

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

А.В. Бирюков, Т.С. Жирнова

ВЕРОЯТНОСТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ГОРНОМ ДЕЛЕ

Рассмотрим породный массив, содержащий крепкие включения (например, сферосидериты) и взрываемый скважинными зарядами.

Включение оказывается раздробленным, лишь в том случае, если заряд проходит через область, достаточно близкую к центру тяжести включения.

Проекцию этой области на горизонтальную плоскость будем считать кругом радиуса x , а сетку зарядов - квадратной со стороной квадрата, принятой за масштабную единицу.

Задача состоит в вычислении вероятности $P(x)$, с которой круг покрывает ровно одну точку единичной решетки.

Из несложных геометрических построений находим:

$$\begin{aligned} P(x) &= \pi x^2 \text{ при } 0 < x < 1/2; \\ P(x) &= \pi(1-x)^2 \text{ при } 1/2 < x < 1; \\ P(x) &= 1 \text{ при } x > 1. \end{aligned}$$

Наибольшая вероятность достигается в точке $\pi/4 \approx 1,75$. Рассматривать дробление включений более чем одним зарядом не имеет смысла ввиду резкого удорожания буровзрывных работ.

Одним из основных технологических процессов горного производства является дробление пород и полезных ископаемых. Результат дробления представляет собой дисперсную систему из частиц случайных размеров.

Средний линейный размер или диаметр частицы обозначим через x , а плотность распределения как случайной величины – через $f(x)$.

Найти этот закон теоретическим путём невозможно без каких-либо предположений, не имеющих ничего общего с действительностью. Поэтому единственno верным путём является поиск адекватной аппроксимации эмпирического распределения диаметра, получаемого измерением частиц репрезентативной выборки.

Эмпирические распределения диаметра могут быть убывающими, возрастающими и симметричными. В связи с этим выбор аппроксимации следует проводить в соответствующем классе законов.

Обозначим через $m(k)$ математическое ожидание k -ой степени диаметра и приведём примеры простых и достаточных для практики аппроксимаций. При этом условие $0 < x < 1$ означает, что за масштабную единицу принято наибольшее из наблюдаемых значений диаметра.

- 1) $f(x) = 2(1-x)$,
 $0 < x < 1, \quad m(k) = 2/(k+1)(k+2),$
- 2) $f(x) = 2x$,
 $0 < x < 1, \quad m(k) = 2/(k+2),$
- 3) $f(x) = 6x(1-x)$,
 $0 < x < 1, \quad m(k) = 6/(k+2)(k+3),$
- 4) $f(x) = 1$,
 $0 < x < 1, \quad m(k) = 1/(k+1),$
- 5) $f(x) = 3x^2$,
 $0 < x < 1, \quad m(k) = 3/(k+3),$
- 6) $f(x) = 2(1-x)$,
 $0 < x < 1, \quad m(k) = 2/(k+1)(k+2),$
- 7) $f(x) = \exp(-x)$,
 $0 < x < \infty, \quad m(k) = (k-1)!,$
- 8) $f(x) = x \exp(-x)$,
 $0 < x < \infty, \quad m(k) = k!.$

Имея закон распределения диаметра частиц, можно вычислить любую гранулометрическую характеристику дисперсной системы. Рассмотрим основные из них, наиболее востребованные инженерной практикой.

С каждой частицей дисперсной системы связана геометрическая или физическая количественная характеристика, пропорциональная k -й степени её диаметра (длина, площадь поверхности, объём, содержание какой-либо компонента и т. д.). Интеграл от $x^k f(x)/m(k)$ в границах от нуля до x представляет собой гранулометрическую функцию $g(x,k)$ дающую описание фракционного состава дисперсной системы по заданному суммарному свойству частиц: по суммарной длине ($k=1$), суммарной площади поверхности ($k=2$), суммарному объёму ($k=3$) и т. д.

Эта функция возрастает по аргументу x и убывает по аргументу k , т. е.

$$g(x,k) > g(x,k+1).$$

На практике функции $g(x,1)$ и $g(x,3)$ нередко отождествляют, допуская при этом значительную ошибку в силу приведённого неравенства.

Величина $m(2)/m(3)$ равна суммарной площади поверхности частиц в единичном объёме. Она играет основную роль в изучении динамики дробления.

Средней характеристикой крупности частиц дисперсной системы служит их средневзвешенный диаметр $m(k+1)/m(k)$, где весами являются значения k -й степени диаметра. Например, при $k=0$ имеем среднеарифметический диаметр, равный

$m(1)$, а при $k=3$ – средневзвешенный по объёму частиц диаметр. Но на практике их иногда ошибочно отождествляют.

Приведём примеры рассмотренных характеристик, отвечающих приведённым выше законам аппроксимации.

- 1) $g(x, k) = (k + 2)x^{k+1} - (k + 1)x^{k+2},$
 $m(2)/m(3) = 5/3,$
 $m(k + 1)/m(k) = (k + 3)/(k + 1);$
- 2) $g(x, k) = x^{k+2}, m(2)/m(3) = 5/4,$
 $m(k + 1)/m(k) = (k + 2)/(k + 3);$
- 3) $g(x, k) = (k + 3)x^{k+2} - (k + 2)x^{k+3},$
 $m(2)/m(3) = 3/2,$
 $m(k + 1)/m(k) = (k + 2)/(k + 4);$
- 4) $g(x, k) = x^{k+1}, m(2)/m(3) = 4/3,$
 $m(k + 1)/m(k) = (k + 1)/(k + 2);$
- 5) $g(x, k) = x^{k+3}, m(2)/m(3) = 6/5,$
 $m(k + 1)/m(k) = (k + 3)/(k + 4);$
- 6) $g(x, k) =$

Авторы статьи

Бирюков
Альберт Васильевич,
д.т.н., профессор каф.
математики КузГТУ

Жирнова
Татьяна Сергеевна,
к.т.н., доцент каф. математики
КузГТУ,
Email:
zhirnova.tatyana2013@yandex.ru.

$$\begin{aligned} &= \exp(-x) (1 + x + x^2/2 + \dots + x^{k-1}/(k-1)!), \\ &m(2)/m(3) = 1/2, \quad m(k+1)/m(k) = k; \\ 7) \quad &g(x, k) = \\ &= \exp(-x) (1 + x + x^2/2 + \dots + x^k/k!), \\ &m(2)/m(3) = 1/3, \quad m(k+1)/m(k) = k + 1. \end{aligned}$$

Гранулометрический анализ дисперсной системы часто проводят путём измерения проекций частиц на её фотопланограмме.

Если x и z – диаметры частицы и её проекции, то величина $t = z/x$ распределена в интервале $t_0 < t < 1$, где t_0 равно отношению минимального линейного размера частицы к максимальному. В силу независимости случайных величин x и z их средние значения \bar{x} и \bar{z} связаны соотношением $\bar{x} = 2\bar{z}/(1+t_0)$.

Измерением частиц взорванной породы установлено, что величина t_0 обладает небольшой вариацией с центром рассеяния 4/5. Отсюда следует, что для этих частиц $\bar{x} = 5\bar{z}/4$.