УДК 004.02

Е.В. Прокопенко, Я.В. Славолюбова, С.Р. Ли

# ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ

Моделирование – исследование объектов путем построения и изучения их моделей – это основной способ научного познания. Данный способ называют вычислительным экспериментом и основывается он на трех основных понятиях: модель-алгоритм-программа. Использование компьютера при моделировании возможно по трем направлениям:

1. Вычислительное – прямые расчеты по программе.
2. Инструментальное – построение базы знаний, для преобразования ее в алгоритм и программу.
3. Диалоговое – поддержание интерфейса между исследователем и компьютером.

Успешное применение систем компьютерной алгебры зависит, в первую очередь от правильного выбора модели соответствующей геометрической задачи. Вычислительная система при исследовании задачи играет роль экспериментальной базы, позволяет численно проверить возникающие гипотезы и указать не только идею к математическому доказательству, но и даже выступать в роли базы доказательства.

В настоящее время повсеместно используются такие популярные системы как *Maple*, *Mathematica*, *MathCad*, *MatLab*, *Derive*. Они обладают универсальными математическими возможностями, широко распространены в России и за рубежом, постоянно совершенствуются, развивая аппарат и пополняя ресурсы, имеют возможность взаимной интеграции.

Объективное сравнение систем осложняется в связи с разным назначением программ и идеологией их использования.

Система *Maple,* предназначена главным образом для выполнения аналитических (символьных) вычислений (хотя содержит ряд средств и для численного решения дифференциальных уравнений и интегрирования) и имеет для этого один из самых мощных в своем классе арсенал специализированных процедур и функций (более 3000). Возможности *Maple* ориентированы на профессиональных математиков; решения задач в среде *Maple* требует не только умения оперировать какой-либо функции, но и знания методов решения, в нее заложенных: во многих встроенных функциях *Maple* фигурирует аргумент, задающий метод решения. *Maple* имеет собственный язык программирования [1].

То же можно сказать и о *Mathematica.* Это мощная система символьных вычислений, визуализации данных, решения различных прикладных задач с множеством других возможностей. Данная система имеет большую функциональную наполненность (есть даже синтезирование звука). *Mathematica* обладает высокой скоростью вычислений, но требует изучения довольно более сложного, чем у *Maple*, языка программирования.

*Mathcad*, в отличие от *Maple*, изначально создавался для численного решения математических задач, он ориентирован на решение задач именно прикладной, а не теоретической математики, когда нужно получить результат без углубления в математическую суть задачи. Для символьных вычислений предназначено интегрированное ядро *Maple*, содержащее только ряд основных функций.

*Matlab* – наиболее популярная система численного решения дифференциальных уравнений и визуализации результатов. Она содержит пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений и одноимённый язык программирования, используемый в этом пакете. Для символьных вычислений предназначено интегрированное ядро *Maple*, содержащее только ряд основных функций. Этих функций недостаточно для решения задач многомерной геометрии.

То есть наиболее оптимальным вариантом является выбор системы *Maple.*

Ниже приведены математические модели задач построения контактных структур с приведением алгоритмов решений, основанных на использовании системы *Maple*.

**1. Общие сведения из теории контактных структур**

**Определение 1** ([2]). Дифференцируемое (2n+1)-мерное многообразие $M^{2n+1}$ класса ($C^\infty$) называется контактным многообразием или имеет контактную структуру, если на нем задана глобальная дифференциальная 1-форма η, такая что $\eta\wedge(d\eta)^n\neq 0$ всюду на $M^{2n+1}$.

Контактная структура задает 2n-мерное распределение $E$, $E=\{X\in TM^{2n+1}:\eta(X)=0\}$, которое называют контактным распределением, и ненулевое векторное поле ξ, такое что $\eta(\xi)=1$, $d\eta(\xi,X)=0$ для всех векторных полей $X$ на $M^{2n+1}$. Это векторное поле определяет 1-мерное распределение, дополнительное к $E$, и называется характеристическим векторным полем контактной структуры.

**Определение 2** ([2]). Говорят, что дифференцируемое многообразие $M^{2n+1}$ имеет (η, ξ, φ)-структуру, если оно допускает поле φ эндоморфизмов касательных пространств, векторное поле ξ и 1-форму η, удовлетворяющую условиям:

$$\eta(\xi)=1,\ \varphi^2=-I+\eta\otimes\xi, \qquad (1)$$

где $I$ – тождественное преобразование $TM^{2n+1}$.

Также имеют место следующие условия: $\varphi\xi=0$ и $\eta\circ\varphi=0$ в определении (η, ξ, φ)-структуры, вытекающие из условий (1).

**Определение 3** ([2]). Если многообразие $M^{2n+1}$ с заданной (η, ξ, φ)-структурой допускает риманову метрику $g$, такую что

$$g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y),$$
$$d\eta(X,Y)=g(\varphi X,Y) \qquad (2)$$

для любых векторных полей $X$, $Y$, тогда говорят, что $M^{2n+1}$ имеет (η, ξ, φ, $g$)-структуру или контактную метрическую структуру. Риманова метрика g контактной метрической структуры называется ассоциированной метрикой. Полагая $Y=\xi$ в (2), получим $\eta(X)=g(\xi,X)$.

**2. Математические модели построения левоинвариантных контактных метрических структур**

Для решения задачи построения контактных структур на (2$n$+1)-мерных группах Ли необходимо предварительно решить следующие задачи:

1. Определить контактную форму η (2$n$+1)-мерной алгебры Ли $L(G)$ или решить вопрос о ее существовании.

2. Определить характеристическое поле $\xi$ (или поле Риба).

3. Определить специальный базис $E_i$, $i$=1,...,2$n$+1 контактной алгебры Ли.

4. Определить структурные константы $C_{ij}^k$ относительно нового базиса $E_i$, $i$=1,...,2$n$+1.

Рассмотрим реализацию одной из перечисленных задач с использованием .

**Задача:**

*Определить структурные константы $C_{ij}^k$ относительно нового базиса $E_i$, i=1,...,2n+1.*

**Математическая модель:**

$e_i$ – исходный базис,

$c_{ij}^k$ – структурные константы исходной алгебры Ли относительно начального базиса $e_i$, $i$=1,...,2$n$+1,

$E_i$ – новый базис,

$A$ – матрица перехода от $e_i$ к $Ei$, $E_i = A_i^k e_k$

Вычислительная формула

$$C_{ij}^l = A_i^k A_j^s c_{ks}^p (A^{-1})_p^l$$

**Применение методов компьютерной математики:**

*1) Находим матрицу перехода.*

*2) Запускаем процедуру для пересчета структурных констант.*

*3) Выписываем вид структурных констант $C_{ij}^k$.*

Опишем процедуру для вычисления структурных констант в новом базисе.

Входными параметрами данной процедуры являются массивы структурных констант C в исходном базисе $c_{ij}^k$ и матрицы перехода $A$.

Выходным параметром является массив структурных констант C1 в новом базисе ( $C_{ij}^k$ ).

```
strconst:=proc(C,A,n)
Описываем локальные переменные:
local i,j,k,s,p,l;
Описываем глобальные переменные:
global C1;
Тело процедуры:
Вычисляем массив, обратный к матрице перехода
invA:=inverse(A):
Определяем массив новых структурных констант и выводим на печать его нетривиальные компоненты:
C1:=array(1..n,1..n,1..n):
 for i to n do
  for j to n do
   for l to n do
    k:='k': s:='s': p:='p':
C1[i,j,p]:=(sum(sum(A[k,i]*A[s,j]*C[k,s,p]*invA[l,p],
    'k'=1..n),'s'=1..n,'p'=1..n));
 od od od;
 for i to n do
  for j to n do
   for p to n do
    if C1[i,j,p]<>0 then
     print((i,j,p)=simplify(evalm(C1[i,j,p])))
    fi
 od od od
end:
```

Вызов процедуры производится следующей командой:

strconst(C,A,n).

Для решения задачи построения контактных алгебр Ли на основе симплектических и точных симплектических, являющимися подалгебрами Ли коразмерности 1, необходимо реализовать следующую схему:

**Задача:**

*Построить контактную (2n+1)-мерную алгебру Ли как расширение симплектической алгебры Ли*

**Математическая модель:**

*L(H) – 2n-мерная симплектическая алгебра Ли,*

*ω – симплектическая форма,*

$$L(G)=L(H)\times_{\omega} R -$$

*Центральное расширение:*

$$[X,Y]_{L(G)}=[X,Y]_{L(H)}+\omega(X,Y)\zeta \text{ и}$$
$$[X,\zeta]=0,$$

если $X,Y\in L(H)$, $\zeta\in Z(L(G))$.

**Применение методов компьютерной математики:**

*1) Загружаем массив структурных констант алгебры Ли L(H).*

*2) Загружаем массив коэффициентов симплектической структуры ω.*

*3) Запускаем процедуру для вычисления структурных констант* $C_{ij}^k$ *центрального расширения.*

*4) Запускаем процедуру изоморфизма для проверки изоморфна ли полученная алгебра Ли одной из алгебр Ли списка А. Диатты [3].*

Опишем процедуру для вычисления структурных констант центрального расширения.

Пусть $E_1,...,E_{2n+1}$ – базис алгебры Ли $L(H)\times_\omega RE_{2n+1}$, а $e_1,...,e_{2n+1}$ – базис алгебры Ли $L(H)$.

Скобки Ли центрального расширения $L(G)=L(H)\times_\omega RE_{2n+1}$ задаются: $[X,Y]_{L(G)}=[X,Y]_{L(H)}+\omega(X,Y)E_{2n+1}$ и $[X,E_{2n+1}]=0$, если $X,Y\in L(H)$.

Распишем данные условия на базисных векторах:

$$[E_i,E_j]=[e_i,e_j]+\omega(e_i,e_j)E_{2n+1},$$

$$[E_i,E_{2n+1}]=0,\ i,j=1,...,2n,$$

$$C_{ij}^kE_k=c_{ij}^ke_k+\omega_{ij}E_{2n+1},\ C_{i,2n+1}^s=0,$$

$$i,j=1,...,2n,\ s=1,...,2n+1.$$

В результате получаем:

$$C_{ij}^k=c_{ij}^k,\ C_{ij}^{2n+1}=c_{ij}^{2n+1}+\omega_{ij}^{2n+1},$$

$$C_{i,2n+1}^s=0,\ i,j,k=1,...,2n,\ s=1,...,2n.$$

Введем обозначения: C – массив структурных констант на алгебре Ли $L(G)$, C1 – массив структурных констант на алгебре Ли $L(H)$.

Входными параметрами данной процедуры являются массивы структурных констант C и массив компонент симплектической формы omegam, $m$ – размерность алгебры Ли $L(G)$, $(m=2n+1)$.

Выходным параметром является массив структурных констант C1.

CentrStr:=proc(C,omegam,m)

Описываем локальные переменные: local i,j,p;

Описываем глобальные переменные: global C1;

Тело процедуры:

Определяем массив новых структурных констант и выводим на печать его нетривиальные компоненты:

```
C:=array(1..m,1..m,1..m):
for i to m-1 do
  for j to m-1 do
    for p to m-1 do
      C1[i,j,m]:=C[i,j,m]+omegam[i,j,m]: ,
      C1[i,j,p]:=C[i,j,p]:;
    od od od;
for i to m do
  for j to m do
    for p to m do
      if C1[i,j,p]<>0 then
      print((i,j,p)=simplify(evalm(C1[i,j,p])))
      fi
od od od
end:
```

Вызов процедуры производится следующей командой:

CentrStr(C,omegam,m).

Например,

CentrStr(array(sparse,1..5,1..5,1..5,[(1,2,3)=1,(2,1,3)=-1,(1,2,5)=1,(2,1,5)=-1,(1,4,1)=-2,(4,1,1)=2,(2,4,2)=1,(4,2,2)=-1,(3,4,3)=-1,(4,3,3)=1,(3,4,5)=1,(4,3,5)=1]),array(sparse,1..5, 1..5, 1..5,[(1,4,5)=1,(2,3,5)=1, (4,1,5)=-1,(3,2,5)=-1]),5).

Далее, определив контактную структуру, можно построить контактную метрическую структуру (η, ξ, φ, $g$) и изучить геометрические характеристики и свойства построенных структур.

В случае большой размерности решение представленных задач без использования систем аналитических вычислений затруднительно.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Дьяконов, В.* Maple 9 в математике, физике и образовании – М.: СОЛОН Пресс, 2004. – 688 с.
2. *Blair D.E.* Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds // Progress in Mathematics. – Birkhäuser Boston, 2002. – Vol. 203. – 304 p.
3. *Diatta, A.* Left invariant contact structures on Lie groups // arXiv: math.DG/ 0403555, 2004. – Vol. 2. – 17 p.



Авторы статьи

Прокопенко
Евгения Викторовна
канд. физ.-мат. наук,
доцент каф.прикладных информационных технологий КузГТУ
Email: pev-05@nmail.ru?
8-960-920-15-76

Славолюбова
Ярославна Викторовна
канд. физ.-мат. наук,
доцент каф.высшей и прикладной математики Кемеровского института (филиала) РЭУ им. Г.В. Плеханова
Email: jar1984@mail.ru

Ли
Сергей Робертович
канд. техн. наук,доцент каф. вычислительной техники и информационных технологий Кемеровского института (филиала) РЭУ им. Г.В.Плеханова/.
Email: sergejli@yandex.ru