delta_{km} \left[ \operatorname{Im} \tilde{\beta}_p - \sum_{j=1}^N \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{p,j} w_j \right] \\ - \Delta_{kp} \left[ \operatorname{Im} \tilde{\beta}_m - \sum_{j=1}^N \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,j} w_j \right] \\ + \Delta_{pm} \left[ \operatorname{Im} \tilde{\beta}_k - \sum_{j=1}^N \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,j} w_j \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$k \neq m \neq p; \quad k = 0, 1, \dots, n$

где

$$\Delta_{mp} = \begin{vmatrix} \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,N+1} & \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,N+2} \\ \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{p,N+1} & \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{p,N+2} \end{vmatrix} \neq 0$$

есть основной определитель системы (2.11).

Преобразуем систему (2.12) к виду

$$\sum_{j=1}^N \Delta_{k,m,p}^j w_j = \Delta_{k,m,p}, \quad k \neq m \neq p; \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{k,m,p} &= \begin{vmatrix} \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,N+1} & \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,N+2} & \operatorname{Im} \tilde{\beta}_k \\ \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,N+1} & \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,N+2} & \operatorname{Im} \tilde{\beta}_m \\ \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{p,N+1} & \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{p,N+2} & \operatorname{Im} \tilde{\beta}_p \end{vmatrix}, \\ \Delta_{k,m,p}^j &= \begin{vmatrix} \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,N+1} & \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,N+2} & \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,j} \\ \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,N+1} & \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,N+2} & \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,j} \\ \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{p,N+1} & \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{p,N+2} & \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{p,j} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.13')$$

Решение системы (2.11) в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} M &= \frac{1}{\Delta_{mp}} \begin{vmatrix} \operatorname{Im} \tilde{\beta}_m & \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,N+2} \\ \operatorname{Im} \tilde{\beta}_p & \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{p,N+2} \end{vmatrix} \\ &\quad - \sum_{j=1}^N \frac{1}{\Delta_{mp}} \begin{vmatrix} \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,j} & \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,N+2} \\ \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{p,j} & \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{p,N+2} \end{vmatrix} w_j, \\ \operatorname{Im} M &= \frac{1}{\Delta_{mp}} \begin{vmatrix} \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,N+1} & \operatorname{Im} \tilde{\beta}_m \\ \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{p,N+1} & \operatorname{Im} \tilde{\beta}_p \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$-\sum_{j=1}^N \frac{1}{\Delta_{mp}} \begin{vmatrix} \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,N+1} & \operatorname{Im} \tilde{\beta}_m \\ \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{p,N+1} & \operatorname{Im} \tilde{\beta}_p \end{vmatrix} w_j, \quad m \neq p. \quad (2/14)$$

Если  $rg=1$ , то систему (2.11) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,N+1} \operatorname{Re} M &= \operatorname{Im} \tilde{\beta}_k - \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,N+2} \operatorname{Im} M \\ &- \sum_{j=1}^N \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,j} w_j, \quad k=0,1,..,n \end{aligned} \quad (2.15)$$

В этом случае имеем  $n$  условий совместности системы (2.15)

$$\begin{cases} \left| \begin{array}{cc} \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,N+1} & \operatorname{Im} \tilde{\beta}_k - \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,N+2} \operatorname{Im} M - \sum_{j=1}^N \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,j} w_j \\ \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,N+1} & \operatorname{Im} \tilde{\beta}_m - \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,N+2} \operatorname{Im} M - \sum_{j=1}^N \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,j} w_j \end{array} \right| = 0, \\ k \neq m; \quad k=0,1,..,n \end{cases}$$

Эти условия можно представить в виде

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,N+1} \left[ \operatorname{Im} \tilde{\beta}_m - \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,N+2} \operatorname{Im} M - \sum_{j=1}^N \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,j} w_j \right] \\ - \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,N+1} \left[ \operatorname{Im} \tilde{\beta}_k - \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,N+2} \operatorname{Im} M - \sum_{j=1}^N \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,j} w_j \right] = 0, \\ k \neq m; \quad k=0,1,..,n \end{cases} \quad (2.16)$$

Преобразуем систему (2.16) к виду

$$\sum_{j=1}^N \Delta_{k,m}^j w_j + \Delta_{k,m}^m \operatorname{Im} M = \Delta_{k,m}, \quad k \neq m; \\ k=0,1,..,n \quad (2.17)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{k,m} &= \begin{vmatrix} \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,N+1} & \operatorname{Im} \tilde{\beta}_k \\ \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,N+1} & \operatorname{Im} \tilde{\beta}_m \end{vmatrix}, \\ \Delta_{k,m}^m &= \begin{vmatrix} \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,N+1} & \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,N+2} \\ \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,N+1} & \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,N+2} \end{vmatrix}, \\ \Delta_{k,m}^j &= \begin{vmatrix} \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,N+1} & \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,j} \\ \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,N+1} & \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,j} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Имеет место

**Теорема 2.1.** Если ранг системы (2.9)  $rg=2$ , то для решения задачи Р должны выполняться  $2n$  условий

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N \Delta_{k,m,p}^j w_j = \Delta_{k,m,p}, \quad k \neq m \neq p; \quad k=0,1,..,n, \\ - \sum_{j=1}^N \operatorname{Re} \Phi_{k,j}(a_k) w_j = \operatorname{Re} \hat{F}_k(a_k), \quad k=0,1,..,n, \end{cases} \quad (2.18)$$

и кроме того,  $\operatorname{Re} M$  и  $\operatorname{Im} M$  в системе (1.17) – (1.18) вычисляются по формулам

$$\operatorname{Re} M = \frac{1}{\Delta_{mp}} \begin{vmatrix} \operatorname{Im} \tilde{\beta}_m & \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,N+2} \\ \operatorname{Im} \tilde{\beta}_p & \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{p,N+2} \end{vmatrix}$$

$$-\sum_{j=1}^N \frac{1}{\Delta_{mp}} \begin{vmatrix} \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,j} & \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,N+2} \\ \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{p,j} & \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{p,N+2} \end{vmatrix} w_j, \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} M &= \frac{1}{\Delta_{mp}} \begin{vmatrix} \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,N+1} & \operatorname{Im} \tilde{\beta}_m \\ \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{p,N+1} & \operatorname{Im} \tilde{\beta}_p \end{vmatrix} \\ &- \sum_{j=1}^N \frac{1}{\Delta_{mp}} \begin{vmatrix} \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,j} & \operatorname{Im} \tilde{\beta}_m \\ \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{p,j} & \operatorname{Im} \tilde{\beta}_p \end{vmatrix} w_j, \quad m \neq p. \end{aligned} \quad (2.20)$$

**Теорема 2.2.** Если ранг системы (2.9)  $rg=1$ , то для решения задачи Р должны выполняться  $2n+1$  условий

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N \Delta_{k,m}^j w_j + \Delta_{k,m}^m \operatorname{Im} M = \Delta_{k,m}, \quad k \neq m; \quad k=0,1,..,n, \\ - \sum_{j=1}^N \operatorname{Re} \Phi_{k,j}(a_k) w_j = \operatorname{Re} \hat{F}_k(a_k), \quad k=0,1,..,n, \end{cases} \quad (2.21)$$

и кроме того,  $\operatorname{Re} M$  в системе (1.17) – (1.18) вычисляются по формуле

$$\operatorname{Re} M = \frac{\operatorname{Im} \tilde{\beta}_m}{\operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,N+1}} - \frac{\operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,N+2}}{\operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{k,N+1}} \operatorname{Im} M - \sum_{j=1}^N \frac{\operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,j}}{\operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{m,N+1}} w_j. \quad (2.22)$$

Рассмотрим систему (2.18)  $2n$  уравнений с  $N$  неизвестными.

Из (2.18) следует, что матрица коэффициентов при неизвестных имеет вид

$$\begin{aligned} D_{2n}^N &= \begin{vmatrix} \Delta_{n-1}^N \\ \Delta_{n+1}^N \end{vmatrix}_{2n,N}, \quad \Delta_{n-1}^N = \left\| \Delta_{k,m,p}^j \right\|_{n-1,N}, \\ \Delta_{n+1}^N &= \left\| -\operatorname{Re} \Psi_{k,j}(a_k) \right\|_{n+1,N}. \end{aligned}$$

Пусть матрица коэффициентов в системе уравнений (2.18) имеет ранг  $r$ . Тогда надлежащей перестановкой уравнений и изменением нумерации неизвестных можно добиться, что миноры до  $r$ -го порядка включительно будут отличны от нуля. [14]. Имеет место неравенство

$$r \leq \min(2n, N). \quad (2.23)$$

Система линейных уравнений (2.18) относительно неизвестных  $w_j, j=1,..,N$ , в которой число уравнений  $2n$  меньше число неизвестных,  $2n < N$ , имеет решение. Обозначим базисные неизвестные  $\hat{w}_j, j=1,..,r$ , а свободные неизвестные  $w_j, j=r+1,..,N$ . Тогда общее решение системы (2.18) имеет вид

$$\hat{w}_p = \hat{\Delta}_p + \sum_{k=r+1}^N \hat{\Delta}_{p,k} \hat{w}_k, \quad p=1,..,r. \quad (2.24)$$

где коэффициенты  $\hat{\Delta}_p, \hat{\Delta}_{p,k}, k=r+1,..,N$ , определяются с учётом (2.13'), (2.4') , (1.5), (1.9) по известному алгоритму [13].

В случае, если  $r < 2n$ , то правые части (2.18)

$$f_j = \left\| \begin{array}{c} \Delta_{k,m,p} \\ \operatorname{Re} \hat{F}_k(a_k) \end{array} \right\|_{2n,1}, \quad j=1,\dots,2n, \quad (2.25)$$

подчинены  $2n - r$  условиям совместности

$$f_m = \sum_{k=1}^r \lambda_k^m f_k, \quad m=r+1,\dots,2n, \quad (2.26)$$

где  $\lambda_k^m$  некоторые величины.

Покажем, что система (2.18) совместна.

Определитель  $r_0$ -го порядка, где  $r_0 = \min(2n, N)$ , составленный из коэффициентов при неизвестных:

$$D = \left| D_{r_0} \right| = \begin{vmatrix} \Delta_{n-1}^N \\ \Delta_{n+1}^N \end{vmatrix}_{r_0, r_0} \neq 0. \quad (2.27)$$

Предположим противное. Пусть промежутки

$$L_{j,k} = \bigcup_{m=1}^{p_{j,k}} (\alpha_{j,k}^m, \beta_{j,k}^m) \text{ оказались выбранными так,}$$

что

$$D = \left| D_{r_0} \right| = \begin{vmatrix} \Delta_{n-1}^N \\ \Delta_{n+1}^N \end{vmatrix}_{r_0, r_0} = 0. \quad (2.28)$$

Тогда изменив величины  $\alpha_{j,k}^m$  и  $\beta_{j,k}^m$  на  $\varepsilon$ , получим определитель  $D(\varepsilon)$ , который получится из  $D$ , если к каждому его элементу прибавим одно и тоже число  $\varepsilon$ .

Этот определитель  $D(\varepsilon)$  равен сумме определителей, которые получаются, если во всех столбцах оставить только первые слагаемые, или в одном каком-нибудь столбце оставить только вторые слагаемые, а во всех остальных только первые, или в двух каких-нибудь столбцах оставить только вторые, а в остальных первые слагаемые, и т.д. Определитель, составленный из первых слагаемых каждого элемента в  $D(\varepsilon)$ , равен  $D$ . В результате указанных преобразований получим [15, гл. 1, §1, п.4]

$$D(\varepsilon) = D + \varepsilon \sum_{i=1}^{r_0} \sum_{j=1}^{r_0} \alpha_{i,j}, \quad (2.29)$$

где  $\alpha_{i,j}$  обозначает алгебраическое дополнение элемента  $a_{i,j}$  в определителе  $D$ .

Следовательно, система (2.18) имеет решение.

Имеет место

**Теорема 2.3.** Если ранг системы (2.18)  $r$ , то общее ее решение имеет вид

$$\hat{w}_p = \hat{\Delta}_p + \sum_{k=r+1}^N \hat{\Delta}_{p,k} \hat{w}_k, \quad p=1,\dots,r, \quad (2.30)$$

и  $\operatorname{Re} M$  и  $\operatorname{Im} M$  в (1.17) – (1.18) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} M &= \hat{\Delta}_0^R + \sum_{k=r+1}^N \hat{\Delta}_{0,k}^R \hat{w}_k, \\ \operatorname{Im} M &= \hat{\Delta}_0^I + \sum_{k=r+1}^N \hat{\Delta}_{0,k}^I \hat{w}_k, \end{aligned} \quad (2.31)$$

где коэффициенты  $\hat{\Delta}_0^R, \hat{\Delta}_0^I$ , и

$\hat{\Delta}_{0,k}^R, \hat{\Delta}_{0,k}^I, \hat{\Delta}_p^R, \hat{\Delta}_{p,k}^R, k=r+1,\dots,N$ , определяются с учётом (2.13'), (2.4'), (1.5), (1.9), по известному алгоритму [13].

Аналогично, для системы (2.21) имеет место

**Теорема 2.4.** Если ранг системы (2.21)  $r$ , то общее решение системы (2.21) имеет вид

$$\hat{w}_p = \tilde{\Delta}_p + \sum_{k=r+1}^N \tilde{\Delta}_{p,k} \hat{w}_k + \tilde{\Delta}_{0,p}^I \operatorname{Im} M, \quad p=1,\dots,r, \quad (2.32)$$

И  $\operatorname{Re} M$  в (1.17) – (1.18) вычисляются как

$$\operatorname{Re} M = \tilde{\Delta}_0^R + \sum_{k=r+1}^N \tilde{\Delta}_{0,k}^R \hat{w}_k + \tilde{\Delta}_0^I \operatorname{Im} M, \quad (2.33)$$

где  $\tilde{\Delta}_0^R, \tilde{\Delta}_0^I, \tilde{\Delta}_{0,p}^I, \tilde{\Delta}_p^R, k=r+1,\dots,N$ , определяются по известному алгоритму [13].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. – Новосибирск: Наука, 1977, 242 с.
2. Крутицкий П.А. О задаче Римана-Гильберта и задаче с косой производной на плоскости с разрезами вдоль окружности // Математическое моделирование. – М., 1990, т.2, №9, с.114-123.
3. Крутицкий П.А. О задаче с косой производной для плоскости с разрезами вдоль прямой и связанных с нею задачах // Математическое моделирование. – М., 1990, т.2, №4, с.143-154.
4. Александров И.А., Сорокин А.С. Задача Шварца для многосвязных круговых областей // Сиб.матем.журн., 1972, т.13, №5, с.971-1001.
5. Сорокин А.С. Однородная задача Келдыша – Седова для многосвязных круговых областей в классе Мусхелишвили  $h_0$  // Дифференциальные уравнения. 1989, т.25, №2, с. 283-294.
6. Сорокин А.С. Параметрическое представление функций в конечносвязных областях. // Сиб. матем.журн., 1997, т.38, №5, с. 1163-1178.

7. Сорокин А.С. Формулы Келдыша – Седова и дифференцируемость по параметру семейств однолистных функций в конечносвязных областях. // Математические заметки, 1995, т.58, вып. 6, с.878-889.
8. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения ( Границные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике ). –М.: Наука, 1968, 512 с.
9. Александров И.А., Сорокин А.С. О распространении вариационного метода Г.М.Голузина - П.П.Куфарева на многосвязные области. // Докл. АН СССР, 1967, т.175, №6, с. 1207 – 1210.
10. Гахов Ф.Д., Хасабов Э.Г. Краевая задача Гильберта для многосвязной области. // Изв.ВУЗов, математика, 1958, т.1, вып. 2, с.12-21.
11. Сорокин А.С. Краевые задачи для аналитических функций в многосвязных круговых областях. - Новокузнецк: Изд. КузГПА, 2004, 274 с.
12. Самарский А.А., Вабишевич П.Н. Итерационные методы кластерного агрегирования для систем линейных уравнений. // Докл. РАН., 1996, т.349, №1, с.22-25.
13. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. -М.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1953, 492 с.
14. Мишина А.П., Проскуряков И.В. Высшая алгебра. -М.: Гос. изд. физ. -матем. лит., 1962, 300 с.
15. Чезаро Э. Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых. -М.-Л : ОНТИ, 1936, 592 с.

□Автор статьи:

Сорокин  
Андрей Семенович  
канд. физ.-мат.наук, доцент, ст.н.с.  
(филиал КузГТУ , г. Новокузнецк)  
тел.: 8(3843) 772459