

ГЕОМЕХАНИКА

УДК 622.272: 516.02

С.В. Черданцев, Н.В. Черданцев

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ПОНТОНОВ В ЗУМПФАХ УГОЛЬНЫХ РАЗРЕЗОВ

При разработке угольных месторождений открытым способом необходимы зумпфы для стока грунтовых и подземных вод, которые откачивают для предотвращения затопления забоя. Для этого используют плавучие средства в виде понтонов с установленным на них водоотливным оборудованием.

Проблема использования понтонов на угольных разрезах уже обсуждалась в ряде работ. В частности, в [1] расчетная схема понтона, представляющая собой трехсвязную плавающую область, заменена эквивалентной односвязной областью, плавучесть и остойчивость которой выявлена на основе теорем Дюпена.

Более детально плавучесть и остойчивость понтонов исследованы в работе [2], для чего использовались основные теоремы и фундаментальные положения статики корабля [3].

Нами предпринята попытка обсудить задачу о движении понтонов в зумпфах угольных разрезов и выявить формы этого движения.

Особенность данной задачи заключается в том, что действующие на понтон силы заранее неизвестны, а проявляются лишь во взаимодействии понтона с движущейся жидкостью по следующей схеме. Вначале под действием какого-либо внешнего возмущения нарушается равновесие понтона, что в свою очередь нарушает равновесие жидкости в его окрестности и приводит ее в движение. Движущаяся жидкость создает гидродинамические силы и инициирует движение понтона, которое при определенных условиях может быть неустойчивым, в результате чего понтон мо-

жет опрокинуться.

С целью выявления гидродинамических сил, действующих на понтон, рассмотрим задачу о движении жидкости в зумпфах угольных разрезов. Постановка задачи сформулирована в [4], где отмечено, что движение жидкости в зумпфах безвихревое и поэтому скорость жидкости \vec{v} представлена как

$$\vec{v} = \nabla \varphi, \quad (1)$$

где $\varphi = \varphi(x, y, z)$ – потенциал скорости жидкости, удовлетворяющий в любой точке внутри V уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0, \quad (2)$$

условию на поверхности жидкости

$$g \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (3)$$

и условию на границе S области V

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|_S = 0. \quad (4)$$

В формулах (1) – (4) x, y, z – декартовы координаты, жестко связанные с понтоном (рисунок); t – время; g – ускорение свободного падения; ν – внутренняя нормаль к S (направлена внутрь объема V); Δ – оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

∇ – оператор Гамильтона:

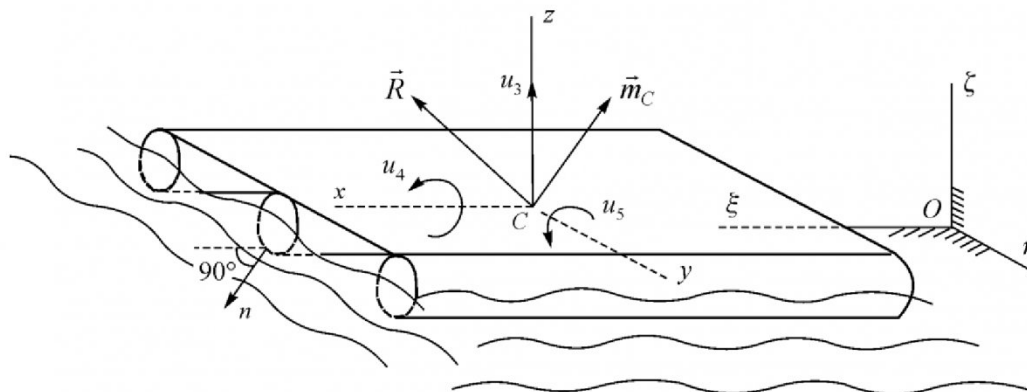


Рис. 1. Расчетная схема понтона в зумпфе угольного разреза

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},$$

где \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} – единичные векторы координатных осей x, y, z .

Построение решения задачи (2) – (4) начнем с того, что, воспользовавшись принципом суперпозиции, представим искомую функцию $\varphi(x, y, z)$ как [5]

$$\varphi = u_{Cx}\varphi_1 + u_{Cy}\varphi_2 + u_{Cz}\varphi_3 + \omega_x\varphi_4 + \omega_y\varphi_5 + \omega_z\varphi_6, \quad (5)$$

где u_{Cx} , u_{Cy} , u_{Cz} – компоненты вектора скорости центра масс (точка C) понтона, а ω_x , ω_y , ω_z – компоненты его угловой скорости относительно осей x, y, z .

Для удобства и каноничности примем следующий порядок записи:

$$u_{Cx} = u_1, \quad u_{Cy} = u_2, \quad u_{Cz} = u_3,$$

$$\omega_x = u_4, \quad \omega_y = u_5, \quad \omega_z = u_6,$$

тогда формула (5) приобретает компактную форму

$$\varphi = \sum_{k=1}^6 u_k \varphi_k. \quad (6)$$

Полагая в (6)

$$u_1 = 1 \text{ м/с}, \quad u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = u_6 = 0,$$

убеждаемся в том, что функция φ_1 представляет собой потенциал скоростей возмущенного движения жидкости, вызванного равномерным поступательным движением понтона вдоль оси Ox со скоростью, равной единице. Функции φ_2 , φ_3 имеют аналогичный смысл при движении понтона соответственно вдоль осей Oy и Oz .

Положив в (6)

$$u_4 = 1 \text{ м/с}, \quad u_1 = u_2 = u_3 = u_5 = u_6 = 0,$$

замечаем, что функция φ_4 есть потенциал возмущенного движения жидкости, вызванного равномерным вращением понтона вокруг оси Ox с единичной угловой скоростью.

Функции φ_5 и φ_6 имеют идентичный смысл, причем первая из них соответствует вращению понтона вокруг оси Oy , а вторая – вокруг оси Oz .

Поскольку потенциал φ является гармонической функцией, то каждая из составляющих функций φ_k также гармоническая и, следовательно, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 6 \quad (7)$$

в области V . В силу этого обстоятельства вторая формула Грина [6] для любых двух функций φ_k и φ_j

$$\int_V (\varphi_k \Delta \varphi_j - \varphi_j \Delta \varphi_k) dV = \int_S \left(\varphi_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial \nu} - \varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} \right) dS$$

приобретает вид

$$\int_S \varphi_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial \nu} dS = \int_S \varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} dS. \quad (8)$$

Кроме условий (3) и (4), следует учесть, что на поверхности S_1 той части понтона, которая находится под водой, должно выполняться условие обтекания [7]. Для идеальной жидкости оно заключается в том, что нормальная u_n составляющая скорости произвольной точки M , принадлежащей поверхности S_1 , и нормальная составляющая скорости частицы жидкости v_n , совпадающей с точкой M , должны быть равны между собой. Следовательно, условие обтекания выразится как

$$u_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{S_1}, \quad (9)$$

где n – внешняя нормаль к поверхности S_1 понтона в точке M (направлена внутрь области V). В силу (6), условие обтекания (9) перепишем как

$$u_n = \frac{\partial}{\partial n} \left(\sum_{k=1}^6 u_k \varphi_k \right) = \sum_{k=1}^6 u_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} = u_1. \quad (10)$$

С другой стороны, скорость произвольной точки M понтона найдем по формуле [8]

$$\vec{u}_M = \vec{u}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_M,$$

где \vec{r}_M – радиус-вектор точки M . Учитывая правило векторного умножения векторов [9], полученную формулу перепишем следующим образом:

$$\vec{u}_M = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k} + (u_5 z - u_6 y) \vec{i} - (u_4 z - u_6 x) \vec{j} + (u_4 y - u_5 x) \vec{k},$$

откуда

$$u_{Mx} = u_1 + u_5 z - u_6 y, \quad u_{My} = u_2 + u_6 x - u_4 z,$$

$$u_{Mz} = u_3 + u_4 y - u_5 x. \quad (11)$$

Выразив нормальную u_n составляющую скорости через ее координаты

$$u_n = u_{Mx} \cos(n, x) + u_{My} \cos(n, y) + u_{Mz} \cos(n, z)$$

и подставляя сюда формулы (11), получим

$$u_n = u_1 \cos(n, x) + u_2 \cos(n, y) + u_3 \cos(n, z) + u_4 [y \cos(n, z) - z \cos(n, y)] + u_5 [z \cos(n, x) - x \cos(n, z)] + u_6 [x \cos(n, y) - y \cos(n, x)]. \quad (12)$$

Сопоставляя (10) и (12) и сравнивая в них коэффициенты при u_k с одинаковыми индексами k , имеем следующие соотношения:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \cos(n, x), \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \cos(n, y),$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial n} = \cos(n, z), \quad (13)$$

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial n} = y \cos(n, z) - z \cos(n, y),$$

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial n} = z \cos(n, x) - x \cos(n, z), \quad (14)$$

$$\frac{\partial \varphi_6}{\partial n} = x \cos(n, y) - y \cos(n, x),$$

вполне определяющие функции φ_k , которые, как видно из (13) и (14), не зависят от скорости движения понтона и зависят лишь от его формы.

Формулы (13) и (14) дадут возможность оценить влияние на движущийся понтон идеальной жидкости, которая не оказывает сопротивления движению понтона, но создает на него гидродинамические силы [7]. Для их определения рассмотрим движение подводной части понтона V_1 , поверхностью которой является S_1 . Очевидно, что объем, заключенный между поверхностями S и S_1 ,

$$\Delta V = V - V_1,$$

а вектор количества движения жидкости в объеме ΔV найдем по формуле

$$\vec{Q} = \int_{\Delta V} \rho \vec{v} dV,$$

где ρ – плотность жидкости в зумпфе; dV – бесконечно малый элемент области ΔV . В силу формулы (1) и свойства кратных интегралов [10], приведем полученную формулу к выражению

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= \int_{\Delta V} \nabla(\rho \varphi) dV = \\ &= \rho \int_{V-V_1} \nabla \varphi dV = \rho \int_V \nabla \varphi dV - \rho \int_{V_1} \nabla \varphi dV, \end{aligned} \quad (15)$$

где с помощью формулы Остроградского – Гаусса [10] перейдем от интегралов по областям V и V_1 к интегралам по поверхностям S и S_1 , ограничивающим эти области. В результате формула (15) приобретает вид

$$\vec{Q} = \rho \int_S \varphi \cdot \vec{v} dS - \rho \int_{S_1} \varphi \cdot \vec{n} dS.$$

Производная от вектора \vec{Q}

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \int_S \varphi \cdot \vec{v} dS - \rho \frac{d}{dt} \int_{S_1} \varphi \cdot \vec{n} dS \quad (16)$$

равна векторной сумме массовых и поверхностных сил:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{G} + \vec{\mathfrak{R}} - \vec{F}_1, \quad (17)$$

где \vec{G} – главный вектор массовых сил; $\vec{\mathfrak{R}}$ – главный вектор поверхностных сил, приложенных к жидкости в объеме ΔV со стороны поверхности S ; \vec{F}_1 – главный вектор поверхностных сил, приложенных к жидкости в том же объеме ΔV со стороны понтона через поверхность S_1 . Поскольку направление этого вектора противоположно нормали ν , в равенстве (17) он взят со знаком минус.

Вектор \vec{G} , очевидно, равен весу жидкости в объеме ΔV :

$$\vec{G} = -\rho g \Delta V \vec{k} = -\rho g (V - V_1) \vec{k} = -\rho g V \vec{k} + \rho g V_1 \vec{k} \quad (18)$$

Вектор $\vec{\mathfrak{R}}$ представляет собой реакцию на силы давления жидкости \vec{F}_1 , действующие на поверхность S . Полагая скорость жидкости малой величиной, силы давления найдем из интеграла Лагранжа – Коши [7]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + gz + \frac{p - p_0}{\rho} = 0,$$

откуда

$$p = p_0 - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho g z$$

и, следовательно,

$$\vec{F} = \int_S p \vec{v} dS = \int_S p_0 \vec{v} dS - \rho \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{v} dS - \rho g \int_S z \vec{v} dS \quad (19)$$

где p_0 и p – давление жидкости на стенки зумпфа в начальный и текущий моменты времени t .

Так как $p_0 = const$, а поверхность S замкнута, то [9, 10]

$$\int_S p_0 \cdot \vec{v} dS = p_0 \int_S \vec{v} dS = 0. \quad (20)$$

Второй интеграл в (19) приводим к виду

$$\rho \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{v} dS = \rho \frac{d}{dt} \int_S \varphi \vec{v} dS, \quad (21)$$

а последний интеграл в (19) преобразуем по формуле Остроградского – Гаусса:

$$\rho g \int_S z \vec{v} dS = \rho g \int_V \nabla z dV = \rho g \int_V \vec{k} dV = \rho g V \cdot \vec{k}. \quad (22)$$

В силу (20) – (22), формула (19) приобретает вид

$$\vec{F} = -\rho \frac{d}{dt} \int_S \varphi \vec{v} dS - \rho g V \cdot \vec{k}$$

и, поскольку $\vec{\mathfrak{R}} = -\vec{F}$,

$$\vec{\mathfrak{R}} = \rho \frac{d}{dt} \int_S \varphi \vec{v} dS + \rho g V \cdot \vec{k}. \quad (23)$$

Подставляя (16), (18) и (23) в (17), получим

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} \int_S \varphi \vec{v} dS - \rho \frac{d}{dt} \int_{S_1} \varphi \vec{n} dS = \\ = -\rho g V \vec{k} + \rho g V_1 \vec{k} + \rho \frac{d}{dt} \int_S \varphi \vec{v} dS + \rho g V \vec{k} - \vec{F}_1 \end{aligned}$$

откуда

$$\vec{F}_1 = \rho g V_1 \vec{k} + \rho \frac{d}{dt} \int_{S_1} \varphi \vec{n} dS. \quad (24)$$

Первый член в (24) является архимедовой силой плавучести и так как она уравновешивается весом понтона, то в дальнейшем ее учитывать не будем. Второй член в (24) обусловлен движением жидкости, поскольку содержит потенциал скоро-

стей $\varphi(x,y,z)$.

Главный вектор момента количества движения жидкости найдем по формуле

$$\vec{K}_C = \int_{V_I} (\vec{r}_M \times \rho \vec{v}) dV,$$

которую с помощью формулы Остроградского – Гаусса приведем к виду

$$\vec{K}_C = \rho \int_{S_I} \varphi (\vec{r}_M \times \vec{n}) dS,$$

и воспользуемся теоремой об изменении главного момента количества движения системы

$$\vec{m}_C = \rho \frac{d}{dt} \int_{S_I} \varphi (\vec{r}_M \times \vec{n}) dS, \quad (25)$$

где \vec{m}_C – главный момент внешних сил относительно точки C .

В силу третьего закона Ньютона, со стороны жидкости на понтон будут действовать главный вектор \vec{F}'_I и главный момент \vec{m}'_C противоположного направления (противоположно нормали n):

$$\begin{aligned} \vec{F}'_I &= -\rho \frac{d}{dt} \int_{S_I} \varphi \vec{n} dS, \\ \vec{m}'_C &= -\rho \frac{d}{dt} \int_{S_I} \varphi (\vec{r}_M \times \vec{n}) dS. \end{aligned} \quad (26)$$

Учтем, что [9]

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \cos(n,x)\vec{i} + \cos(n,y)\vec{j} + \cos(n,z)\vec{k}, \\ \vec{r}_M \times \vec{n} &= [y \cos(n,z) - z \cos(n,y)]\vec{i} + \\ &+ [z \cos(n,x) - x \cos(n,z)]\vec{j} + \\ &+ [x \cos(n,y) - y \cos(n,x)]\vec{k} \end{aligned}$$

и подставим сюда формулы (13) и (14):

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \vec{i} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \vec{j} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} \vec{k}, \\ \vec{r}_M \times \vec{n} &= \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} \vec{i} + \frac{\partial \varphi_5}{\partial n} \vec{j} + \frac{\partial \varphi_6}{\partial n} \vec{k}. \end{aligned} \quad (27)$$

Формулы (6) и (27) позволяют получить главный вектор в следующем виде:

$$\begin{aligned} \vec{F}'_I &= -\rho \frac{d}{dt} \int_{S_I} \sum_{k=1}^6 u_k \varphi_k \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \vec{i} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \vec{j} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} \vec{k} \right) dS = \\ &= -\rho \sum_{k=1}^6 \dot{u}_k \int_{S_I} \varphi_k \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \vec{i} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \vec{j} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} \vec{k} \right) dS, \end{aligned}$$

координатами которого являются выражения

$$\begin{aligned} R_x &= -\rho \sum_{k=1}^6 \dot{u}_k \int_{S_I} \varphi_k \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS, \\ R_y &= -\rho \sum_{k=1}^6 \dot{u}_k \int_{S_I} \varphi_k \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} dS, \end{aligned} \quad (28)$$

$$R_z = -\rho \sum_{k=1}^6 \dot{u}_k \int_{S_I} \varphi_k \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} dS,$$

где точками обозначены производные по времени.

Аналогично находим главный момент

$$\vec{m}'_C = -\rho \sum_{k=1}^6 \dot{u}_k \int_{S_I} \varphi_k \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial n} \vec{i} + \frac{\partial \varphi_5}{\partial n} \vec{j} + \frac{\partial \varphi_6}{\partial n} \vec{k} \right) dS$$

составляющие которого суть

$$\begin{aligned} m_x &= -\rho \sum_{k=1}^6 \dot{u}_k \int_{S_I} \varphi_k \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} dS, \\ m_y &= -\rho \sum_{k=1}^6 \dot{u}_k \int_{S_I} \varphi_k \frac{\partial \varphi_5}{\partial n} dS, \quad (29) \\ m_z &= -\rho \sum_{k=1}^6 \dot{u}_k \int_{S_I} \varphi_k \frac{\partial \varphi_6}{\partial n} dS. \end{aligned}$$

Силы (28) и моменты (29) имеют гидродинамическую природу, поскольку содержат функции φ_k , и, следовательно, являются результатом воздействия движущейся жидкости на плавающий понтон. Объединяя формулы (28) и (29), получим выражение для гидродинамических сил в компонентной

$$R_k = -\sum_{j=1}^6 M_{jk} \cdot \dot{u}_j, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad (30)$$

или в матричной форме

$$R = -M \cdot \dot{U}, \quad (31)$$

где M и \dot{U} – матрица и вектор-столбец соответственно:

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} & M_{16} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} & M_{26} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} & M_{36} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} & M_{46} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} & M_{56} \\ M_{61} & M_{62} & M_{63} & M_{64} & M_{65} & M_{66} \end{pmatrix}, \quad \dot{U} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \\ \dot{u}_5 \\ \dot{u}_6 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

причем элементы матрицы, как следует из (28) и (29), определяются по формуле

$$M_{jk} = \rho \int_{S_I} \varphi_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} dS. \quad (33)$$

и обладают, в силу (8), свойством симметрии.

Величины M_{jk} имеют четкий физический смысл в зависимости от значений j и k . Чтобы выяснить это, найдем некоторые из величин M_{jk} . Так,

$$\begin{aligned} M_{33} &= \rho \int_{S_1} \varphi_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} dS = \rho \int_{S_1} \varphi_3 \cos(n, z) dS = \\ &= \rho \int_{V_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} dV = \rho \int_{V_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial z} dV = \rho \int_{V_1} dV = \rho V_1 \end{aligned} \quad (34)$$

представляет собой массу жидкости в объеме V_1 .

Выполняя подобные рассуждения для M_{11} , M_{12} , ... M_{23} , убеждаемся в том, что они имеют аналогичный физический смысл.

Отыскав величину

$$\begin{aligned} M_{34} &= \rho \int_{S_1} \varphi_3 \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} dS = \\ &= \rho \int_{S_1} \varphi_3 [y \cos(n, z) - z \cos(n, y)] dS = \\ &= \rho \left(\int_{V_1} y \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} dm - \int_{V_1} z \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} dm \right) = \\ &= \rho \left(\int_{V_1} y \cos(n, z) dm - \int_{V_1} z \cos(n, y) dm \right) \end{aligned} \quad (35)$$

видим, что каждое ее слагаемое является статическим моментом массы. Но поскольку рассматриваемый понтон симметричен относительно плоскостей xOz и yOz , все его статические моменты равны нулю [11]. Можно утверждать, что для рассматриваемого понтона равны нулю и все M_{jk} при $j = 1, 2, 3, k = 4, 5, 6$ или $j = 4, 5, 6, k = 1, 2, 3$.

Найдя

$$\begin{aligned} M_{44} &= \rho \int_{S_1} \varphi_4 \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} dS = \int_{V_1} y^2 \cos(n, z) dm - \\ &- \int_{V_1} yz \cos(n, y) dm - \int_{V_1} zy \cos(n, z) dm + \\ &+ \int_{V_1} z^2 \cos(n, y) dm \end{aligned} \quad (36)$$

замечаем, что она состоит из моментов инерции и центробежных моментов массы. Ввиду симметричности рассматриваемого понтона относительно плоскостей xOz и yOz , его центробежные моменты равны нулю [11], поэтому в (36) остаются только моменты инерции. Следовательно, M_{44} – сумма двух моментов инерции массы. То же самое можно сказать и о величинах M_{jk} , если $j, k = 4, 5, 6$.

Из рисунка видно, что угол между нормалью n и осью x является прямым, поэтому $\cos(n, x) = 0$, в силу чего соотношения (13) и (14) упрощаются:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= 0, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \cos(n, y), \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} = \cos(n, z), \\ \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} &= y \cos(n, z) - z \cos(n, y), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial n} = -x \cos(n, z), \quad \frac{\partial \varphi_6}{\partial n} = x \cos(n, y). \quad (37)$$

Подставляя первую из формул (37) в формулу (33), убеждаемся в том, что все элементы $M_{ik} = M_{ki}$ матрицы (32) обращаются в нуль.

Анализ полученных величин M_{jk} показывает, что матрица (32) упрощается к виду:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{66} \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Тогда из (31) с учетом (38) вытекает, что составляющие гидродинамической нагрузки

$$\begin{aligned} R_2 &= -M_{22} \cdot \dot{u}_2, \quad R_3 = -M_{33} \cdot \dot{u}_3, \\ R_4 &= -M_{44} \cdot \dot{u}_4, \quad R_5 = -M_{55} \cdot \dot{u}_5, \\ R_6 &= -M_{66} \cdot \dot{u}_6. \end{aligned}$$

Далее учитываем, что вдоль поверхности жидкости понтон не перемещается и не рыскает (т. е. не вращается относительно оси z), поэтому $\dot{u}_2 = 0$, $\dot{u}_6 = 0$. Но тогда R_2 и R_6 будут также равны нулю и, следовательно, на понтон будут действовать только силы R_3, R_4, R_5 , которым соответствуют величины M_{33}, M_{44}, M_{55} .

Согласно изложенному, в равенстве (31) для определения матрицы и вектора-столбца можно использовать формулы

$$M = \begin{pmatrix} M_{33} & 0 & 0 \\ 0 & M_{44} & 0 \\ 0 & 0 & M_{55} \end{pmatrix}, \quad \dot{U} = \begin{pmatrix} \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \\ \dot{u}_5 \end{pmatrix}$$

взамен формул (32).

Переходя к обозначениям, принятым в [12]:

$$\dot{u}_3 \rightarrow \dot{\zeta}, \quad \dot{u}_4 \rightarrow \dot{\theta}, \quad \dot{u}_5 \rightarrow \dot{\psi},$$

перепишем формулы для определения гидродинамических сил в виде

$$\begin{aligned} R_3 &= -M_{33} \cdot \dot{\zeta}, \quad R_4 = -M_{44} \cdot \dot{\theta}, \\ R_5 &= -M_{55} \cdot \dot{\psi}, \end{aligned} \quad (39)$$

где ζ – вертикальное перемещение центра масс понтона; θ – угол поворота (крен) относительно продольной оси Ox ; ψ – угол поворота (дифферент) относительно оси Oy , а точками, по-прежнему, обозначены производные по времени.

Кроме гидродинамических сил, на понтон действует архимедова сила [3]

$$N = -\rho g S_0 \zeta, \quad (40)$$

противоположная вертикальному перемещению понтона ζ относительно положения его равновесия, и два восстанавливающих момента [3]

$$M_B^{(x)} = -P \cdot h_0 \cdot \theta, \quad M_B^{(y)} = -P \cdot H_0 \cdot \psi, \quad (41)$$

противоположных крену и дифференту. В форму-

лах (40) и (41) S_0 , h_0 , H_0 – площадь ватерлинии понтона и его поперечная и продольная метацентрические высоты соответственно, вычисленные в [2]; P – вес понтона и находящегося на нем водоотливного оборудования.

Поскольку действующие на понтон силы являются результирующими гидродинамических и восстанавливающих сил, добавляя к формулам (39) формулы (40) и (41), получим

$$\begin{aligned} R_z &= R_3 + N = -M_{33}\ddot{\zeta} - \rho g S_0 \zeta, \\ m_x &= R_4 + M_B^{(x)} = -M_{44}\ddot{\theta} - Ph_0\theta, \\ m_y &= R_5 + M_B^{(y)} = -M_{55}\ddot{\psi} - PH_0\psi. \end{aligned}$$

В силу полученных формул, уравнения движения понтона [13]

$$m\ddot{\zeta} = R_z, \quad J_x\ddot{\theta} = m_x, \quad J_y\ddot{\psi} = m_y$$

представляются в виде

$$\begin{aligned} (m + M_{33})\ddot{\zeta} + \rho g S_0 \zeta &= 0, \\ (J_x + M_{44})\ddot{\theta} + Ph_0\theta &= 0, \\ (J_y + M_{55})\ddot{\psi} + PH_0\psi &= 0, \end{aligned} \quad (42)$$

где I_x , I_y – моменты инерции массы понтона относительно осей, параллельных осям Ox и Oy ; m – масса понтона и находящегося на нем водоотливного оборудования.

Уравнения (42) показывают, что воздействие на понтон гидродинамических сил проявляется в увеличении инерционных характеристик понтона (массы и моментов инерции) на величины M_{33} , M_{44} , M_{55} , M_{33} , называемые присоединенными массами жидкости. Соответственно этому матри-

цы в формулах (32), (38) – матрицы присоединенных масс жидкости.

Дальнейший анализ уравнений (42) выявляет колебательный характер [10] движения понтона, которое в терминах теории корабля [12] будем называть качкой понтона. В частности, первое уравнение (42) описывает вертикальную качку, второе и третье – боковую и килевую качки. Поскольку уравнения (42) изолированные, все три вида качки независимы друг от друга.

ВЫВОДЫ

1. Показано, что движущийся понтон испытывает воздействие сил двух типов. К первому относятся гидродинамические силы, результатом которых являются присоединенные массы жидкости. Второй тип определяется условиями статической устойчивости понтона.

2. Установлено, что вследствие конструктивных особенностей понтона и условий его движения в зумпфах угольных разрезов, квадратная матрица 6×6 , сформированная из присоединенных масс жидкости, сводится к диагональной матрице размером 3×3 .

3. Диагональная структура матрицы присоединенных масс жидкости существенно упрощает задачу о движении понтона, сводя ее к решению системы трех изолированных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, анализ которых показывает, что понтон в зумпфе угольного разреза совершает периодические движения, представляющие собой вертикальную, боковую и килевую качки, происходящие независимо друг от друга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кучер, Н. А. Условия безопасного применения плавучих водоотливных установок / С. В. Черданцев, С. И. Протасов, С.Н. Подображин, В.В. Билибин // Безопасность труда в промышленности. – 2003, № 1. С. 12 – 14.
2. Черданцев, С. В. Теоретические основы расчета понтонов, используемых на угольных разрезах // ФТПРПИ. – 2013. – № 1. – С. 61 – 69.
3. Статика корабля / Р.В. Борисов, В.В. Луговский, Б.М. Мирохин, В.В. Рождественский – СПб.: Судостроение, 2005. – 240 с.
4. Черданцев, С. В. Постановка задачи о гравитационных волнах жидкости в зумпфах угольных разрезов // Вестник КузГТУ. – 2012. – № 6. – С. 10 – 12.
5. Кирхгоф, Г. Механика. Лекции по математической физике. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 404 с.
6. Арсенин, В. Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1984. – 384 с.
7. Кочин, Н. Е. Теоретическая гидромеханика. Т. 1. / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, И.В. Розе – М.: Физматгиз, 1963. – 584 с.
8. Некрасов, А. И. Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика. – М.: Гостехиздат, 1953. – 504 с.
9. Кочин, Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: Наука, 1965. – 427 с.
10. Смирнов, В. И. Курс высшей математики, т. 2. – М.: Наука, 1974. – 656 с.
11. Беляев, Н. М. Соппротивление материалов. – М.: Наука, 1965. – 856 с.
12. Ремез, Ю. В. Качка корабля. – Л.: Судостроение, 1983. – 328 с.
13. Черданцев, С. В. Уравнения движения понтонов в зумпфах угольных разрезов // Вестник КузГТУ. – 2013. – № 1. – С. 7 – 10.

Авторы статьи

Черданцев
Сергей Васильевич,
доктор техн. наук, проф. каф. математики КузГТУ
E-mail: svch01@yandex.ru

Черданцев
Николай Васильевич,
докт. техн. наук, зав. лаб. геомеханики угольных месторождений Института угля СО РАН.
E-mail: cherdantsevnv@icc.kemsc.ru