

## МАТЕМАТИКА

**УДК 519.6**

**С. С. Ахметова, С. Ш. Кажикенова**

### **МЕТОД КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ПРИ ИМПУЛЬСНОМ УПЛОТНЕНИИ ДИСПЕРСНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

С математической точки зрения метод конечного элемента (МКЭ) представляет обобщение метода Рэлея-Ритца, обеспечивающего минимизацию функционала потенциальной энергии путем отыскания линейной комбинации пробных функций  $\varphi$ , описывающих поведение элемента:

$$\varphi = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i,$$

где  $N$  – количество алгебраических уравнений в системе,

$a_i$  – коэффициенты, определяемые из данной системы уравнений.

Условия, предъявляемые к ним, таковы:

1. Выбираемые функции должны обладать определенной гладкостью внутри элемента, а также при переходе через границы, разделяющие элементы одного и того же типа или одни и те же функции формы вдоль указанных границ формы. Это означает, что пробные функции должны быть дифференцируемы столько раз, каков наибольший порядок производных в используемом функционале. Существование производных  $n$ -го порядка требует, чтобы в полиномиальном представлении функций поведения присутствовали по крайней мере члены  $n$ -й степени.

2. Построенные на базе выбранных функций соотношения, связывающие силы и перемещения, должны давать нулевую деформацию при движении тела как твердого целого.

3. Выбираемые функции должны включать представления постоянных величин для соответствующих напряжений или деформаций.

Основная проблема заключается в выборе пробных функций  $\varphi_i$ , обеспечивающих простоту вычислений и достаточную точность [1]. Вид их зависит от типа конечного элемента и условий деформирования рассматриваемой области.

Пусть в правой ортогональной системе координат  $Ox_1x_2x_3$  имеется некое тело, деформирующееся упруго-пластично. Разделим его системой поверхностей на несколько объемов, которые и будут конечными элементами. В общем случае конечный элемент – многогранник, ограниченный криволинейными поверхностями (рис. 1). Таким образом, рассматриваемое тело аппроксимируется композицией из  $N$  конечных элементов. Описание поведения объекта под нагрузкой осуществляется с помощью компонент сил и смещений, заданных в его определенных точках. Эти же точки служат

для соединения элементов между собой. Их называют узловые точки или просто узлы. Узлы и конечные элементы последовательно нумеруются.

Помимо глобальной системы координат  $Ox_1x_2x_3$  каждому элементу ставится в соответствие локальная система  $O'\xi_1\xi_2\xi_3$ . Если взять произвольный конечный элемент  $e$ , то со стороны  $m$  смежных элементов на него действуют обобщенные реакции  $\bar{F}_{1\xi}^e, \bar{F}_{2\xi}^e, \dots, \bar{F}_{m\xi}^e$ , положительные направления которых совпадают с положительными направлениями локальных осей  $O'\xi_1, O'\xi_2, O'\xi_3$ . Под обобщенными реакциями

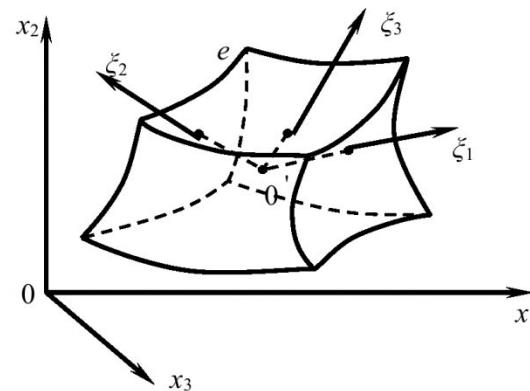


Рис.1 – Схема объемного конечного элемента.

понимают реактивные силы и моменты, число которых для всех узлов одинаково.

Обозначим через  $\mathbf{U}_{1\xi}^e, \mathbf{U}_{2\xi}^e, \dots, \mathbf{U}_{m\xi}^e$  векторы обобщенных перемещений узлов  $e$ -го конечного элемента, также предположив, что положительные направления компонент этих векторов совпадают с положительными направлениями локальных осей  $O'\xi_1, O'\xi_2, O'\xi_3$ . Под обобщенными перемещениями понимаются как линейные, так и угловые перемещения. Тогда вектор  $\bar{\mathbf{U}}_\xi$  будет вектором обобщенных узловых перемещений рассматриваемого конечного элемента. Предполагается, что перемещения в любой точке элемента определяются вектором  $\bar{\mathbf{U}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  [1]:

$$\bar{\mathbf{U}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = [N(\xi_1, \xi_2, \xi_3)] \bar{\mathbf{U}}_\xi, \quad (1)$$

где

$$[N(\xi_1, \xi_2, \xi_3)] = [IN_{1\xi} \ IN_{2\xi} \ \dots \ IN_{m\xi}], \quad (2)$$

$I$  – единичная матрица размерности  $[n \times n]$ , значение  $n$  определяется типом элемента: 1 – для линейного, 2 – для плоского и 3 – для пространственного;

$N_{1\xi}, N_{2\xi}, N_{3\xi}$  – функции формы, то есть скалярные функции координат, размерности которых совпадают с размерностью вектора  $\bar{U}_{i\xi}$ .

Функции  $N_{i\xi}$  должны быть выбраны так, чтобы при подстановке в соотношение (1) координат  $i$ -го узла компоненты вектора  $\bar{U}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  принимали значения компонент вектора  $\bar{U}_{i\xi}$  обобщенных перемещений  $i$ -го узла рассматриваемого конечного элемента ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Следовательно, матрица  $[N(\xi_1, \xi_2, \xi_3)]$  является функцией локальных координат  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ .

Обобщенные деформации в любой точке конечного элемента всегда связаны с обобщенными перемещениями этой точки дифференциальной зависимостью:

$$\bar{\varepsilon}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = [L] \bar{U}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (3)$$

где  $[L]$  – дифференциальная матрица, определяемая для каждой конкретной задачи согласно теории упругости или пластичности.

Подстановка (1) в (3) дает:

$$\bar{\varepsilon}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = [B_\xi] \bar{U}_\xi, \quad (4)$$

здесь символом  $[B_\xi]$  обозначена матрица производных или градиентов:

$$[B_\xi] = [B(\xi_1, \xi_2, \xi_3)] = [L] [N(\xi_1, \xi_2, \xi_3)]. \quad (5)$$

Из (5) следует, что, во-первых, матрицу  $[B(\xi_1, \xi_2, \xi_3)]$  можно определить простым дифференцированием, а во-вторых, она тоже является функцией локальных координат  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ .

Соотношение (4) связывает обобщенные деформации в любой точке конечного элемента с узловыми обобщенными перемещениями этого элемента.

Между обобщенными реакциями  $\bar{F}_{1\xi}^e, \bar{F}_{2\xi}^e, \dots, \bar{F}_{m\xi}^e$  и перемещениями  $\bar{U}_{1\xi}^e, \bar{U}_{2\xi}^e, \dots, \bar{U}_{m\xi}^e$  данного элемента также можно установить однозначную зависимость. В общем виде она выглядит так:

$$\bar{F}_\xi^e = [R_\xi^e] \bar{U}_\xi^e + \bar{Q}_\xi^e. \quad (6)$$

Здесь  $\bar{F}_\xi^e$  и  $\bar{U}_\xi^e$  – векторы обобщенных реакций и перемещений соответственно. Если обозначить операцию транспонирования матриц и векторов по общепринятой систематике верхним индексом  $T$ , то

$$\bar{F}_\xi^e = \{\bar{F}_{1\xi}^e, \bar{F}_{2\xi}^e, \dots, \bar{F}_{m\xi}^e\}^T;$$

$$\bar{U}_\xi^e = \{\bar{U}_{1\xi}^e, \bar{U}_{2\xi}^e, \dots, \bar{U}_{m\xi}^e\}^T;$$

$\bar{Q}_\xi^e, [R_\xi^e]$  – вектор и матрица реакций  $e$ -го конечного элемента в локальной системе координат  $O'\xi_1\xi_2\xi_3$ :

$$\bar{Q}_\xi^e = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{1\xi}^e \\ \bar{Q}_{2\xi}^e \\ \dots \\ \bar{Q}_{m\xi}^e \end{bmatrix},$$

$$R_\xi^e = \begin{bmatrix} r_{11\xi}^e r_{12\xi}^e \dots r_{1m\xi}^e \\ r_{21\xi}^e r_{22\xi}^e \dots r_{2m\xi}^e \\ \dots \dots \dots \\ r_{m2\xi}^e r_{m2\xi}^e \dots r_{mm\xi}^e \end{bmatrix}.$$

$\bar{Q}_\xi^e$  – вектор узловых обобщенных усилий, вызванных поверхностными и массовыми механическими и температурными нагрузками, действующими на  $e$ -тый конечный элемент. Таким образом, его можно представить в следующем виде:

$$\bar{Q}_\xi^e = \bar{Q}_{p\xi}^e + \bar{Q}_{q\xi}^e + \bar{Q}_{t\xi}^e, \quad (7)$$

где  $\bar{Q}_{p\xi}^e$  – вектор, обусловленный действием объемных нагрузок  $p_\xi$ :

$$\bar{Q}_{p\xi}^e = - \int [N_\xi]^T p_\xi dV; \quad (8)$$

$\bar{Q}_{q\xi}^e$  – вектор, обусловленный действием поверхностных нагрузок  $q_\xi$ :

$$\bar{Q}_{q\xi}^e = - \int [N_\xi]^T q_\xi dV; \quad (9)$$

$\bar{Q}_{t\xi}^e$  – вектор, обусловленный действием температурных нагрузок  $\varepsilon_t$ :

$$\bar{Q}_{t\xi}^e = - \int [B_\xi]^T [D] \varepsilon_t dV, \quad (10)$$

$V$  – объем конечного элемента.

Столбцы матрицы  $[R_\xi^e]$  представляют собой обобщенные усилия в узлах конечного элемента, обусловленные единичными перемещениями этих узлов при отсутствии внешних нагрузок на элемент:

$$R_\xi^e = - \int [B_\xi]^T [D] [B_\xi] dV, \quad (11)$$

где  $[D]$  – алгебраическая матрица (матрица свойств материала элемента).

Если для упругого материала обобщенные напряжения  $\bar{\sigma}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  связаны с обобщенными деформациями зависимостью:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \\ &= [D^e] \{ \bar{\epsilon}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - \bar{\epsilon}_0 \} + \bar{\sigma}_0, \quad (12)\end{aligned}$$

то для упругопластичного:

$$\bar{\sigma}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = [D^{ep}] \bar{\epsilon}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (13)$$

где  $[D^e]$  – матрица упругости;

$[D^{ep}]$  – матрица упругопластичности;

$\bar{\epsilon}_0$  – вектор начальных деформаций;

$\bar{\sigma}_0$  – вектор начальных напряжений.

Из (4) и (13) следует выражение связи обобщенных напряжений в любой точке конечного элемента с обобщенными узловыми перемещениями этого элемента:

– для упругой задачи:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \\ &= [D^e] [B(\xi_1, \xi_2, \xi_3)] \bar{U}_\xi - [D^e] \bar{\epsilon}_0 + \bar{\sigma}_0 \quad ; \quad (14)\end{aligned}$$

– для упругопластической задачи:

$$\bar{\sigma}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = [D^{ep}] [B(\xi_1, \xi_2, \xi_3)] \bar{U}_\xi. \quad (15)$$

Элементы упругопластической матрицы не являются постоянными величинами, а зависят от напряжений (или деформаций). Их можно вычислять по напряжениям  $\sigma_{n-1}$ , полученным на предыдущем ( $n-1$ )-ом шаге нагружения при итерационном процессе решения.

Интегрирование выражений (8) и (11) дает возможность вычислить определяющие матрицы и векторы для конечных элементов. Помимо них, при необходимости учета массовых сил от ускорений элемента используется матрица масс  $[m_\xi]$ :

$$[m_\xi] = - \int_V [N_\xi]^T [N_\xi] dV. \quad (16)$$

Для получения конечно-элементного решения нагрузка прикладывается малыми ступенями. Связь напряжений и деформаций в элементе в пределах одной ступени нагружения определяется либо упругой матрицей (если элемент упруг), либо упругопластической – когда напряжения в элементе вышли на поверхность текучести [2, 3, 4]. Шаг за шагом напряжения в элементах суммируются.

Одним из наиболее важных этапов конечно-элементного анализа является построение на модели сетки из конечных элементов [5].

В работе [2] отмечается, что если выбран тип элемента и определены соответствующие функции формы, то фактически все дальнейшие действия просты, как и их последовательность, и они могут быть выполнены вычислителем, не знако-

мым с физическим содержанием задачи. Однако тут встречаются свои нюансы. Наиболее популярными конечными элементами среди расчетчиков являются линейный элемент треугольной формы для плоских задач и, соответственно, тетраэдр – для пространственных. Действительно, они позволяют аппроксимировать расчетную область практически любой конфигурации, имеют минимальное число точек интегрирования (в случае плоского элемента – всего одну), простые функции формы и т.п. [2, 6, 7]. Но наряду с этим они обладают очень существенным недостатком – жесткостью в отношении деформаций. То есть они склонны сохранять свою форму, особенно если речь идет о системе подобных элементов. Поэтому в случае больших деформаций и перемещений применение таких треугольных элементов способно вызвать значительную ошибку. Правомерно отказаться от них и перейти к другим.

Семейства конечных элементов отличаются друг от друга в первую очередь числом степеней свободы. Их увеличение означает усложнение элемента, что, как правило, при заданной степени точности сопровождается уменьшением общего числа неизвестных. Это, в свою очередь, ведет к сокращению времени решения уравнений. Однако, с другой стороны, подготовка входных данных усложняется. В результате возможен вариант, когда время определения основных соотношений (матриц, векторов и т.п.) настолько возрастет, что превысит экономию от уменьшения времени решения. Алгоритм расчета станет не эффективным. А ведь повышение эффективности алгоритма особенно важно при решении трехмерных задач [2].

Простейшим линейным элементом является прямоугольник, объемным – прямая четырехгранная призма. Увеличение числа узлов с помощью промежуточных точек на их сторонах или ребрах, то есть переход от элементов первого порядка (линейных) к квадратичным элементам (второго порядка – с одним промежуточным узлом) и кубическим (третьего порядка – с двумя промежуточными узлами) позволяет повысить точность решения [2, 7]. Очевидно, что при этом необходимое для аппроксимации количество элементов уменьшится. Но подобные конечные элементы имеют очень сильное ограничение – исследуемая область обязательно должна быть прямоугольной, иначе невозможно получить соответствующую конечно-элементную сетку. Для криволинейных границ требуется преобразование этих простых элементов в элементы произвольной формы.

Следовательно, сильно деформирующуюся среду желательно отображать с помощью криволинейных конечных элементов. Они называются параметрическими, так как функции для исследования их характеристик также задаются с помощью функций формы. Построение параметрического элемента представляет собой преобразование безразмерного прямоугольного элемента с

заданным числом узлов в реальный криволинейный элемент с тем же числом узлов. При этом возможны следующие типы:

– изопараметрические элементы. Это элементы, в которых функции формы, определяющие геометрию элемента и искомую функцию, одинаковы. Другими словами, функции, используемые для представления поведения при деформировании, используются также и для описания геометрических характеристик элемента [2, 5]. Получаются они путем модификации безразмерных прямоугольных элементов с заданным числом узлов в реальные криволинейные элементы с тем же числом узлов. Так, если функции, задающие поле перемещений, будут кубическими полиномами, то и стороны элемента будут описываться теми же кубическими функциями. Если межэлементно совместные поля перемещений выбираются для описания геометрических характеристик элемента, то в объединенной аналитической модели деформированный элемент состыковывается с любым подобным ему соседним элементом без разрывов геометрических характеристик.

– субпараметрические элементы. В этом случае порядок функций, задающих геометрию, ниже порядка функциональных представлений для перемещений [2, 6].

– суперпараметрические элементы. Для них изменение геометрии описывается более полно, чем изменение неизвестных, следовательно, порядок

функций, представляющих геометрические характеристики, выше.

На рис. 2 показаны четырехсторонние параметрические элементы. В простейшем из них (вариант *a*) для обобщения прямоугольника на случай произвольного четырехугольника используется линейное поле. В элементах более высокого порядка (*b* и *c*) для задания границ привлечены соответственно квадратичные и кубические функ-

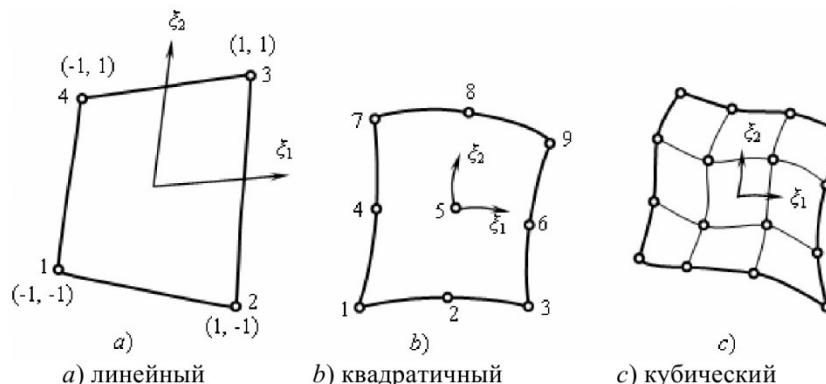


Рис. 2 – Типы параметрических конечных элементов.

ции, используемые и для представления перемещений. Естественно, что они обеспечивают лучшее задание криволинейных сторон.

В заключение следует заметить, что необходимо избегать вытянутых элементов, так как с увеличением степени удлинения элемента (отношение максимальных линейных размеров в двух направлениях) точность решения падает. Значит, правомерно остановить свой выбор на квадратичном или кубическом четырехугольном параметрическом элементе с коэффициентом удлинения порядка 1-2 для плоской задачи и шестиугольным (вроде прямоугольной призмы) для объемной.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: Справочник / Под общ. ред. В. И. Мяченкова. – М.: Машиностроение, 1989. – 520 с.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541с.
3. Парамонов В. Н. Конечноэлементное решение задачи о вдавливании штампа // Основания и фундаменты: Интернет-журнал. – 2000. № 3.
4. Фадеев А. Б. Метод конечных элементов в геомеханике. – М.: Недра, 1987. – 221 с.
5. Каплун А. Б. ANSYS в руках инженера: / Каплун А. Б., Морозов Е. М, Олферьева М. А. Практическое руководство. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 272 с.
6. Сегерлинг Л. Д. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
7. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
8. Кажикенова С. Ш. Апроксимация стационарной модели неоднородной несжимаемой жидкости // Вестник Кузбасского государственного технического университета. – 2010. № 6. – С.113-116.

### Авторы статьи

Кажикенова Сауле Шарапатовна, докт.техн. наук, профессор каф. «Прикладная математика и информатика» (Карагандинский государственный университет) email: [sauleshka55@mail.ru](mailto:sauleshka55@mail.ru)

Ахметова Сандугаш Советовна, канд. техн. наук, доцент каф. «Прикладная математика и информатика» ( Карагандинский государственный университет) Тел. 8(7212)770395

Поступило в редакцию 10.11.2014