ГЕОМЕХАНИКА

УДК 622.272: 516.02

С.В. Черданцев, Н.В. Черданцев

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ПОНТОНОВ В ЗУМПФАХ УГОЛЬНЫХ РАЗРЕЗОВ

При разработке угольных месторождений открытым способом необходимы зумпфы для стока грунтовых и подземных вод, которые откачивают для предотвращения затопление забоя. Для этого используют плавучие средства в виде понтонов с установленным на них водоотливным оборудованием.

Проблема использования понтонов на угольных разрезах уже обсуждалась в ряде работ. В частности, в [1] расчетная схема понтона, представляющая собой трехсвязную плавающую область, заменена эквивалентной односвязной областью, плавучесть и остойчивость которой выявлена на основе теорем Дюпена.

Более детально плавучесть и остойчивость понтонов исследованы в работе [2], для чего использовались основные теоремы и фундаментальные положения статики корабля [3].

Нами предпринята попытка обсудить задачу о движении понтонов в зумпфах угольных разрезов и выявить формы этого движения.

Особенность данной задачи заключается в том, что действующие на понтон силы заранее неизвестны, а проявляются лишь во взаимодействии понтона с движущейся жидкостью по следующей схеме. Вначале под действием какого-либо внешнего возмущения нарушается равновесие понтона, что в свою очередь нарушает равновесие жидкости в его окрестности и приводит ее в движение. Движущаяся жидкость создает гидродинамические силы и инициирует движение понтона, которое при определенных условиях может быть неустойчивым, в результате чего понтон может опрокинуться.

С целью выявления гидродинамических сил, действующих на понтон, рассмотрим задачу о движении жидкости в зумпфах угольных разрезов. Постановка задачи сформулирована в [4], где отмечено, что движение жидкости в зумпфах безвихревое и поэтому скорость жидкости $\bar{v}$ представлена как

$$\vec{v} = \nabla\varphi, \qquad (1)$$

где $\varphi = \varphi(x, y, z)$ – потенциал скорости жидкости, удовлетворяющий в любой точке внутри V уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \qquad (2)$$

условию на поверхности жидкости

$$g\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \qquad (3)$$

и условию на границе S области V

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\upsilon}\right|_S = 0. \qquad (4)$$

В формулах (1) – (4) x, y, z – декартовы координаты, жестко связанные с понтоном (рисунок); t – время; g – ускорение свободного падения; υ – внутренняя нормаль к S (направлена внутрь объема V); Δ – оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

∇ – оператор Гамильтона:

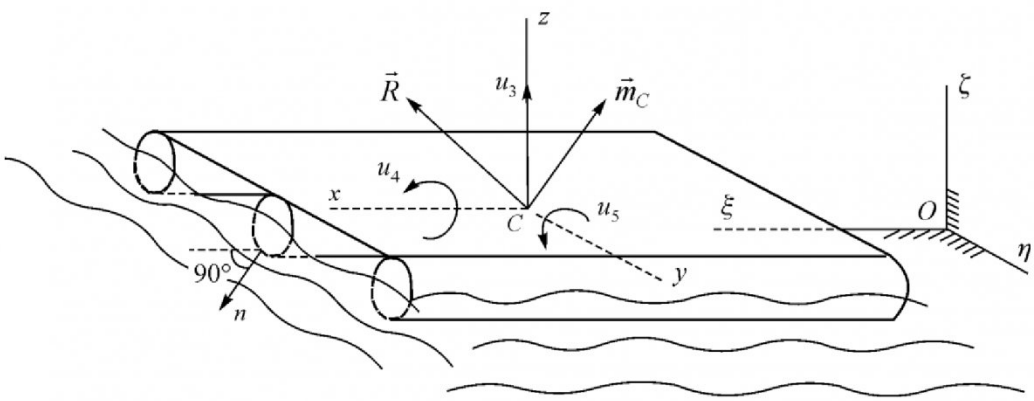

Рис. 1. Расчетная схема понтона в зумпфе угольного разреза

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы координатных осей x, y, z.

Построение решения задачи (2) – (4) начнем с того, что, воспользовавшись принципом суперпозиции, представим искомую функцию $\varphi(x, y, z)$ как [5]

$$\varphi = u_{Cx}\varphi_1 + u_{Cy}\varphi_2 + u_{Cz}\varphi_3 + \\ + \omega_x\varphi_4 + \omega_y\varphi_5 + \omega_z\varphi_6, \quad (5)$$

где u_{Cx}, u_{Cy}, u_{Cz} – компоненты вектора скорости центра масс (точка C) понтона, а ω_x, ω_y, ω_z – компоненты его угловой скорости относительно осей x, y, z.

Для удобства и каноничности примем следующий порядок записи:

$$u_{Cx} = u_1, \quad u_{Cy} = u_2, \quad u_{Cz} = u_3,$$

$$\omega_x = u_4, \quad \omega_y = u_5, \quad \omega_z = u_6,$$

тогда формула (5) приобретает компактную форму

$$\varphi = \sum_{k=1}^{6} u_k\varphi_k. \quad (6)$$

Полагая в (6)

$$u_1 = 1 \text{ м/с}, \quad u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = u_6 = 0,$$

убеждаемся в том, что функция φ_1 представляет собой потенциал скоростей возмущенного движения жидкости, вызванного равномерным поступательным движением понтона вдоль оси Ox со скоростью, равной единице. Функции φ_2, φ_3 имеют аналогичный смысл при движении понтона соответственно вдоль осей Oy и Oz.

Положив в (6)

$$u_4 = 1 \text{ м/с}, \quad u_1 = u_2 = u_3 = u_5 = u_6 = 0,$$

замечаем, что функция φ_4 есть потенциал возмущенного движения жидкости, вызванного равномерным вращением понтона вокруг оси Ox с единичной угловой скоростью.

Функции φ_5 и φ_6 имеют идентичный смысл, причем первая из них соответствует вращению понтона вокруг оси Oy, а вторая – вокруг оси Oz.

Поскольку потенциал φ является гармонической функцией, то каждая из составляющих функций φ_k также гармоническая и, следовательно, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi_k = 0, \quad k = 1,2,...,6 \quad (7)$$

в области V. В силу этого обстоятельства вторая формула Грина [6] для любых двух функций φ_k и φ_j

$$\int_V (\varphi_k\Delta\varphi_j - \varphi_j\Delta\varphi_k)dV = \int_S \left(\varphi_k\frac{\partial\varphi_j}{\partial\upsilon} - \varphi_j\frac{\partial\varphi_k}{\partial\upsilon}\right)dS$$

приобретает вид

$$\int_S \varphi_k\frac{\partial\varphi_j}{\partial\upsilon}dS = \int_S \varphi_j\frac{\partial\varphi_k}{\partial\upsilon}. \quad (8)$$

Кроме условий (3) и (4), следует учесть, что на поверхности S_1 той части понтона, которая находится под водой, должно выполняться условие обтекания [7]. Для идеальной жидкости оно заключается в том, что нормальная u_n составляющая скорости произвольной точки M, принадлежащей поверхности S_1, и нормальная составляющая скорости частицы жидкости v_n, совпадающей с точкой M, должны быть равны между собой. Следовательно, условие обтекания выразится как

$$u_n = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{S_1}, \quad (9)$$

где n – внешняя нормаль к поверхности S_1 понтона в точке M (направлена внутрь области V). В силу (6), условие обтекания (9) перепишем как

$$u_n = \frac{\partial}{\partial n}\left(\sum_{k=1}^{6} u_k\varphi_k\right) = \sum_{k=1}^{6} u_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial n} = u_1. \quad (10)$$

С другой стороны, скорость произвольной точки M понтона найдем по формуле [8]

$$\vec{u}_M = \vec{u}_C + \vec{\omega}\times\vec{r}_M,$$

где $\vec{r}_M$ – радиус-вектор точки M. Учитывая правило векторного умножения векторов [9], полученную формулу перепишем следующим образом:

$$\vec{u}_M = u_1\vec{i} + u_2 j + u_3\vec{k} + (u_5 z - u_6 y)\vec{i} - \\ - (u_4 z - u_6 x)\vec{j} + (u_4 y - u_5 x)\vec{k},$$

откуда

$$u_{Mx} = u_1 + u_5 z - u_6 y, \quad u_{My} = u_2 + u_6 x - u_4 z,$$

$$u_{Mz} = u_3 + u_4 y - u_5 x. \quad (11)$$

Выразив нормальную u_n составляющую скорости через ее координаты

$$u_n = u_{Mx}\cos(n,x) + u_{My}\cos(n,y) + u_{Mz}\cos(n,z)$$

и подставляя сюда формулы (11), получим

$$u_n = u_1\cos(n,x) + u_2\cos(n,y) + u_3\cos(n,z) + \\ + u_4[y\cos(n,z) - z\cos(n,y)] + \\ + u_5[z\cos(n,x) - x\cos(n,z)] + \\ + u_6[x\cos(n,y) - y\cos(n,x)]. \quad (12)$$

Сопоставляя (10) и (12) и сравнивая в них коэффициенты при u_k с одинаковыми индексами k, имеем следующие соотношения:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \cos(n,x), \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \cos(n,y),$$

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial n} = \cos(n,z), \quad (13)$$

$$\frac{\partial\varphi_4}{\partial n} = y\cos(n,z) - z\cos(n,y),$$

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial n} = z\cos(n,x) - x\cos(n,z), \qquad (14)$$
$$\frac{\partial \varphi_6}{\partial n} = x\cos(n,y) - y\cos(n,x),$$

вполне определяющие функции φ_k, которые, как видно из (13) и (14), не зависят от скорости движения понтона и зависят лишь от его формы.

Формулы (13) и (14) дадут возможность оценить влияние на движущийся понтон идеальной жидкости, которая не оказывает сопротивления движению понтона, но создает на него гидродинамические силы [7]. Для их определения рассмотрим движение подводной части понтона V_1, поверхностью которой является S_1. Очевидно, что объем, заключенный между поверхностями S и S_1,

$$\Delta V = V - V_1,$$

а вектор количества движения жидкости в объеме ΔV найдем по формуле

$$\vec{Q} = \int_{\Delta V} \rho \vec{v} dV,$$

где ρ – плотность жидкости в зумпфе; dV – бесконечно малый элемент области ΔV. В силу формулы (1) и свойства кратных интегралов [10], приведем полученную формулу к выражению

$$\vec{Q} = \int_{\Delta V} \nabla(\rho\varphi) dV = \\ = \rho \int_{V-V_1} \nabla\varphi dV = \rho\int_{V} \nabla\varphi dV - \rho\int_{V_1} \nabla\varphi dV \qquad (15)$$

где с помощью формулы Остроградского – Гаусса [10] перейдем от интегралов по областям V и V_1 к интегралам по поверхностям S и S_1, ограничивающим эти области. В результате формула (15) приобретает вид

$$\vec{Q} = \rho\int_S \varphi \cdot \vec{\upsilon} dS - \rho \int_{S_1} \varphi \cdot \vec{n} dS \cdot$$

Производная от вектора $\vec{Q}$

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \rho \frac{d}{dt}\int_S \varphi \cdot \vec{\upsilon} dS - \rho \frac{d}{dt}\int_{S_1} \varphi \cdot \vec{n} dS \qquad (16)$$

равна векторной сумме массовых и поверхностных сил:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{G} + \vec{\Re} - \vec{F}_1, \qquad (17)$$

где $\vec{G}$ – главный вектор массовых сил; $\vec{\Re}$ – главный вектор поверхностных сил, приложенных к жидкости в объеме ΔV со стороны поверхности S; $\vec{F}_1$ – главный вектор поверхностных сил, приложенных к жидкости в том же объеме ΔV со стороны понтона через поверхность S_1. Поскольку направление этого вектора противоположно нормали υ, в равенстве (17) он взят со знаком минус.

Вектор $\vec{G}$, очевидно, равен весу жидкости в объеме ΔV:

$$\vec{G} = -\rho g \Delta V \vec{k} = -\rho g (V - V_1)\vec{k} = -\rho g V \vec{k} + \rho g V_1 \vec{k} \qquad (18)$$

Вектор $\vec{\Re}$ представляет собой реакцию на силы давления жидкости $\vec{F}_1$, действующие на поверхность S. Полагая скорость жидкости малой величиной, силы давления найдем из интеграла Лагранжа – Коши [7]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + gz + \frac{p - p_0}{\rho} = 0,$$

откуда

$$p = p_0 - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho g z$$

и, следовательно,

$$\vec{F} = \int_S p\vec{\upsilon} dS = \int_S p_0 \vec{\upsilon} dS - \rho \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial t}\vec{\upsilon} dS - \rho g \int_S z \vec{\upsilon} dS \qquad (19)$$

где p_0 и p – давление жидкости на стенки зумпфа в начальный и текущий моменты времени t .

Так как $p_0 = const$, а поверхность S замкнута, то [9, 10]

$$\int_S p_0 \cdot \vec{\upsilon} dS = p_0 \int_S \vec{\upsilon} dS = 0. \qquad (20)$$

Второй интеграл в (19) приводим к виду

$$\rho \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial t}\vec{\upsilon} dS = \rho \frac{d}{dt}\int_S \varphi \vec{\upsilon} dS, \qquad (21)$$

а последний интеграл в (19) преобразуем по формуле Остроградского – Гаусса:

$$\rho g \int_S z\vec{\upsilon} dS = \rho g \int_V \nabla z dV = \rho g \int_V \vec{k} dV = \rho g V \cdot \vec{k} \qquad (22)$$

В силу (20) – (22), формула (19) приобретает вид

$$\vec{F} = -\rho \frac{d}{dt}\int_S \varphi \vec{\upsilon} dS - \rho g V \cdot \vec{k}$$

и, поскольку $\vec{\Re} = -\vec{F}$,

$$\vec{\Re} = \rho \frac{d}{dt}\int_S \varphi \vec{\upsilon} dS + \rho g V \cdot \vec{k} \cdot \qquad (23)$$

Подставляя (16), (18) и (23) в (17), получим

$$\rho \frac{d}{dt}\int_S \varphi\vec{\upsilon} dS - \rho \frac{d}{dt}\int_{S_1} \varphi \vec{n} dS = \\ = -\rho g V \vec{k} + \rho g V_1 \vec{k} + \rho \frac{d}{dt}\int_S \varphi \vec{\upsilon} dS + \rho g V \vec{k} - \vec{F}_1,$$

откуда

$$\vec{F}_1 = \rho g V_1 \vec{k} + \rho \frac{d}{dt}\int_{S_1} \varphi \vec{n} dS \cdot \qquad (24)$$

Первый член в (24) является архимедовой силой плавучести и так как она уравновешивается весом понтона, то в дальнейшем ее учитывать не будем. Второй член в (24) обусловлен движением жидкости, поскольку содержит потенциал скоро-

стей $\varphi(x,y,z)$.

Главный вектор момента количества движения жидкости найдем по формуле

$$\vec{K}_C = \int_{V_1} (\vec{r}_M \times \rho\vec{v})\, dV ,$$

которую с помощью формулы Остроградского – Гаусса приведем к виду

$$\vec{K}_C = \rho \int_{S_1} \varphi(\vec{r}_M \times \vec{n})\, dS ,$$

и воспользуемся теоремой об изменении главного момента количества движения системы

$$\vec{m}_C = \rho \frac{d}{dt} \int_{S_1} \varphi(\vec{r}_M \times \vec{n})\, dS , \qquad (25)$$

где $\vec{m}_C$ – главный момент внешних сил относительно точки C.

В силу третьего закона Ньютона, со стороны жидкости на понтон будут действовать главный вектор $\vec{F}_1'$ и главный момент $\vec{m}_C'$ противоположного направления (противоположно нормали n):

$$\vec{F}_1' = -\rho \frac{d}{dt} \int_{S_1} \varphi \vec{n}\, dS ,$$

$$\vec{m}_C' = -\rho \frac{d}{dt} \int_{S_1} \varphi(\vec{r}_M \times \vec{n})\, dS . \qquad (26)$$

Учтем, что [9]

$$\vec{n} = cos(n,x)\vec{i} + cos(n,y)\vec{j} + cos(n,z)\vec{k} ,$$

$$\vec{r}_M \times \vec{n} = [y\cos(n,z) - z\cos(n,y)]\vec{i} +$$

$$+ [z\cos(n,x) - x\cos(n,z)]\vec{j} +$$

$$+ [x\cos(n,y) - y\cos(n,x)]\vec{k}$$

и подставим сюда формулы (13) и (14):

$$\vec{n} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\vec{i} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\vec{j} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial n}\vec{k} ,$$

$$\vec{r}_M \times \vec{n} = \frac{\partial\varphi_4}{\partial n}\vec{i} + \frac{\partial\varphi_5}{\partial n}\vec{j} + \frac{\partial\varphi_6}{\partial n}\vec{k} . \qquad (27)$$

Формулы (6) и (27) позволяют получить главный вектор в следующем виде:

$$\vec{F}_1' = -\rho \frac{d}{dt} \int_{S_1} \sum_{k=1}^{6} u_k \varphi_k \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\vec{i} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\vec{j} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial n}\vec{k} \right) dS =$$

$$-\rho \sum_{k=1}^{6} \dot{u}_k \int_{S_1} \varphi_k \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\vec{i} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\vec{j} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial n}\vec{k} \right) dS ,$$

координатами которого являются выражения

$$R_x = -\rho \sum_{k=1}^{6} \dot{u}_k \int_{S_1} \varphi_k \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} dS ,$$

$$R_y = -\rho \sum_{k=1}^{6} \dot{u}_k \int_{S_1} \varphi_k \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} dS , \qquad (28)$$

$$R_z = -\rho \sum_{k=1}^{6} \dot{u}_k \int_{S_1} \varphi_k \frac{\partial\varphi_3}{\partial n} dS ,$$

где точками обозначены производные по времени.

Аналогично находим главный момент

$$\vec{m}_C' = -\rho \sum_{k=1}^{6} \dot{u}_k \int_{S_1} \varphi_k \left(\frac{\partial\varphi_4}{\partial n}\vec{i} + \frac{\partial\varphi_5}{\partial n}\vec{j} + \frac{\partial\varphi_6}{\partial n}\vec{k} \right) dS$$

составляющие которого суть

$$m_x = -\rho \sum_{k=1}^{6} \dot{u}_k \int_{S_1} \varphi_k \frac{\partial\varphi_4}{\partial n} dS ,$$

$$m_y = -\rho \sum_{k=1}^{6} \dot{u}_k \int_{S_1} \varphi_k \frac{\partial\varphi_5}{\partial n} dS , \qquad (29)$$

$$m_z = -\rho \sum_{k=1}^{6} \dot{u}_k \int_{S_1} \varphi_k \frac{\partial\varphi_6}{\partial n} dS .$$

Силы (28) и моменты (29) имеют гидродинамическую природу, поскольку содержат функции φ_k, и, следовательно, являются результатом воздействия движущейся жидкости на плавающий понтон. Объединяя формулы (28) и (29), получим выражение для гидродинамических сил в компонентной

$$R_k = -\sum_{k=1}^{6} M_{jk} \cdot \dot{u}_k , \quad j = 1,2,...6 , \qquad (30)$$

или в матричной форме

$$R = -M \cdot \dot{U} , \qquad (31)$$

где M и $\dot{U}$ – матрица и вектор-столбец соответственно:

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} & M_{16} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} & M_{26} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} & M_{36} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} & M_{46} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} & M_{56} \\ M_{61} & M_{62} & M_{63} & M_{64} & M_{65} & M_{66} \end{pmatrix}$$

$$\dot{U} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \\ \dot{u}_5 \\ \dot{u}_6 \end{pmatrix} , \qquad (32)$$

причем элементы матрицы, как следует из (28) и (29), определяются по формуле

$$M_{jk} = \rho \int_{S_1} \varphi_k \frac{\partial\varphi_j}{\partial n} dS . \qquad (33)$$

и обладают, в силу (8), свойством симметрии.

Величины M_{jk} имеют четкий физический смысл в зависимости от значений j и k. Чтобы выяснить это, найдем некоторые из величин M_{jk}. Так,

$$M_{33} = \rho \int_{S_1} \varphi_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} dS = \rho \int_{S_1} \varphi_3 \cos(n,z) dS =$$

$$= \rho \int_{V_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} dV = \rho \int_{V_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial z} dV = \rho \int_{V_1} dV = \rho V_1 \quad (34)$$

представляет собой массу жидкости в объеме V_1.

Выполняя подобные рассуждения для M_{11}, M_{12},... M_{23}, убеждаемся в том, что они имеют аналогичный физический смысл.

Отыскав величину

$$M_{34} = \rho \int_{S_1} \varphi_3 \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} dS =$$

$$= \rho \int_{S_1} \varphi_3 [y \cos(n,z) - z \cos(n,y)] dS =$$

$$= \rho \left(\int_{V_1} y \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} dm - \int_{V_1} z \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} dm \right) = \quad (35)$$

$$= \rho \left(\int_{V_1} y \cos(n,z) dm - \int_{V_1} z \cos(n,y) dm \right)$$

видим, что каждое ее слагаемое является статическим моментом массы. Но поскольку рассматриваемый понтон симметричен относительно плоскостей xOz и yOz, все его статические моменты равны нулю [11]. Можно утверждать, что для рассматриваемого понтона равны нулю и все M_{jk} при $j = 1, 2, 3$, $k = 4, 5, 6$ или $j = 4, 5, 6$, $k = 1, 2, 3$.

Найдя

$$M_{44} = \rho \int_{S_1} \varphi_4 \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} dS = \int_{V_1} y^2 \cos(n,z) dm -$$

$$- \int_{V_1} yz \cos(n,y) dm - \int_{V_1} zy \cos(n,z) dm + \quad (36)$$

$$+ \int_{V_1} z^2 \cos(n,y) dm$$

замечаем, что она состоит из моментов инерции и центробежных моментов массы. Ввиду симметричности рассматриваемого понтона относительно плоскостей xOz и yOz, его центробежные моменты равны нулю [11], поэтому в (36) остаются только моменты инерции. Следовательно, M_{44} – сумма двух моментов инерции массы. То же самое можно сказать и о величинах M_{jk}, если $j, k = 4, 5, 6$.

Из рисунка видно, что угол между нормалью n и осью x является прямым, поэтому $\cos(n,x) = 0$, в силу чего соотношения (13) и (14) упрощаются:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \cos(n,y), \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} = \cos(n,z),$$

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial n} = y \cos(n,z) - z \cos(n,y),$$

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial n} = -x \cos(n,z), \quad \frac{\partial \varphi_6}{\partial n} = x \cos(n,y). \quad (37)$$

Подставляя первую из формул (37) в формулу (33), убеждаемся в том, что все элементы $M_{1k} = M_{k1}$ матрицы (32) обращаются в нуль.

Анализ полученных величин M_{jk} показывает, что матрица (32) упрощается к виду:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{66} \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Тогда из (31) с учетом (38) вытекает, что составляющие гидродинамической нагрузки

$$R_2 = -M_{22} \cdot \dot{u}_2, \quad R_3 = -M_{33} \cdot \dot{u}_3,$$

$$R_4 = -M_{44} \cdot \dot{u}_4, \quad R_5 = -M_{55} \cdot \dot{u}_5,$$

$$R_6 = -M_{66} \cdot \dot{u}_6.$$

Далее учитываем, что вдоль поверхности жидкости понтон не перемещается и не рыскает (т. е. не вращается относительно оси z), поэтому $\dot{u}_2 = 0$, $\dot{u}_6 = 0$. Но тогда R_2 и R_6 будут также равны нулю и, следовательно, на понтон будут действовать только силы R_3, R_4, R_5, которым соответствуют величины M_{33}, M_{44}, M_{55}.

Согласно изложенному, в равенстве (31) для определения матрицы и вектора-столбца можно использовать формулы

$$M = \begin{pmatrix} M_{33} & 0 & 0 \\ 0 & M_{44} & 0 \\ 0 & 0 & M_{55} \end{pmatrix}, \quad \dot{U} = \begin{pmatrix} \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \\ \dot{u}_5 \end{pmatrix}$$

взамен формул (32).

Переходя к обозначениям, принятым в [12]:

$$\dot{u}_3 \to \ddot{\zeta}, \quad \dot{u}_4 \to \ddot{\theta}, \quad \dot{u}_5 \to \ddot{\psi},$$

перепишем формулы для определения гидродинамических сил в виде

$$R_3 = -M_{33} \cdot \ddot{\zeta}, \quad R_4 = -M_{44} \cdot \ddot{\theta},$$

$$R_5 = -M_{55} \cdot \ddot{\psi}, \quad (39)$$

где ζ – вертикальное перемещение центра масс понтона; θ – угол поворота (крен) относительно продольной оси Ox; ψ – угол поворота (дифферент) относительно оси Oy, а точками, по-прежнему, обозначены производные по времени.

Кроме гидродинамических сил, на понтон действует архимедова сила [3]

$$N = -\rho g S_0 \zeta, \quad (40)$$

противоположная вертикальному перемещению понтона ζ относительно положения его равновесия, и два восстанавливающих момента [3]

$$M_B^{(x)} = -P \cdot h_0 \cdot \theta, \quad M_B^{(y)} = -P \cdot H_0 \cdot \psi, \quad (41)$$

противоположных крену и дифференту. В форму-

лах (40) и (41) S_0, h_0, H_0 – площадь ватерлинии понтона и его поперечная и продольная метацентрические высоты соответственно, вычисленные в [2]; P – вес понтона и находящегося на нем водоотливного оборудования.

Поскольку действующие на понтон силы являются результирующими гидродинамических и восстанавливающих сил, добавляя к формулам (39) формулы (40) и (41), получим

$$R_z = R_3 + N = -M_{33}\ddot{\zeta} - \rho g S_0 \zeta,$$

$$m_x = R_4 + M_B^{(x)} = -M_{44}\ddot{\theta} - Ph_0\theta,$$

$$m_y = R_5 + M_B^{(y)} = -M_{55}\ddot{\psi} - PH_0\psi.$$

В силу полученных формул, уравнения движения понтона [13]

$$m\ddot{\zeta} = R_z, \quad J_x\ddot{\theta} = m_x, \quad J_y\ddot{\psi} = m_y$$

представляются в виде

$$\begin{aligned} (m + M_{33})\ddot{\zeta} + \rho g S_0 \zeta &= 0, \\ (J_x + M_{44})\ddot{\theta} + Ph_0\theta &= 0, \\ (J_y + M_{55})\ddot{\psi} + PH_0\psi &= 0, \end{aligned} \qquad (42)$$

где I_x, I_y – моменты инерции массы понтона относительно осей, параллельных осям Ox и Oy; m – масса понтона и находящегося на нем водоотливного оборудования.

Уравнения (42) показывают, что воздействие на понтон гидродинамических сил проявляется в увеличении инерционных характеристик понтона (массы и моментов инерции) на величины M_{33}, M_{44}, M_{55}, M_{33}, называемые присоединенными массами жидкости. Соответственно этому матрицы в формулах (32), (38) – матрицы присоединенных масс жидкости.

Дальнейший анализ уравнений (42) выявляет колебательный характер [10] движения понтона, которое в терминах теории корабля [12] будем называть качкой понтона. В частности, первое уравнение (42) описывает вертикальную качку, второе и третье – боковую и килевую качки. Поскольку уравнения (42) изолированные, все три вида качки независимы друг от друга.

ВЫВОДЫ

1. Показано, что движущийся понтон испытывает воздействие сил двух типов. К первому относятся гидродинамические силы, результатом которых являются присоединенные массы жидкости. Второй тип определяется условиями статической остойчивости понтона.

2. Установлено, что вследствие конструктивных особенностей понтона и условий его движения в зумпфах угольных разрезов, квадратная матрица 6×6, сформированная из присоединенных масс жидкости, сводится к диагональной матрице размером 3×3.

3. Диагональная структура матрицы присоединенных масс жидкости существенно упрощает задачу о движении понтона, сводя ее к решению системы трех изолированных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, анализ которых показывает, что понтон в зумпфе угольного разреза совершает периодические движения, представляющие собой вертикальную, боковую и килевую качки, происходящие независимо друг от друга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кучер, Н. А.* Условия безопасного применения плавучих водоотливных установок / С. В. Черданцев, С. И. Протасов, С.Н. Подображин, В.В. Билибин // Безопасность труда в промышленности. – 2003, № 1. С. 12 –14.

2. *Черданцев, С. В.* Теоретические основы расчета понтонов, используемых на угольных разрезах // ФТПРПИ. – 2013. – № 1. – С. 61 – 69.

3. Статика корабля / Р.В. Борисов, В.В. Луговский, Б.М. Мирохин, В.В. Рождественский – СПб.: Судостроение, 2005. – 240 с.

4. *Черданцев, С. В.* Постановка задачи о гравитационных волнах жидкости в зумпфах угольных разрезов // Вестник КузГТУ. – 2012. – № 6. – С. 10 – 12.

5. *Кирхгоф, Г.* Механика. Лекции по математической физике. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 404 с.

6. *Арсенин, В. Я.* Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1984. – 384 с.

7. *Кочин, Н. Е.* Теоретическая гидромеханика. Т. 1. / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, И.В. Розе – М.: Физматгиз, 1963. – 584 с.

8. *Некрасов, А. И.* Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика. – М.: Гостехиздат, 1953. – 504 с.

9. *Кочин, Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: Наука, 1965. – 427 с.

10. *Смирнов, В. И.* Курс высшей математики, т. 2. – М.: Наука, 1974. – 656 с.

11. *Беляев, Н. М.* Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1965. – 856 с.

12. *Ремез, Ю. В.* Качка корабля. – Л. : Судостроение, 1983. – 328 с.

13. *Черданцев, С. В.* Уравнения движения понтонов в зумпфах угольных разрезов // Вестник КузГТУ. – 2013. – № 1. – С. 7 – 10.

Авторы статьи

Черданцев
Сергей Васильевич,
доктор техн. наук, проф. каф. математики КузГТУ
E–mail: svch01@yandex.ru

Черданцев
Николай Васильевич ,
докт. техн. наук, зав. лаб. геомеханики угольных месторождений Института угля СО РАН.
E-mail: cherdantsevnv@icc.kemsc.ru