

ГЕОМЕХАНИКА

УДК 622.241.54:539.3

Н.В. Черданцев, С.В. Черданцев

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРА ПРЕДЕЛЬНО-НАПРЯЖЁННОЙ ЗОНЫ УГЛЕПОРОДНОГО МАССИВА В БОРТУ ПЛАСТОВОЙ ВЫРАБОТКИ

Анализ геомеханического состояния массива горных пород является необходимым мероприятием как на стадии проектирования и строительства угледобывающего предприятия, так и в процессе его стабильной эксплуатации.

Данное мероприятие представляет собой сложную научно-техническую задачу, для решения которой привлекаются методы математической физики [1], теории упругости и пластичности [2, 3], механики горных пород [4], теории сыпучих сред [5], строительной механики [6].

Как правило, геомеханическое состояние массива исследуется в рамках следующей расчетной схемы. Породный массив представляется невесомой плоскостью с регулярными поверхностями ослабления и прямоугольным вырезом размерами L , h , имитирующим горную выработку, пройденную по пласту, мощность которого m будем считать равной высоте выработки h (рис. 1). Плоскость сверху и снизу нагружена постоянным гравитационным давлением, а по бокам давление меняется линейно. В дополнение к сказанному добавим, что пласт и поверхности ослабления мы полагаем расположенными горизонтально, а коэффициенты Пуассона массива и угольного пласта, незначительно отличающимися друг от друга, в силу чего влиянием неоднородности массива на

его геомеханическое состояние можно пренебречь и полагать, что расчетная плоскость является однородной средой [7, 8].

В работах [9, 10] (порядок цитирования нарушен) рекомендуется данную расчетную схему реализовать поэтапно. На первом этапе, на базе решения упругопластической задачи определяется размер зоны опорного давления и выявляются закономерности распределения напряжений в ней.

На втором этапе с учётом выявленных на первом этапе закономерностей распределения напряжений по границам раздела угольного пласта и окружающих пород формулируется задача теории упругости о распределении напряжений в окрестности выработки и строится ее решение. На этом этапе выявляется поле напряжений и проверяются условия прочности на поверхностях ослабления по критерию прочности Мора – Кузнецова, а по совокупности точек массива, в которых не выполняется данный критерий, строятся зоны нарушения сплошности (ЗНС) [5 – 7].

Третий этап, состоит в исследовании взаимодействия слоёв в зонах нарушения сплошности [9, 10]. Здесь слои моделируются защемленными по краям балками, нагруженными касательными напряжениями, которые изгибают слои, а, при достижении своих предельных значений, порождают

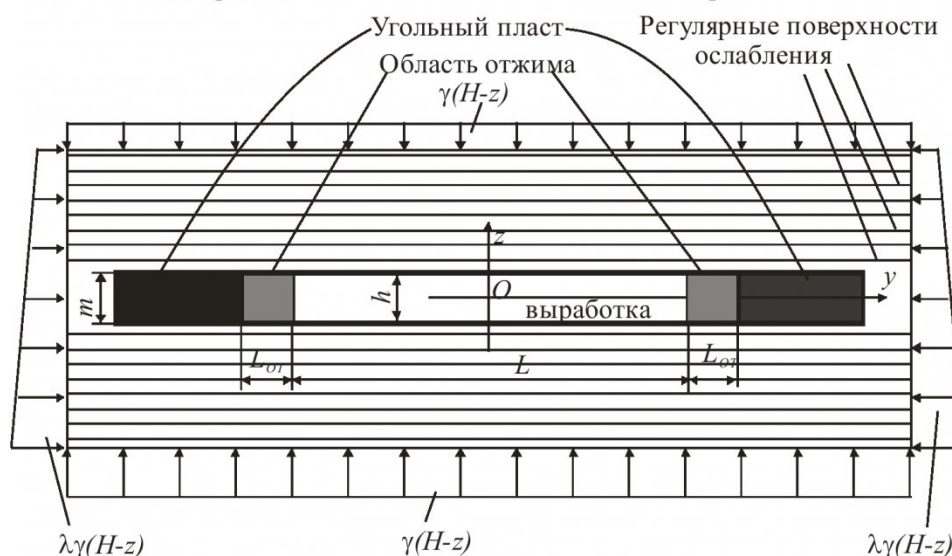


Рис. 1. Расчетная схема массива

в опасных сечениях слоёв вертикальные трещины.

И, наконец, на четвёртом этапе производится обоснование и выполняется анализ состояния скреплённых анкерной крепью породных слоёв в кровле выработки, и рассматриваются варианты повышения их устойчивости.

Известно [4, 11, 12], что сооружение выработки нарушает естественное поле напряжений массива и формирует в нем область опорного давления, состоящую из двух зон. В предельно-напряжённой зоне, непосредственно примыкающей к выработке, породы находятся в пластическом состоянии, а во второй зоне породы деформируются упруго. При этом границу раздела пластической и упругой зон, а также характер распределения напряжений в этих зонах можно установить лишь приближённо.

Например, в [4] полагают, что в предельно-напряжённой зоне изменение вертикальной компоненты нормальных напряжений в срединной линии пласта аппроксимируется экспоненциальной функцией, параметрами которой являются две характеристики прочности пласта, подбираемые путём сравнения значений экспоненциальной функции с данными натурных измерений. В упругой зоне закон распределения напряжений представляется суммой напряжений в нетронутом массиве и дополнительных напряжений, вызванных наличием выработки. При этом распределение напряжений также задаётся приближённо в виде убывающей экспоненты, в которой показатель затухания устанавливается путём обработки экспериментальных данных, получаемых в натурных

условиях. Искомые размер предельно напряжённой зоны и ширина зоны опорного давления находятся из уравнения равновесия пород, составленного вдоль вертикальной оси, решение которого строится методом последовательных приближений.

В отличие от описанной процедуры решения задачи первого этапа, в представленной статье используется более строгий подход, основанный на фундаментальных решениях механики деформируемого твёрдого тела.

Как правило, прочность окружающих горных пород существенно выше прочности угольного пласта. Поэтому, если горные породы находятся еще в упругой стадии, то краевая часть пласта шириной $2L_{OT}$ уже переходит в предельно состояние (рис. 1).

Далее, влияние краевой части пласта заменим действием напряжений, представляющих собой отпор краевой части. Поскольку краевая часть находится в предельном состоянии, то в качестве отпора принимаем напряжения σ_y^p , σ_z^p , τ_{yz}^p , являющимися напряжениями предельного состояния в краевой части пласта [11].

В результате мы получаем расчётную схему (рис. 2), на которой имеется выработка, состоящая из заданной выработки и двух квазивыработок шириной L_{OT} каждая, нагруженных по контуру изнутри указанными напряжениями.

Искомой величиной в данной схеме является ширина квазивыработки L_{OT} . Для ее нахождения воспользуемся методом последовательных приближений, который будем применять следующим

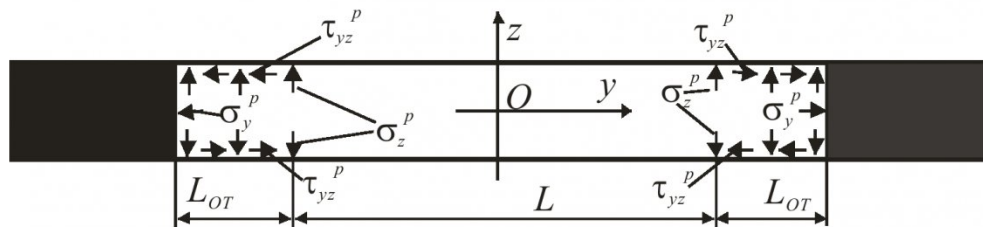


Рис. 2. Расчётная схема угольного пласта в окрестности выработки с учётом предельно-напряжённой зоны

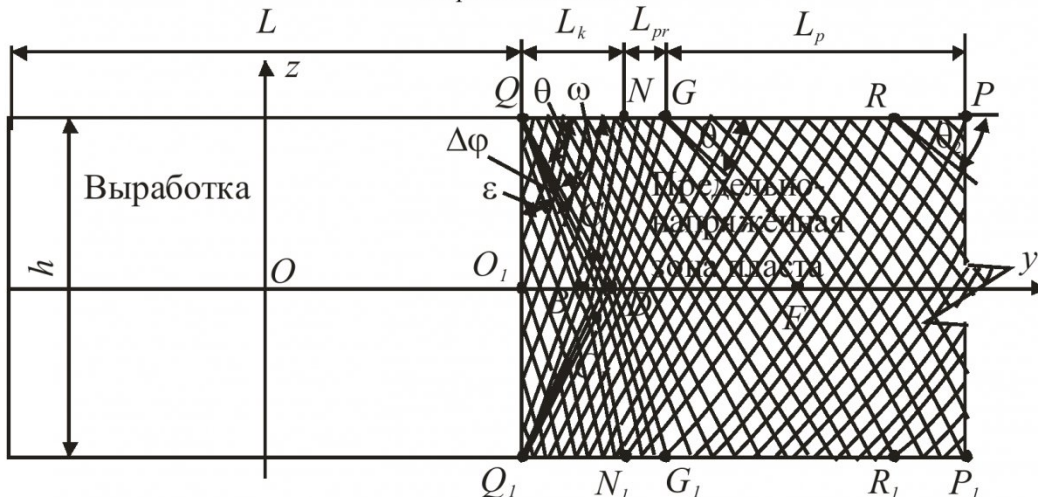


Рис. 3. Основные области предельно-напряжённой зоны

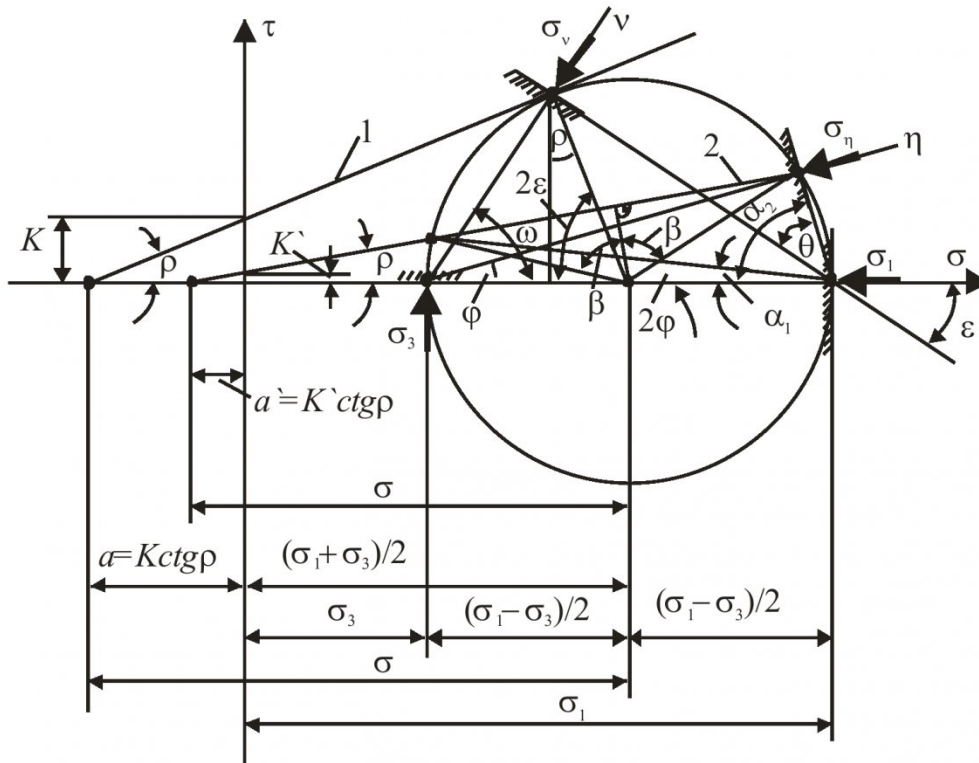


Рис. 4. Схема к определению угла между поверхностью ослабления и линией скольжения в предельно-напряжённой зоне пласта

образом. Вначале задаёмся размером L_{OT} и найдём поле напряжений в рамках модели упругого массива. Затем вычисляем напряжения на границе выработки с основным массивом и сравниваем с напряжениями, найденными по теории предельного состояния для краевой части пласта L_{OT} . Если их значения совпадают, то процедура метода заканчивается, в противном случае – повторяется до тех пор, пока значения напряжений не совпадут.

Особенность использования теории предельного состояния в данной работе проявляется в том, что деформирование пласта происходит не только по направлению его мощности, но главным образом, в плоскости контактов между пластом и окружающими породами, где возникает сцепление и трение. Малый коэффициент сцепления по контактам пласта и пород приводит к тому, что ещё на стадии его упругого деформирования нарушается сплошность пласта по этим контактам, в результате чего происходит проскальзывание пласта между окружающими породами. В этой связи можно утверждать, что деформированию пласта препятствуют только касательные напряжения, создающие боковое давление на пласт на некотором удалении от его обнажения.

В краевой зоне пласта имеются три области, в каждой из которых проявляются характерные черты его деформирования (рис. 3).

В области выпирания, представляющей собой призму QBQ_1 , пласт испытывает одноосное сжатие, причем главное напряжение σ_1 , равное пределу прочности на одноосное сжатие σ_0 , действует

вдоль кромки обнажения и составляет угол ε с направлением системы изогональных линий скольжения.

Поскольку вдоль контактов пласта с окружающими породами возможно нарушение сплошности, проявляющееся в виде проскальзывания пласта, то в них будет одновременно существовать два предельных состояния равновесия: специальное и обыкновенное [4, 5], что демонстрируется кругом Мора (рис. 4).

Из рис. 4 мы видим, что угол θ образован двумя площадками. Первой – является площадка скольжения с нормалью ν , положение которой найдено по критерию Кулона – Мора как результат касания с кругом напряжений прямолинейной огибающей 1 предельного состояния для пласта с углом наклона ρ к оси абсцисс. Положения второй площадки с нормалью η найдено по критерию Мора – Кузнецова как результат пересечения с кругом напряжений прямолинейной огибающей 2 предельного состояния для поверхности ослабления, составляющей угол наклона ρ' с осью абсцисс. Легко заметить, что площадка η совпадает с плоскостью контакта пласта и окружающих пород. Углы ρ и ρ' – называются углами внутреннего трения, а K и K' коэффициентами сцепления, соответственно, для пласта и поверхности ослабления.

Угол θ мы можем найти по формуле (рис. 4)

$$\theta = \alpha_2 - \varepsilon, \quad (1)$$

где угол ε образован главным напряжением σ_1 и

площадкой скольжения ν и поэтому

$$\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}. \quad (2)$$

Дальнейший анализ рисунка 4 позволяет нам получить еще две формулы, по которым вычисляются углы α_2 и β

$$2\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \rho' + \beta, \quad (3)$$

$$\beta = \arccos \left[\frac{\left(a' + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \cdot \sin \rho'}{\left(a + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \cdot \sin \rho} \right]. \quad (4)$$

С учетом (3) и (4) формула (1) преобразуется к виду

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\rho' + \frac{1}{2} \arccos \left[\frac{\left(a' + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \cdot \sin \rho'}{\left(a + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \cdot \sin \rho} \right] - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) \quad (5)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \left[\frac{\left(a' + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \cdot \sin \rho'}{\left(a + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \cdot \sin \rho} \right] &= \\ &= \frac{1}{2} \arcsin \left[\frac{\left(a' + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \cdot \sin \rho'}{\left(a + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \cdot \sin \rho} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

а формулы

$$\sigma = a + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad \sigma' = a' + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (7)$$

выражают средние приведённые напряжения соответственно в угольном пласте и на поверхности ослабления [4], мы получим окончательную формулу для определения θ

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(\rho - \rho') - \frac{1}{2} \arcsin \left[\frac{\sin \rho'}{\sin \rho} \left(1 - \frac{a}{\sigma} \right) \right] \quad (8)$$

Вторая область в краевой части L_{OT} представлена двумя секторами QDG_1N_1BQ и Q_1DGNBQ_1 (см. рис. 3), которые часто называют зонами Прандтля [4, 5]. Угол раствора этих секторов $\Delta\varphi$, очевидно, равен

$$\Delta\varphi = \omega - \theta,$$

где угол ω определяется по формуле (рис. 4)

$$\omega = \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2},$$

а линии скольжения в секторах образованы радиальными прямыми и логарифмическими спиралями вида

$$r = r_0 \cdot e^{-\Delta\varphi \cdot \text{tg} \rho},$$

где r_0 – отрезок QB (Q_1B), примыкающий к области выпирания QBQ_1 , r – граничный отрезок сектора Прандтля, равный отрезку QC (или Q_1C_1).

Напряжения в зонах Прандтля вдоль соответствующей радиальной линии постоянны, а вдоль логарифмических спиралей изменяются по экспоненциальному закону. Например, нормальное напряжение в точке C (или C_1) определяется по формуле

$$\sigma_C = \sigma_B \cdot e^{2\Delta\varphi \cdot \text{tg} \rho}, \quad (9)$$

но поскольку точка B принадлежит области выпирания QQ_1B , где напряжения повсюду равны σ_0 , то формула (9) приобретает вид

$$\sigma_C = \sigma_0 \cdot e^{2\Delta\varphi \cdot \text{tg} \rho}. \quad (10)$$

Напряжения в точках D и C связаны между собой также экспоненциальной зависимостью

$$\sigma_D = \sigma_C \cdot e^{2\Delta\varphi \cdot \text{tg} \rho}, \quad (11)$$

которая, в силу (10), приводится к формуле

$$\sigma_D = \sigma_0 \cdot e^{4\Delta\varphi \cdot \text{tg} \rho}, \quad (12)$$

устанавливающую связь между напряжениями в точке D и пределом прочности породы пласта на одноосное сжатие σ_0 .

На участках предельно-напряжённой зоны, расположенных правее линий скольжения $D - G$ и $D - G_1$ (рис. 3) напряжения неизвестны. Поэтому, следуя [4] приведённые нормальные напряжения, действующие вдоль оси y , представим по формуле

$$\sigma_z^* = \sigma^* \cdot e^{k \cdot \left(y - \frac{L}{2} \right)}, \quad (13)$$

в которой σ^* – приведённое напряжение на свободной поверхности пласта, связанное с пределом прочности пласта на одноосное сжатие зависимостью [4]

$$\sigma^* = \frac{\sigma_0}{2 \cdot \sin \rho},$$

а

$$k = \frac{2}{m} \cdot \text{tg}^2 \omega \cdot \text{tg} \rho',$$

где m – мощность пласта.

В силу симметрии расчётной схемы относительно срединной плоскости касательные напряжения на оси y отсутствуют, а нормальные к этой плоскости напряжения σ_z являются напряжениями σ_1 .

Нормальные и касательные напряжения на контуре квазивыработки, выражаются через глав-

ные напряжения очевидными соотношениями, вытекающими из рис. 4

$$\begin{aligned}\sigma_\eta &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \cos 2\varphi, \\ \tau_\eta &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \sin 2\varphi \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} &= \sigma^* - a, \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} &= \sigma^* \cdot \sin \rho,\end{aligned}$$

из которых мы получаем формулы главных напряжений

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma^* (1 + \sin \rho) - a, \\ \sigma_3 &= \sigma^* (1 - \sin \rho) - a, \\ \sigma_\eta &= \sigma^* (1 - \sin \rho \cdot \cos 2\varphi) - a, \\ \tau_\eta &= \sigma^* \cdot \sin \rho \cdot \sin 2\varphi.\end{aligned}$$

Анализ рисунка 5 позволяет нам установить связь между углом φ и углами θ, ε (на рис. 5 эта связь показана применительно к точке G)

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - (\varepsilon + \theta_1).$$

Таким образом, на трёх отмеченных участках контакта слоя с боковыми породами в предельно-напряжённой зоне напряжения распределены следующим образом. На участке $Q - G$ нормальные напряжения постоянны.

На участке $N - G$ напряжения изменяются экспоненциально согласно формулам (12), но при проведении вычислительного эксперимента, в целях упрощения алгоритма, эти напряжения принимаются изменяющимися по линейному закону

$$\sigma_k = \frac{\sigma_G - \sigma_C}{y_G - y_N} \cdot (y_k - y_N),$$

где y_G, y_N – абсциссы точек G и N , а y_k – абсцисса произвольной точки k на этом участке, напряже-

ние в которой σ_k (рис. 4, 5).

На участках правее точки G (рис. 4, 5) напряжения вычисляем по формуле (13).

Установим связь между абсциссами точек срединной плоскости пласта, расположенными на контакте с окружающими породами, в которых напряжения одинаковы. Для этой цели воспользуемся рис. 5, из которого видно, что все линии скольжения криволинейны, в том числе и линии $D - G$ и $D - G_1$, на которых напряжения постоянны. Обозначив угол NGD буквой δ , а угол FDG буквой ω , имеем

$$\delta = \pi - (2\varepsilon + \theta_1).$$

Поскольку линия $D - G$ является пологой кривой, то ее можно аппроксимировать отрезком прямой линии. Поэтому углы NGD и FDG будут равны между собой, как углы с соответственно параллельными сторонами. Тогда угол FDG , обозначенный буквой ϕ , мы найдем как среднее арифметическое между углами δ и ω

$$\begin{aligned}\phi = \frac{\delta + \omega}{2} &= \frac{\pi - \left(2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \theta_1\right) + \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2}}{2} = \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{\rho}{4} - \frac{\theta_1}{2}\end{aligned}\tag{14}$$

в силу чего, абсцисса точки G выражается через абсциссу точки D следующим образом

$$y_G = y_D + \frac{m}{2} \cdot \operatorname{ctg} \phi.\tag{15}$$

Применяя (14) и (15) к произвольным точкам, принадлежащих контакту пласта и пород, мы можем выразить абсциссу произвольной i -й точки через абсциссу предыдущей точки $i-1$

$$y_i = y_{i-1} + \frac{m}{2} \cdot \operatorname{ctg} \phi_i,$$

где значение ϕ_i вычисляется по формуле (14) с заменой угла θ_1 на угол θ_i , определяемый по формуле (8).

Представленные зависимости (1) – (15) полно-

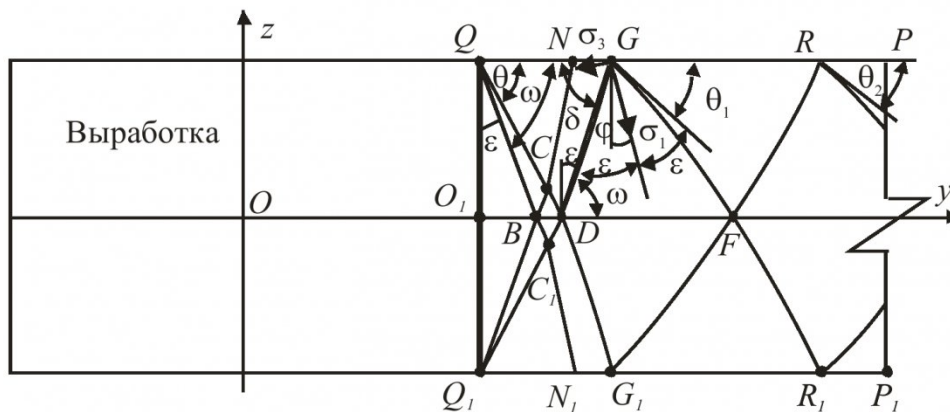


Рис. 5. Схема к определению угла φ между главным напряжением σ_1 и нормалью к поверхности ослабления в предельно-напряжённой зоне пласта

стью описывают состояние угольного пласта в предельно-напряжённой зоне и позволяют сформулировать граничные условия на контакте пласта с окружающими породами во второй внешней краевой задаче теории упругости для углепородного массива с выработкой [2, 13, 14].

С помощью теории потенциала [1, 2], эта задача приводится к граничному интегральному уравнению

$$\frac{1}{2}a_q(Q_O) - \int_O \Phi_{qm}(Q_O, M_O)a_m(M_O)dO_{M_O} = \sigma_{qm}^e \cdot n_m(Q_O) - F(Q_O) \quad (16)$$

в котором O – область интегрирования, Q_O, M_O – точки на поверхности этой области, dO_{M_O} – дифференциал поверхности в окрестности точки M_O , $\Phi_{qm}(Q_O, M_O)$ – тензор Грина, $n_q(Q_O), n_q(M_O)$ – векторы нормали к поверхности выработки в точках Q_O, M_O ; $F_q(Q_O)$ – вектор нагрузки, приложенный к поверхности выработки изнутри, которой может быть реакцией (отпором) крепи, σ_{qm}^e – компоненты тензора естественного поля в нетронутом горными работами массиве, которые при отсутствии тектонических напряжений представляются в виде

$$\sigma_y^e = \sigma_{22}^e = \lambda\gamma H, \quad \sigma_z^e = \sigma_{33}^e = \gamma H, \\ \tau_{yz}^e = \sigma_{23}^e = 0.$$

Выражая вектор $F_q(Q_O)$, который на участках предельно-напряжённой зоны играет роль отпора со стороны угольного пласта, через компоненты напряжений в этой зоне, приводим уравнение (16) к уравнению

$$\frac{1}{2}a_q(Q_O) - \int_O \Phi_{qm}(Q_O, M_O)a_m(M_O)dO_{M_O} = (\sigma_{qm}^e - \sigma_{qm}^p)n_m(Q_O) \quad (17)$$

с единообразно записанной правой частью, которое и принято в данной работе. Здесь отметим, что для части контура, относящегося непосредственно к выработке, в скобках правой части уравнения (17) учитывается только первое слагаемое σ_{qm}^e , а

на поверхности квазивыработок предельно напряжённой зоны учитываются оба слагаемых.

Интегральное уравнение (17) является сингулярным и его решение построено численно – методом механических квадратур. Сначала поверхность полости разбивается на конечное число N – элементов, а интеграл заменяется суммой. Далее, фиктивная и реактивная нагрузки на контакте пласта в предельно-напряжённой зоне по каждому элементу заменяются равнодействующими, которые в пределах элемента считаются постоянными. В результате этой процедуры получаются N уравнений относительно неизвестного вектора фиктивной нагрузки, что в координатной форме соответствует $3N$ уравнениям относительно проекций вектора фиктивной нагрузки. После этого мы находим напряжения в произвольной точке массива путем суммирования напряжений естественного поля и напряжений от действия найденной фиктивной нагрузки.

На рис. 6 – 8 представлены результаты вычислений по определению размера предельно-напряжённой зоны угольного пласта. Данные задачи приняты следующими. Объёмный вес налегающей толщи пород $\gamma = 25 \text{ кН/м}^3$, предел прочности пласта на одноосное сжатие $\sigma_0 = 10 \text{ МПа}$, угол внутреннего трения угольного пласта $\rho = 20^\circ$, угол внутреннего трения на контакте пласта с окружающими породами $\rho = 10^\circ$. Глубина заложения выработки $H = 600 \text{ м}$. Высота выработки и мощность пласта $h = m = 2 \text{ м}$; ширина выработки $L = 3 \text{ м}$. Коэффициент бокового давления $\lambda = 1$.

На рис. 6 показаны графики 1 и 2 распределения вертикальных напряжений вдоль линии $Q - P$ (см. рис. 4, 5). Из рис. 6 следует, что ордината точки P является коэффициентом концентрации напряжений k_σ в зоне опорного давления, значение которого $k_\sigma = 2$. Абсцисса точки P равна $4,06 \text{ м}$, а абсцисса точки Q равна $1,5 \text{ м}$. Разность между этими абсциссами представляет собой ширину предельно-напряжённой зоны (или ширину квазивыработки) $L_{OT} = 2,56 \text{ м}$.

На горизонтальном участке графика между

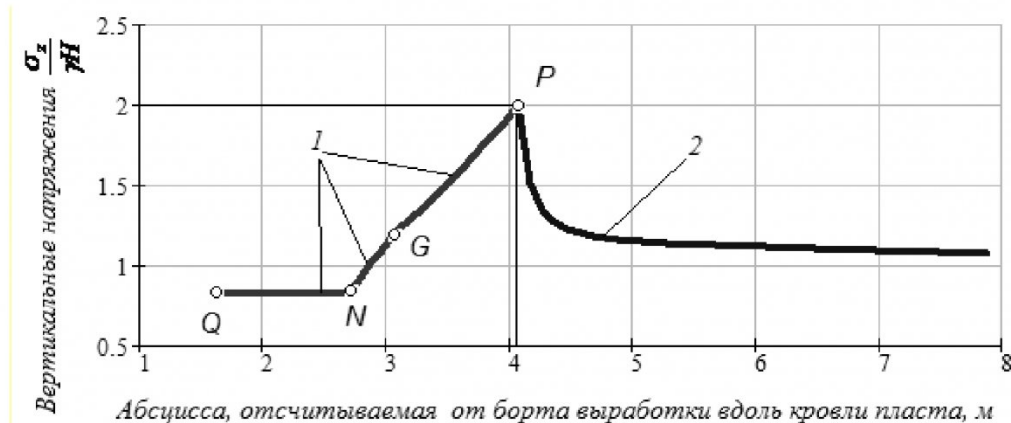


Рис. 6. Распределение напряжений $\sigma_z/\gamma H$. 1 – в предельно-напряжённой зоне пласта, 2 – в упругой области пласта

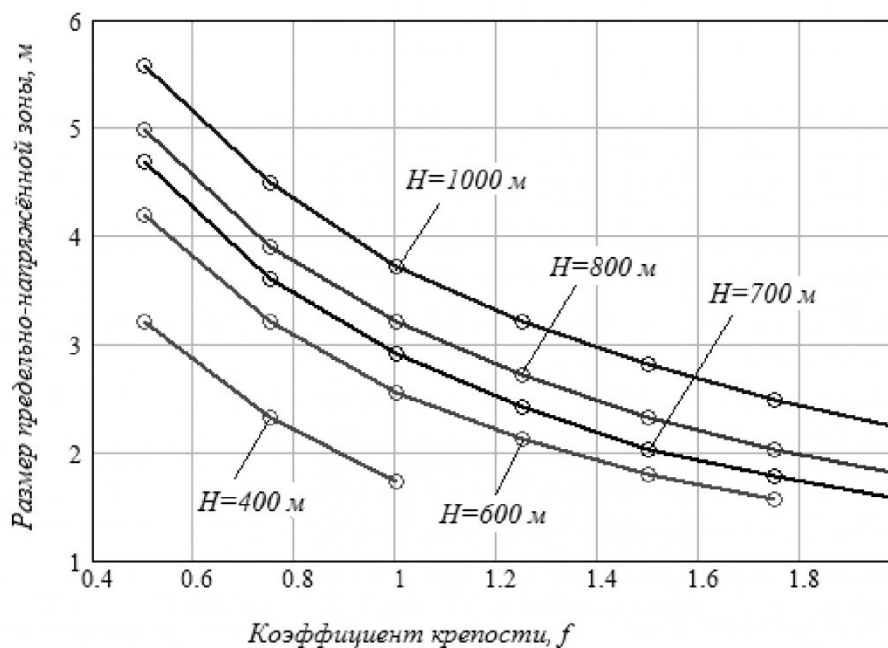


Рис. 7. Графики зависимости размера предельно-напряжённой зоны угольного пласта от его коэффициента крепости

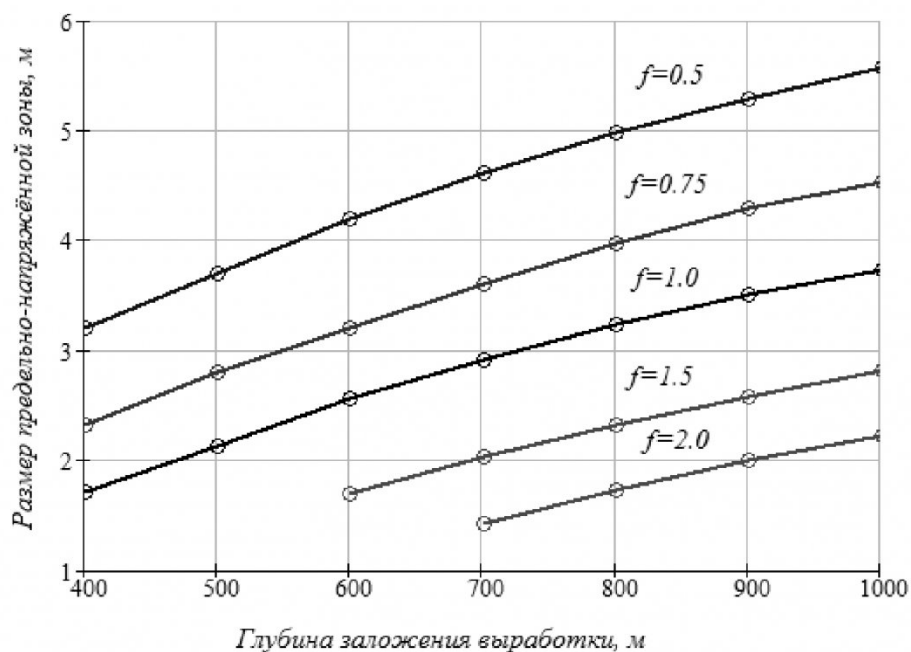


Рис. 8. Графики зависимости размера предельно-напряжённой зоны угольного пласта от глубины заложения выработки

точками Q и N напряжения соответствуют напряжениям на участке $Q - N$ предельно-напряжённой зоны. Напряжения на участке $N - G$ соответствуют напряжениям в зоне Прандтля $N - G$ (рис. 4, 5), а на участке $G - P$ изменяются экспоненциально согласно выражению (13). График 2 характеризует изменение вертикальных напряжений в упругой области массива.

В рамках разработанной модели проведён вычислительный эксперимент для ряда глубин заложения выработки и при различных коэффициен-

тах крепости пласта по шкале М.М. Протодяконова. Результаты эксперимента представлены на рис. 7 и 8.

Так на рис. 7 построена серия графиков изменения размера предельно-напряжённой зоны угольного пласта в зависимости от его коэффициента крепости для ряда глубин заложения выработки. Графики имеют вид монотонно убывающих кривых с незначительной кривизной. Хорошо видно, что при малом коэффициенте крепости угольного пласта и значительной глубине заложения

ния выработки предельно-напряжённая зона может достигать значительных размеров. Так, например, при $f = 0,5$ и $H = 1000\text{м}$ размер предельно-напряжённой зоны в каждом борту выработки достигает 5,5м. Следовательно, суммарный размер предельно-напряжённой зоны почти в четыре раза превосходит ширину выработки.

На рис. 8 построены графики изменения размера предельно-напряжённой зоны угольного пласта в зависимости от глубины заложения выработки для ряда значений коэффициента крепости. Здесь графики монотонно возрастают и настолько слабо выпуклые, что их можно считать линейными.

По графикам на рис. 7, 8 можно легко определить размер предельно-напряжённой зоны, если известна глубина выработки и коэффициент крепости угольного пласта.

Выводы:

1. Ранее разработанная и широко используемая модель геомеханического состояния массива с

прочностной анизотропией усовершенствована авторами статьи путём учёта предельно-напряжённой зоны угольного пласта в краевой его части.

2. Размер предельно-напряжённой зоны с малым коэффициентом крепости ($f = 0,5$) достигает значительных размеров и составляет почти четырёхкратную ширину выработки, но с ростом коэффициента крепости размер зоны существенно уменьшается.

3. Для выработки, расположенной на глубине до 400м при коэффициенте крепости пласта не менее единицы, предельно-напряжённая зона в пласте отсутствует.

4. Графики зависимости размера предельно-напряжённой зоны от величины коэффициента крепости представляют собой убывающие кривые с малой кривизной, в то время как графики этой же зависимости от глубины выработки практически линейные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 444 с.
2. *Лурье А.И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970.–940 с.
3. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. – М.: Высшая школа, 1969. – 608 с.
4. *Фисенко Г.Л.* Предельные состояния горных пород вокруг выработок. – М.: Недра, 1976. – 272 с.
5. *Соколовский В.В.* Статика сыпучей среды. М.: Наука, 1990. – 272 с.
6. *Ржаницын А.Р.* Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1991. – 440 с.
7. *Черданцев Н.В.* Моделирование геомеханического состояния анизотропного по прочности неоднородного массива горных пород / Н.В. Черданцев, Преслер В.Т. // Вестник КузГТУ. –2011.–№ 3.–С. 15–22.
8. *Черданцев Н.В.* Моделирование разрушений в анизотропном по прочности неоднородном массиве горных пород, вмещающем выработку // Вестник Научного центра по безопасности работ в угольной промышленности.–2012. – № 1.–С. 6 – 11.
9. *Черданцев Н.В.* К вопросу о состоянии породного слоя в кровле выработки // Горный информационно-аналитический бюллетень 2013. № 6. - С. 215 – 226.
10. *Черданцев Н.В.* Оценка прочности слоя горных пород в кровле выработки // Известия вузов. Горный журнал. - 2014. № 1. - С. 78 – 84.
11. Теория защитных пластов / И.М. Петухов, А.М. Линьков, В.С. Сидоров, Н.А. Фельдман. – М.: Недра, 1976. – 226 с.
12. *Ержанов Ж.С.* Комбайновые выработки шахт Кузбасса. Опыт поддержания и расчет устойчивости / Ж.С. Ержанов, В.Ю. Изаксон, В.М. Станкус. – Кемерово: Кемеров. книжн. изд-во, 1976. – 216 с.
13. *Черданцев Н.В.* Некоторые трёхмерные и плоские задачи геомеханики / Н.В. Черданцев, В. Ю. Изаксон. - Кемерово: КузГТУ, 2004. - 190 с.
14. *Черданцев Н.В.* Вопросы методического и инструментального обеспечения мониторинга горных выработок / Н.В. Черданцев, В. Т Преслер., В.Е. Ануфриев. – Кемерово, ИУ СО РАН, 2012. - 222 с.

Авторы статьи:

Черданцев
Николай Васильевич:
д.т.н., заведующий лабораторией геомеханики угольных месторождений Института угля ФАНО. E-mail: cherdantsevnv@icc.kemsc.ru,

Черданцев
Сергей Васильевич
д.т.н., профессор кафедры теплоэнергетики Кузбасского государственного технического университета. E-mail: svch01@yandex.ru.