ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

А.С. Сорокин

РАСПРОСТРАНЕНИЕ МЕТОДА МОНАХОВА В.Н. ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ (ЗАДАЧА P_0^h) НА КОНЕЧНОСВЯЗНЫЕ КРУГОВЫЕ ОБЛАСТИ В КЛАССЕ МУСХЕЛИШВИЛИ h_0

В последнее время удалось построить ряд интегральных представлений регулярной и однозначной в многосвязной круговой области функции, являющейся решением краевых задач в этой области, с явным заданием ядерных функций [1-7].

В связи с необходимостью преодоления эффектов многозначности, проявляющихся из-за многосвязности области, указываются дополнительные условия разрешимости .

В настоящей статье продолжаются исследования аналитических представлений решений краевых задач теории аналитических функций [2,3,6-8]. Цель данной работы - построение представления регулярной и однозначной в многосвязной круговой области функции, являющейся решением однородной смешанной задачи с параметрами (задача P_0^h) на конечносвязные круговые области в классе Мусхелишвили h_0 [8, с. 266].

Рассмотрим решение задачи P_0^h в классе многозначных аналитических функций.

Назовём классом Мусхелишвили $h\left(\hat{a}_{j,m}, j=1,\dots,q_m; m=0,1,\dots,n\right)$ класс аналитических функций (вообще многозначных) в $(n+1)-$связной круговой области K, ограниченных в граничных точках $\hat{a}_{j,m}, j=1,\dots,q_m;$ m=0,1….,n и неограниченных, быть может, в граничных точках $\hat{b}_{j,m}, j=q_m+1,\dots,2p_m;$ m=0,1….,n

Отметим, что функция

$$X_m(z;2p_m,q_m)=\prod_{j=1}^{q_m}\frac{\sqrt{z-\hat{a}_{j,m}}}{\sqrt[4]{a_m-\hat{a}_{j,m}}}\prod_{j=q_m+1}^{2p_m}\frac{\sqrt[4]{a_m-\hat{b}_{j,m}}}{\sqrt{z-\hat{b}_{j,m}}},$$

$$m=0,1,\dots,n, \tag{1}$$

принадлежит к классу Н.И.Мусхелишвили

$$h\left(\hat{a}_{j,m}, j=1,\dots,q_m;\ m=0,1,\dots,n\right).$$

Классы функций

$$h\left(\hat{a}_{j,m}, j=1,\dots,q_m; m=0,1,\dots,n\right)$$

и $h\left(\hat{a}_{j,m}, j=q_m+1,\dots,2p_m;\ m=0,1,\dots,n\right)$ будем называть союзными. Класс, соответствующий $q_m=0$, m=0,1….,n, обозначим через h_0, а класс $h\left(\hat{a}_{j,m}, j=1,\dots,2p_m;\ m=0,1\dots,n\ \right)$ через h_{2p_m}.

Здесь и в дальнейшем считаем, что множество граничных точек

$$a_{j,m}; b_{j,m}, j=1,\dots,p_m; m=1,\dots,n,$$

разбито на подмножества

$$\hat{a}_{j,m}, j=1,\dots,q_m,\ \ m=0,1\dots,n$$

и $\hat{b}_{j,m}, j=q_m+1,\dots,2p_m;\ m=0,1,\dots,n.$

Пусть

$$\kappa_m=p_m-q_m,\quad m=0,1\dots,n \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует

$$0\le q_m\le 2p_m,\ m=0,1,\dots,n,$$

$$-p_m\le\kappa_m\le p_m,\ \ m=0,1,\dots,n. \tag{3}$$

Далее, пусть

$$\Delta'=\sum_{m=0}^{n}\Delta'_m, \tag{4}$$

где

$$\Delta'_m=\begin{cases}-\kappa_m,\ \kappa_m<0,\\ 0,\ \ \kappa_m>0.\end{cases}$$

Пусть функция $\Phi_0(z)$ аналитическая в (n+1) - связной круговой области K, полученной как пересечение круга $|z|<R_0$ с внешностью кругов $|z-a_k|>R_k, k=1,\dots,n.$ Пусть на граничных компонентах $C_k(\zeta):|\zeta-a_k|=R_k$, k=0,1….,n заданы точки

$$a_{1,k};b_{1,k};\ \ a_{2,k};b_{2,k};\ \ \dots;\ a_{p_k,k};b_{p_k,k}\ , \tag{5}$$

расположенные в том порядке, в котором они выписаны. Пусть вещественная часть функции $\Phi_0(z)$ на дугах $\gamma_k: a_{j,k}; b_{j,k}\ , j=1,\dots,p_k$,

k=0,1….,n и мнимая часть $\Phi_0(z)$ на дугах

$$\gamma'_k : b_{j,k}; a_{j+1,k} \ , j = 1,..., p_k ;$$
$$a_{p_k+1,k} = a_{1,k}; k = 0,1,..., n,$$

принимает значение нуль.

Отметим, что общее решение класса h_0 однородной смешанной задачи в односвязной области D_k дается формулой [8, гл. 4, §94]

$$\Phi_{0,k}(z) = \frac{\sqrt[4]{R_k(0)}}{\sqrt{R_k(z)}} \sum_{\ell=0}^{p_k} C_{\ell,k} (z - a_k)^{\ell \delta_k},$$
$$k = 0,1,..., n, \tag{6}$$

где δ_m – символ Кронекера [9] ,

$$R_k(z) = \prod_{j=1}^{p_k} (z - a_{j,k})(z - b_{j,k}),$$

причем $C_{\ell,k}$ – комплексные постоянные, связанные соотношениями

$$C_{p_k-\ell,k} = \overline{C_{\ell,k}} R_k^{2\ell - p_k}, \ell = 0,1,..., p_k;$$
$$k=0,1….,n \tag{7}$$

Функция $\Phi_{0,k}(z)$ принадлежит классу Н.И. Мусхелишвили h_0.

Нахождение аналитической в (n+1) -связной круговой области K функции $\Phi_0^*(z)$ по известным аналитическим в односвязных областях D_m, m=0,1….,n функциям $\Phi_{0,m}^*(z), m = 0,1,..., n;$ заданным с помощью (6) , сведём к решению специальных систем уравнений, используя возможность представить функцию $\Phi_0^*(z)$ в виде [10]

$$\Phi_0^*(z) = M_1 + \varphi_0(z) + \sum_{k=1}^{n} (\varphi_k(z) + A_k \ln(z - a_k)), \tag{8}$$

где M_1 – некоторая постоянная, A_k – некоторые вещественные коэффициенты, $\varphi_k(z)$ – регулярная функция в $D_k, k = 0,1,..., n,$ причем $\varphi_0(0) = 0, \varphi_k(\infty) = 0, k = 1,..., n.$

При этом функцию $\Phi_0(z)$ будем отыскивать в виде суммы

$$\Phi_0(z) = M_1 + \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(z). \tag{9}$$

В силу принятых обозначений, на граничных компонентах $C_k(\zeta)$ области K имеют место соотношения

$$\mathrm{Re}\Phi_0^*(\zeta) = f_k^*(\zeta), \tag{10}$$

$$\mathrm{Re}\Phi_0(\zeta) = f_k(\zeta), \ \zeta \in C_k(\zeta), \ k=0,1….,n \tag{11}$$

Предположим, что функции $f_k^*(\zeta)$, $f_k(\zeta)$, k=0,1….,n непрерывны. Из (8) с помощью (10) и (11) получаем

$$f_k^*(\zeta) = f_k(\zeta) + \sum_{p=1}^{n} A_p \ln|\zeta - a_p|,$$
$$\zeta \in C_k(\zeta), \ k=0,1….,n \tag{12}$$

Из (12) следует соотношение для функций $f_k^*(\zeta)$, известных на граничных компонентах $C_k(\zeta)$

$$f_k(\zeta) = f_k^*(\zeta) - \sum_{p=1}^{n} A_p \ln|\zeta - a_p|,$$
$$\zeta \in C_k(\zeta). \tag{13}$$

Умножим обе части равенства (13) на

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{\zeta + z - 2a_m}{(\zeta - z)(\zeta - a_m)} d\zeta$$

и проинтегрируем произведение по $C_m(\zeta), \ m = 0,1,..., n;$

$$\frac{\delta_m}{2\pi i} \int_{C_m(\zeta)} f_m(\zeta) \frac{\zeta + z - 2a_m}{(\zeta - z)(\zeta - a_m)} d\zeta = \Phi_{0,m}^*(z) -$$

$$- \sum_{p=1}^{n} A_p \frac{\delta_m}{2\pi i} \int_{C_m(\zeta)} \ln|\zeta - a_p| \frac{\zeta + z - 2a_m}{(\zeta - z)(\zeta - a_m)} d\zeta,$$
$$m = 0,1,..., n. \tag{14}$$

Преобразуем правую часть 14) . Непосредственные вычисления дают

$$\frac{1}{\pi i} \int_{C_0(\zeta)} \frac{\ln|\zeta - a_p|}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} \ln(R_0^2 - \overline{a_p} z), z \in D_0, \\ \ln\left(\dfrac{z}{z - a_p}\right), z \notin \overline{D_0}, \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_{C_p(\zeta)} \frac{\ln|\zeta - a_p|}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} \ln(R_p), z \in D_p, \\ 0 \qquad , z \notin \overline{D_p}, \end{cases}$$
$$p = 1,..., n, \tag{15}$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_{C_k(\zeta)} \frac{\ln|\zeta - a_p|}{\zeta - z} d\zeta =$$
$$= \begin{cases} \ln[(\overline{a_k} - \overline{a_p})(z - a_p)], k \neq p,0; \ z \in D_k, \\ \ln\left(\dfrac{\overline{a_p} - \overline{a_k}}{\overline{a_p} - L_k(z)}\right), \ k \neq p,0; \ z \notin \overline{D_k}. \end{cases}$$

При подсчете первого слагаемого в правой части (14) используем оператор Шварца для односвязной области D_m

$$\Phi_{0,m}^*(z) = \frac{\delta_m}{2\pi i} \int_{C_m(\zeta)} f_m^*(\zeta) \frac{\zeta + z - 2a_m}{(\zeta - z)(\zeta - a_m)} d\zeta, \tag{16}$$

где δ_m – символ Кронекера [10] .

Далее, в полученном равенстве (14) заменим $f_k(\zeta)$ и $f(\zeta)$ по формулам (11) , (9) и, преобразовав результат с помощью (1.7) и формул Коши , придём к системе уравнений для определения функций $\varphi_k(z), k = 0,1,...,n;$

$$\varphi_0(z)+\sum_{k=1}^{n}\overline{\varphi_k}L_0(z)=\Phi_{0,0}^*(z)\Big|_0^z+$$

$$+\sum_{p=1}^{n}A_p\ln\left(\frac{R_0^2}{R_0^2-\overline{a_p}z}\right),$$

$$\varphi_m(z)+\sum_{\substack{k=0\\k\neq m}}^{n}\overline{\varphi_k}L_m(z)\Big|_\infty^z=\Phi_{0,m}^*(z)\Big|_\infty^z+$$

$$+\sum_{\substack{p=1\\p\neq m}}^{n}A_p\ln\left(\frac{\overline{a_p}-\overline{a_m}}{\overline{a_p}-L_m(z)}\right),\ m=1,...,n. \qquad (17)$$

Пусть b_m – фиксированная точка в области $D_m, m = 0,1,...,n.$ Обозначим

$$\Gamma_k^p(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{z-a_p}, & при \quad k=0\\ \dfrac{a_k-a_p}{z-a_p}, & при \quad k\neq 0,p\\ 1, & при \quad k=p;\ p,k=1,...,n.\end{cases} \qquad (18)$$

Посредством вычислений, аналогичных использованным в выводе системы уравнений [11, формулы (4.2)] , из (17) находим, что $\varphi_m(z)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\varphi_m(z)+\sum_{\substack{k=0\\k\neq m}}^{n}\overline{\varphi_k}L_m(z)\Big|_{b_m}^z=\Phi_{0,m}^*(z)\Big|_{b_m}^z+$$

$$+\sum_{p=1}^{n}A_p\ln\overline{\Gamma_m^p}L_m(z),\ m=1,...,n, \qquad (19)$$

которую можно преобразовать в систему линейных уравнений. Заменив с этой целью в (19) k на k_1 и m на k и подставив полученное значение $\varphi_k(z)$ в правую часть формулы (19) , находим

$$\varphi_m(z)-\sum_{\substack{k=0\\k\neq m}}^{n}\sum_{\substack{k_1=0\\k_1\neq k}}^{n}\varphi_{k_1}\overline{L_k}L_m(z)\Big|_{b_m}^z=E_m^*(z,b_m)+$$

$$+\sum_{p=1}^{n}A_p\ln D_m^p(z), \qquad (20)$$

где

$$D_m^p(z)=\overline{\Gamma_m^p}L_m(z)\prod_{\substack{k=0\\k\neq m}}^{n}\frac{\Gamma_k^p\overline{L_k}L_m(b_m)}{\Gamma_k^p\overline{L_k}L_m(z)}, \qquad (21)$$

$$E_m^*(z,b_m)=\left(\Phi_{0,m}^*(z)-\sum_{\substack{k=0\\k\neq m}}^{n}\overline{\Phi_{0,k}^*}L_m(z)\right)\Bigg|_{b_m}^z, \qquad (22)$$

Так как из (16) следует

$$\overline{\Phi_{0,m}^*}(z)=\Phi_{0,m}^*(z)\Big|_0^{a_m}-\Phi_{0,m}^*\overline{L_m}(z), \qquad (23)$$

то (22) преобразовывается к виду

$$E_m^*(z,b_m)=\sum_{k=0}^{n}\Phi_{0,k}^*\overline{L_k}L_m(z)\Big|_{b_m}^z. \qquad (24)$$

С целью более полного исследования (20) рассмотрим систему уравнений

$$\varphi_m(z)-\lambda\sum_{\substack{k=0\\k\neq m}}^{n}\sum_{\substack{k_1=0\\k_1\neq k}}^{n}\varphi_{k_1}\overline{L_k}L_m(z)\Big|_{b_m}^z=E_m^*(z,b_m)+$$

$$+\sum_{p=1}^{n}A_p\ln D_m^p(z),\quad m=0,1,...,n, \qquad (25)$$

в которой λ – комплексный параметр, совпадающий с (20) при $\lambda = 1$.

Решим систему (25) методом последовательных подстановок, представив каждую функцию $\varphi_m(z)$ в виде ряда Неймана

$$\varphi_m(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda^\nu\varphi_{\nu,m}(z),\ m=0,1,...,n. \qquad (26)$$

За начальную подстановку возьмем свободный член уравнения

$$\varphi_{0,m}(z)=E_m^*(z,b_m)+\sum_{p=1}^{n}A_p\ln D_m^p(z),$$

$$m=0,1,...,n. \qquad (27)$$

Если функции $\varphi_{\nu,k}(z)$ уже построены , то подстановка строится с помощью (25) и определяется рекуррентной формулой

$$\varphi_{\nu+1,m}(z)=\sum_{\substack{k=0\\k\neq m}}^{n}\sum_{\substack{k_1=0\\k_1\neq k}}^{n}\left[\varphi_{\nu,k_1}\overline{L_k}L_m(z)-\varphi_{\nu,k_1}\overline{L_k}L_m(b_m)\right],$$

$$m=0,1,...,n. \qquad (28)$$

Полагая в (28) $\nu = 0$, получаем

$$\varphi_{1,m}(z)=\sum_{\substack{k=0\\k\neq m}}^{n}\sum_{\substack{k_1=0\\k_1\neq k}}^{n}\left[\varphi_{0,k_1}\overline{L_k}L_m(z)-\varphi_{0,k_1}\overline{L_k}L_m(b_m)\right],$$

$$m=0,1,...,n.$$

Продолжая аналогичные вычисления для $\nu = 1,2,\ldots,$ будем иметь

$$\varphi_{\nu,m}(z) = \\ = \sum_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq m} \left[\varphi_{0,k_1} \overline{L_k} E_{2\nu} L_m(z) - \varphi_{0,k_1} \overline{L_k} E_{2\nu} L_m(b_m) \right],$$

$$\nu = 1,2,\ldots; \quad m = 0,1,\ldots,n, \tag{29}$$

где для более компактной записи сумм функций, определенных в D_m, использованы символы

$$\sum_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq m} = \sum_{\substack{k_1=0 \\ k_1 \neq k_2}}^{n} \sum_{\substack{k_2=0 \\ k_2 \neq k_3}}^{n} \cdots \sum_{\substack{k_{2\nu-1}=0 \\ k_{2\nu-1} \neq k_{2\nu}}}^{n} \sum_{\substack{k_{2\nu}=0 \\ k_{2\nu} \neq m}}^{n},$$

$$\prod_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq m} = \prod_{\substack{k_1=0 \\ k_1 \neq k_2}}^{n} \prod_{\substack{k_2=0 \\ k_2 \neq k_3}}^{n} \cdots \prod_{\substack{k_{2\nu-1}=0 \\ k_{2\nu-1} \neq k_{2\nu}}}^{n} \prod_{\substack{k_{2\nu}=0 \\ k_{2\nu} \neq m}}^{n},$$

$$E_{2\nu}(z) = L_{k_1} \overline{L_{k_2}} \cdots L_{k_{2\nu-1}} \overline{L_{k_{2\nu}}}(z). \tag{30}$$

Формулы (27), (29) позволяют записать с учетом (24) ряд Неймана в виде

$$\varphi_m(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^{\nu} \sum_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq m} \left[\sum_{k=0}^{n} \Phi_{0,k}^{*} \overline{L_k} E_{2\nu} L_m(z) \Bigg|_{b_m}^{z} + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{n} A_p \ln D_m^p(z) \Bigg|_{b_m}^{z} \right], \quad m = 0,1,\ldots,n. \tag{31}$$

При этом

$$E_0(z) \equiv z, \;\; D_{k_1}^p \overline{L_{k_1}} E_{2m} L_m(z) \equiv D_m^p(z). \tag{32}$$

Подставляя в правую часть (31) $\lambda = 1$, находим представление аналитической в области D_m функции $\varphi_m(z)$, если известны $\Phi_{0,k}^{*}(z)$, $k = 0,1,\ldots,n;$ для односвязных областей D_k, $k = 0,1,\ldots,n;$ пересечения которых образуют $(n+1)-$ связную круговую область K,

$$\varphi_m(z) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq m} \Phi_{0,k}^{*} \overline{L_k} E_{2\nu} L_m(z) \Bigg|_{b_m}^{z} +$$

$$+ \sum_{p=1}^{n} A_p \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq m} \ln D_m^p(z) \Bigg|_{b_m}^{z}, \;\; m = 0,1,\ldots,n. \tag{33}$$

Обратимся теперь к вычислению вещественных коэффициентов A_p, $p = 1,\ldots,n.$

Подставляя в (14) $z = a_m$, $m = 0,1,\ldots,n,$ получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_m(\zeta)} \frac{f_m(\zeta)}{\zeta - a_m} d\zeta +$$

$$+ \sum_{p=1}^{n} \frac{A_p}{2\pi i} \int_{C_m(\zeta)} \frac{\ln|\zeta - a_p|}{\zeta - a_m} d\zeta = \delta_m \Phi_{0,m}^{*}(a_m),$$

$$m = 0,1,\ldots,n. \tag{34}$$

Преобразуем правую часть этой формулы. Непосредственные вычисления из (16) дают

$$\Phi_{0,m}^{*}(a_m) + \Phi_{0,m}^{*}(\infty) = 0, \;\; m = 0,1,\ldots,n.$$

При подсчете первого слагаемого в левой части (34) используем (11), (9) и формулу Коши, а при подсчете второго слагаемого – формулы (15).

В результате указанных преобразований получим систему уравнений

$$\operatorname{Re} M_1 + \ln R_0 \sum_{p=1}^{n} A_p = \Phi_{0,0}^{*}(0), \tag{35}$$

$$\operatorname{Re} M_1 + A_m \ln R_m + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq m}}^{n} A_p \ln|a_m - a_p| =$$

$$= \Phi_{0,m}^{*}(\infty) - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{n} \operatorname{Re} \varphi_k(a_m), \quad m = 1,\ldots,n. \tag{36}$$

Из (33) с учетом (23) следует, что

$$\operatorname{Re} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{n} \varphi_k(a_m) = \sum_{\kappa=0}^{n} \Phi_{0,\kappa,m}^{*} + \sum_{p=1}^{n} A_p \ln \widetilde{H}_p^m,$$

$$m = 1,\ldots,n, \tag{37}$$

где

$$2\Phi_{0,\kappa,m}^{*} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq k} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{n} \left[\Phi_{0,\kappa}^{*} N_{\kappa,\nu,k}(z) \Bigg|_{b_m}^{a_m} - \right.$$

$$\left. - \Phi_{0,\kappa}^{*} \overline{L_\kappa N_{\kappa,\nu,k}}(z) \Bigg|_{\overline{b_k}}^{\overline{a_m}} \right],$$

$$\kappa = 0,1,\ldots,n, \;\; m = 1,\ldots,n, \tag{38}$$

$$N_{\kappa,\nu,k}(z) = \overline{L_\kappa} E_{2\nu} L_k(z), \tag{39}$$

$$\widetilde{H}_p^m = \prod_{\nu=0}^{\infty} \prod_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq k} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{n} \left| \frac{D_{k_1}^p N_{k_1,\nu,k}(a_m)}{D_{k_1}^p N_{k_1,\nu,k}(b_k)} \right|,$$

$$m, p = 1,\ldots,n. \tag{40}$$

Используя (35) и (37), из (36), получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения величин A_p, $p = 1,\ldots,n,$

$$\ln\left(\frac{R_m}{R_0} \widetilde{H}_m^m \right) A_m + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq m}}^{n} \ln\left(\frac{|a_m - a_p|}{R_0} \right) A_p =$$

$$= \Phi_{0,m}^{*}(\infty) - \Phi_{0,m}^{*}(0) - \sum_{\kappa=0}^{n} \Phi_{0,\kappa,m}^{*},$$

$$m = 1,\ldots,n. \tag{41}$$

С целью более компактной записи решения системы (41) будем использовать обозначения

$$\widetilde{a}'_{m,p}=\begin{cases}\left|a_m-a_p\right|\widetilde{H}_p^m/R_0, если\ \ m\neq p,\\ R_m\widetilde{H}_m^m/R_0, \quad если\ m=p,\end{cases} \tag{42}$$

$$b''_m=\Phi^*_{0,m}(\infty)-\Phi^*_{0,m}(0)-\sum_{\kappa=0}^{n}\Phi^*_{0,\kappa,m},$$
$$m=1,...,n. \tag{43}$$

Тогда система (41) принимает вид

$$\sum_{p=1}^{n}\ln\widetilde{a}'_{m,p}A_p=b''_m,\quad m=1,...,n. \tag{44}$$

Обозначим основной определитель системы (44) через $\Delta=\left|\ln\widetilde{a}'_{m,p}\right|_1^n$.

Пусть $a''_{m,p}$ есть алгебраическое дополнение $\ln\widetilde{a}'_{m,p}$ в определителе Δ. Из формул Крамера [11, гл.1, §2, п.3] следует , что система линейных уравнений (44) относительно $A_p, p=1,...,n,$ имеет единственное решение , если определитель $\Delta\neq 0,$ которое представимо следующим образом

$$A_p=\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m+p}a''_{m,p}\Delta^{-1}b''_m,\quad p=1,...,n. \tag{45}$$

Докажем, что основной определитель $\Delta=(-1)^{n-1}\Delta_1$ системы (44) всегда отличен от нуля . Из (1.1) следуют неравенства

$$\frac{R_m}{R_0}<\frac{R_m+R_p}{R_0}<\frac{\left|a_m-a_p\right|}{R_0}<$$
$$<2-\frac{R_m+R_p}{R_0}<2-\frac{R_m}{R_0}-<2,\quad m\neq p;$$
$$m,p=1,...,n. \tag{46}$$

Отсюда имеем, что

$$\ln\frac{\left|a_m-a_p\right|}{R_0}>\ln\frac{R_m}{R_0},\quad \ln\frac{\left|a_m-a_p\right|}{R_0}>\ln\frac{R_p}{R_0},$$
$$m\neq p;\quad m,p=1,...,n. \tag{47}$$

Положим в (40)

$$\overline{L_{k_1}}E_{2\nu}L_k(a_m)=\varepsilon_1,\quad \overline{L_{k_1}}E_{2\nu}L_k(b_k)=\varepsilon_2. \tag{48}$$

Из (3.46) следует

$$\left\|\varepsilon-a_{k_1}\right|-\left|a_{k_2}-a_{k_1}\right\|<R_{k_2},$$
$$\left\|\varepsilon-a_{k_1}\right|-R_0\right|<R_0-R_{k_1},\quad k_1,k_2=1,...,n, \tag{49}$$

где через ε обозначено любое из $\varepsilon_1,\varepsilon_2$. Далее, пусть $\beta-$ есть точка, лежащая внутри круга радиуса R_{k_1} с центром a_{k_1}. Из (49) с учетом (46) получим

$$\left\|\varepsilon-\beta\right|-\left|\varepsilon-a_{k_1}\right\|<R_{k_1},$$

$$\left\|\varepsilon-\beta\right|-\left|a_{k_2}-a_{k_1}\right\|<R_{k_1}+R_{k_2},$$
$$\left\|\varepsilon-\beta\right|-R_0\right|<R_0,\ k_1,k_2=1,...,n. \tag{50}$$

Из (21) с учетом (48) имеем

$$\frac{D^p_{k_1}(\varepsilon_1)}{\overline{\overline{\Gamma^p_{k_1}}}L_{k_1}(\varepsilon_1)}\prod_{\substack{\kappa=0\\ \kappa\neq k_1}}^{n}\left(\Gamma^p_\kappa\overline{L_\kappa}L_{k_1}(\varepsilon_1)\right)=$$
$$=\frac{D^p_{k_1}(\varepsilon_2)}{\overline{\overline{\Gamma^p_{k_1}}}L_{k_1}(\varepsilon_2)}\prod_{\substack{\kappa=0\\ \kappa\neq k_1}}^{n}\left(\Gamma^p_\kappa\overline{L_\kappa}L_{k_1}(\varepsilon_2)\right). \tag{51}$$

Подставив (18) в (51) и преобразовав её правую и левую части , получим

$$D^p_{k_1}(\varepsilon_1)\frac{\left(\varepsilon_1-\overline{L_{k_1}}\left(\overline{a_p}\right)\right)}{\left(\varepsilon_1-a_{k_1}\right)}\prod_{\substack{\kappa=0\\ \kappa\neq k_1}}^{n}\frac{\left(\varepsilon_1-\overline{L_{k_1}}L_\kappa\left(a_p\right)\right)}{\left(\varepsilon_1-\overline{L_{k_1}}\left(\overline{a_\kappa}\right)\right)}=$$
$$=D^p_{k_1}(\varepsilon_2)\frac{\left(\varepsilon_2-\overline{L_{k_1}}\left(\overline{a_p}\right)\right)}{\left(\varepsilon_2-a_{k_1}\right)}\prod_{\substack{\kappa=0\\ \kappa\neq k_1}}^{n}\frac{\left(\varepsilon_2-\overline{L_{k_1}}L_\kappa\left(a_p\right)\right)}{\left(\varepsilon_2-\overline{L_{k_1}}\left(\overline{a_\kappa}\right)\right)}. \tag{52}$$

Для оценки (52) нам потребуется следующие неравенства, которые следуют из (49) , (50)

$$\left\|\frac{\varepsilon-\beta}{\varepsilon-a_{k_1}}\right|-1\right|<\frac{\rho_{k_1}}{1-\rho_{k_2}},$$
$$\left\|\frac{\varepsilon-a_{k_1}}{\varepsilon-\beta}\right|-1\right|<\frac{\rho_{k_1}}{1-\rho_{k_1}-\rho_{k_2}}, \tag{53}$$

где

$$\rho_{k_1}=R_{k_1}/\left|a_{k_2}-a_{k_1}\right|,\ \rho_{k_2}=R_{k_2}/\left|a_{k_2}-a_{k_1}\right|.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{G_1}<\left|\frac{\varepsilon_1-a_{k_1}}{\varepsilon_2-a_{k_1}}\right|<G_1,\ G_1=\frac{1+\rho_{k_2}}{1-\rho_{k_2}},$$
$$\frac{1}{G_2}<\left|\frac{\varepsilon_1-\beta}{\varepsilon_2-\beta}\right|<G_2,$$
$$G_2=\frac{1+\rho_{k_2}+\rho_{k_1}}{1-\rho_{k_2}-\rho_{k_1}},\ \frac{1}{G_3}<\left|\frac{\varepsilon_1-\beta_1}{\varepsilon_2-\beta_2}\right|<G_3,$$
$$G_3=\frac{1-\rho_{k_2}+\rho_{k_1}}{1-\rho_{k_2}-\rho_{k_1}}, \tag{54}$$

где β_1 и β_2-две различные точки, лежащие внутри круга радиуса R_{k_1} с центром a_{k_1}.

Из (54) с учетом (46) имеем

$$G_j>1,\ j=1,2,3. \tag{55}$$

Из (52), (54) и (55) следует

$$\left|D^p_{k_1}(\varepsilon_1)\right|<G\left|D^p_{k_1}(\varepsilon_2)\right|,\ G>1. \tag{56}$$

Из (40) , (53) и (56) следует, что знак величины $\ln\widetilde{a}'_{m,p}$, $m,p=1,...,n,$ определяется знаком величины первого слагаемого правой части соотношения (42). Из (47), (46) имеем

$$\ln\widetilde{a}'_{m,p}<0,\ m,p=1,...,n. \quad (57)$$

Из (42), (40) с учетом (47) получаем

$$\ln\widetilde{a}'_{m,p}>\ln\widetilde{a}'_{m,m},\quad \ln\widetilde{a}'_{p,m}>\ln\widetilde{a}'_{m,m},$$

$$p\neq m;\quad m,p=1,...,n. \quad (58)$$

Пусть $\Delta=\Delta(n)$ есть основной определитель системы (44), порядок которого равен n.

Если положить $n=1$, то из (57) следует

$$\Delta(1)<0. \quad (59)$$

Из (58), (57) имеем

$$\Delta(2)>0. \quad (60)$$

Из (60) и (58) получаем, что алгебраические дополнения элементов определителя третьего порядка

$$\Delta(3)\ a''_{m,p}>0,\ m,p=1,2,3.$$

Отсюда и из (57) с учетом того факта, что определитель равен сумме произведений элементов любой строки на их алгебраические дополнения [12, гл. 1, §3] имеем

$$\Delta(3)<0. \quad (61)$$

Продолжая эти рассуждения далее, придём к определителю n-го порядка. Из теоремы Лапласа [13, гл.1, §1, п.9] и неравенств (57) следует, что $\Delta(n)\neq 0$. Из (59), (60), (61) следует

$$\Delta(n)=(-1)^n\Delta_1,\Delta_1>0. \quad (62)$$

Следовательно, система линейных уравнений (14) относительно $A_p, p=1,...,n,$ имеет единственное решение (45).

Обратимся теперь к вычислению $\operatorname{Re}M_1$. В силу (45) формула (35) принимает вид

$$\operatorname{Re}M_1=\Phi^*_{0,0}(0)+\ln R_0\Delta^{-1}\sum_{m=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}(-1)^{m+p-1}a''_{m,p}b''_m. \quad (63)$$

Преобразуем сумму в правой части (8) с помощью (33), (35). Привлекая еще соотношение

$$H_p(z)=\ln\left(\frac{z-a_p}{R_0}\prod_{\nu=0}^{\infty}\prod_{k_1\neq k_2}^{k_{2\nu}\neq k}\prod_{k=0}^{n}D^p_{k_1}\overline{L_{k_1}}E_{2\nu}L_k(z)\right)\Bigg|_{b_k}^{z},$$

$$p=1,...,n, \quad (64)$$

будем иметь

$$\Phi^*_0(z)=\sum_{\kappa=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k_1\neq k_2}^{k_{2\nu}\neq k}\sum_{k=0}^{n}\Phi^*_{0,\kappa}\overline{L_\kappa}E_{2\nu}L_k(z)\Bigg|_{b_k}^{z}+$$

$$+\Phi^*_{0,0}(0)+\sum_{p=1}^{n}A_pH_p(z)+iD', \quad (65)$$

где D' – вещественное число. Подставляя в формулу (65) соотношения (45), (43), с учетом (38), получаем представление аналитической функции $\Phi^*_0(z)$ в $(n+1)$ – связной круговой области K

$$\Phi^*_0(z)=\sum_{\kappa=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k_1\neq k_2}^{k_{2\nu}\neq k}\sum_{k=0}^{n}\Phi^*_{0,\kappa}\overline{L_\kappa}E_{2\nu}L_k(z)\Bigg|_{b_k}^{z}+$$

$$+\Phi^*_{0,0}(0)\left[1-\sum_{p=1}^{n}H^m(z)\right]+$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\Phi_{0,m}H^m(z)+i\operatorname{Im}M_1, \quad (66)$$

где

$$\Phi_{0,m}=\Phi^*_{0,m}(\infty)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\kappa=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k_1\neq k_2}^{k_{2\nu}\neq k}\sum_{\substack{k=0\\k\neq m}}^{n}\left[\Phi^*_{0,\kappa}\overline{L_\kappa N_{\kappa,\nu,k}(z)}\Bigg|_{\overline{b_k}}^{\overline{a_m}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\sum_{\kappa=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k_1\neq k_2}^{k_{2\nu}\neq k}\sum_{\substack{k=0\\k\neq m}}^{n}\left[\Phi^*_{0,\kappa}N_{\kappa,\nu,k}(z)\Bigg|_{b_m}^{a_m}\right]\right],$$

$$m=1,...,n. \quad (67)$$

При этом

$$H^m(z)=\Delta^{-1}\sum_{p=1}^{n}(-1)^{m+p}a''_{m,p}H_p(z),$$

$$m=1,...,n. \quad (68)$$

Поступая так же, как и в [14, §4], докажем, что ряды, определяющие функции $\Phi^*_0(z)$ и $H_p(z),\ p=1,...,n,$ по формулам (66), (64), сходятся абсолютно и равномерно в K.

Рассуждая так же, как и в [14, §2], покажем, что вещественная часть функции $\Phi^*_0(z)$, задаваемая формулой (66) с учетом (16), совпадает на $C_m(\zeta)$ с $\Phi^*_0(z)$, $m=1,...,n.$

Итак, доказана теорема.

Теорема 1. Пусть функция $\Phi^*_0(z)$ аналитическая в $(n+1)$ – связной круговой области K и принадлежит классу Мусхелишвили h_0. Далее, пусть аналитическая в односвязной области D_m, $m=0,1,...,n,$ функция $\Phi^*_{0,m}(z),\ m=0,1,...,n,$ задана формулой

$$\Phi^*_{0,m}(z)=\frac{\sqrt[4]{R_m(0)}}{\sqrt{R_m(z)}}\sum_{\ell=0}^{p_m}C_{\ell,m}(z-a_m)^{\ell\delta_m},$$

$$m=0,1,...,n,$$

где δ_m – символ Кронекера [15],

$$R_m(z)=\prod_{j=1}^{p_m}\left(z-a_{j,m}\right)\left(z-b_{j,m}\right),$$

причем $C_{\ell,m}$ – комплексные постоянные, связанные соотношениями

$$C_{p_m-\ell,m}=\overline{C_{\ell,m}}R_m^{2\ell-p_m},\ \ell=0,1,...,p_m;$$
$$m=0,1,...,n.$$

Пусть на граничных компонентах $C_k(\zeta):\left|\zeta-a_k\right|=R_k, k=0,1,...,n,$ заданы точки

$$a_{1,k};b_{1,k};\ a_{2,k};b_{2,k};\ \cdots;a_{p_k,k}\,b_{p_k,k},$$

расположенные в том порядке, в котором они выписаны. Пусть вещественная часть $\Phi_0^*(z)$ на дугах $\gamma_k : a_{j,k};b_{j,k}, j=1,...,p_k;k=0,1,...,n,$ и мнимая часть $\Phi_0^*(z)$ на дугах

$$\gamma_k' : b_{j,k};a_{j+1,k}, j=1,...,p_k;$$
$$a_{p_k+1,k}=a_{1,k};\ k=0,1,...,n,$$

принимают значение нуль. Тогда общее решение однородной задачи P_0^h в классе функций Н.И.Мусхелишвили h_0 определяется формулой

$$\Phi_0^*(z)=\sum_{\kappa=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k_1\neq k_2}^{k_{2\nu}\neq k}\sum_{k=0}^{n}\Phi_{0,\kappa}^*\overline{L_\kappa}E_{2\nu}L_k(z)\Bigg|_{b_k}^{z}+$$
$$+\Phi_{0,0}^*(0)\left[1-\sum_{p=1}^{n}H^m(z)\right]+$$
$$+\sum_{m=1}^{n}\Phi_{0,m}H^m(z)+i\operatorname{Im}M_1, \qquad (69)$$

где $H^m(z)$ определяется формулами (68), (64), (42), (21), (18), а $\Phi_{0,m}$ – формулами (67).

Следствие 1. Если в формуле (69) положить $n=0,$ то получаем известную формулу В.Н. Монахова для круга [1, с.49].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.*Монахов В.Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. – Новосибирск: Наука, 1977, 242 с.

2.*Сорокин А.С*. Краевые задачи для аналитических функций в многосвязных круговых областях и их приложения.- Новокузнецк: СибГИУ, 1998, 415 с.

3.*Сорокин А.С*. Специальная система уравнений для функций и однородная смешанная краевая задача с параметрами. //Вестник КузГТУ, 2014, №3(103), с.88-95.

4.*Крутицкий П.А*. О задаче Римана-Гильберта и задаче с косой производной на плоскости с разрезами вдоль окружности //Математическое моделирование.- М., 1990, т.2, №9, с.114-123.

5.*Крутицкий П.А*. О задаче с косой производной для плоскости с разрезами вдоль прямой и связанных с нею задачах // Математическое моделирование.- М., 1990, т.2, №4, с.143-154.

6. *Александров И.А.* Конформные отображения односвязных и многосвязных областей. -Томск. 1976, 156 с.

7. *Хавинсон С.Я.* Факторизация аналитических функций в конечносвязных областях. –М. МИСИ., 1981, 118 с.

8. *Мусхелишвили Н.И*. Сингулярные интегральные уравнения (Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике). –М.: Наука, 1968, 512 с.

9. *Александров И.А., Сорокин А.С*. О распространении вариационного метода Г.М.Голузина - П.П.Куфарева на многосвязные области. //Докл. АН СССР, 1967, т.175, №6, с. 1207 – 1210.

10. *Сорокин А.С*. Краевые задачи в многосвязных круговых областях.- Новокузнецк: Изд. КузГПА, 2004, 274 с.

11. *Гахов Ф.Д.,Хасабов Э.Г.* Краевая задача Гильберта для многосвязной области.// Изв.ВУЗов, математика, 1958, т.1, вып. 2, с.12-21.

12. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. -М.:Гос. изд. техн.-теор. лит., 1953, 492 с.

13. *Мишина А.П., Проскуряков И.В*. Высшая алгебра. -М.: Гос. изд. физ. -матем. лит., 1962, 300 с.

14. *Александров И.А., Сорокин А.С.* Задача Шварца для многосвязных круговых областей //Сиб.матем.журн., 1972, т.13, №5,с.971-1001.

15. *Самарский А.А., Вабишевич П.Н*. Итерационные методы кластерного агрегирования для систем линейных уравнений.//Докл. РАН., 1996,т.349, №1, с.22-25.

Автор статьи:

Сорокин
Андрей Семенович
- канд. физ.-мат.наук, доцент, ст.н.с.
(филиал КузГТУ, г. Новокузнецк),
тел.: 8(3843) 772459