

УДК 519.6

Д. Б. Алибиев, А. Ш. Кажикенова

ОБ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ОКЕАНОЛОГИИ

Пусть дана система уравнений линейной стационарной модели океана

$$\mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} + \mu \Delta v - \nabla \xi - l \times v + f = 0, \quad (1)$$

$$\int_0^H d\hat{v} v dx_3 = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x_3} = 0, \quad (2)$$

$$v \Big|_{S_h} = 0, \quad S_h - \text{граница области } \Omega = (0,1) \times (0,1) \times (0,1). \quad (3)$$

В области Ω_h аппроксимируем уравнения (1), (2)

$$\mu_0 v_{x_1 \hat{x}_1} + \mu \Delta_h v - \hat{\nabla} \xi - l \times v + f = 0, \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} d\hat{v} v_h v h = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{k=1}^{N-1} (v_{\alpha \bar{x}_\alpha})_{i,j,k} h = 0, \quad (5)$$

$$v \Big|_{S_h} = 0, \quad N h = 1, \quad S_h - \text{граница области } \Omega_h. \quad (6)$$

Рассмотрим итерационный метод для численного решения задачи (4) - (6):

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = \mu_0 v_{x_3 \bar{x}_3}^{n+1} + \mu \Delta_h v^{n+1} - \hat{\nabla}_h \left(\xi^n - \tau_0 \sum d\hat{v} v_h v^n h \right) + \quad (7)$$

$$+ \tau_0 \delta \Lambda_h (v^{n+1} - v^n) - l \times v^{n+1} + f, \\ \frac{\xi^{n+1} - \xi^n}{\tau_0} + \sum_{k=1}^{N-1} d\hat{v} v_h v^{n+1} h = 0, \quad \omega^{n+1} \Big|_{S_h} = 0, \quad v^0 = v_0, \quad \xi^0 = \xi_0, \quad x \in \Omega_h, \quad (8)$$

где вектор

$$\Lambda_h (v^{n+1} - v^n) = ((v_1^{n+1} - v_1^n)_{x_1 x_1}, \quad ((v_2^{n+1} - v_2^n)_{x_2 x_2}), v^0 = v_0, \quad \xi^0 = \xi_0, \quad x \in \overline{\Omega}_h.$$

Разностная схема (4) – (6) имеет единственное решение. Для ее решения справедлива оценка

$$\|v\|_1 \leq C_0 \|f\|_{(-1)}.$$

Данная схема имеет первый порядок аппроксимации и сходится со скоростью $O(h)$. Оценим скорость сходимости итерационного метода к решению задачи (4), (6). Введем следующие обозначения

$$v^{n+1} - v = \omega^{n+1}, \quad \pi^{n+1} = \xi^{n+1} - \xi,$$

где (v, ξ) – решения задачи (4) - (6). Тогда для ω^{n+1} , π^{n+1} получим однородные уравнения

$$\frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\tau} = \mu_0 \omega_{x_3 \bar{x}_3}^{n+1} + \mu \Delta_h \omega^{n+1} - \hat{\nabla}_h (\pi^n - \tau_0 \sum_{k=1}^{N-1} d\hat{v} v_h \omega^n h) + \tau_0 \delta \Lambda_h (\omega^{n+1} - \omega^n) - l \times \omega^{n+1} \quad (9)$$

$$\frac{\pi^{n+1} - \pi^n}{\tau_0} + \sum_{k=1}^{N-1} d\hat{v} v_h \omega^{n+1} h = 0, \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \pi h^2 = 0 \quad \omega^{n+1} \Big|_{S_h} = 0, \quad \pi^0 = \xi^0 - \xi, \quad \omega^0 = v^0 - v. \quad (11)$$

Из формулы (10) найдем π^n , подставим найденное значение в (9), в результате получим

$$\frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\tau} = \mu_0 \omega_{x_3 \bar{x}_3}^{n+1} + \mu \Delta_h \omega^{n+1} - \hat{\nabla}_h \left(\sum (d\hat{v} v_h \omega^{n+1} - d\hat{v} v_h \omega^n) h \tau_0 + \pi^{n+1} \right) + \tau_0 \delta \Lambda_h (\omega^{n+1} - \omega^n). \quad (12)$$

Умножим выражения (10), (12) на $2h^3\pi^{n+1}, 2h^3\omega^{n+1}$, просуммируем по точкам области Ω_h соответственно, в результате этого будем иметь

$$\frac{\|\omega^{n+1}\|^2 - \|\omega^n\|^2 + \|\omega^{n+1} - \omega^n\|^2}{\tau} + 2\|\omega^{n+1}\|_1 = 2\left(\pi^{m+1} + \tau_0 \sum_{k=1}^{N-1} (\hat{d}v_h \omega^{m+1} - \hat{d}v_h \omega^m)h, \sum_{k=1}^{N-1} \hat{d}v_h \omega^{m+1} h\right) - 2\delta\tau_0 \sum_{\alpha=1}^2 \left(\|\omega_{\alpha x_\alpha}^{n+1}\|^2 - \|\omega_{\alpha x_\alpha}^n\|^2 + \|\omega_{\alpha x_\alpha}^{n+1} - \omega_{\alpha x_\alpha}^n\|^2 \right). \quad (13)$$

$$\frac{\left(\|\pi^{n+1}\|^2 - \|\pi^n\|^2 + \|\pi^{n+1} - \pi^n\|^2 \right)}{\tau_0} + 2\left(\sum_{k=1}^{N-1} \hat{d}v_h \omega^{m+1} h, \pi^{n+1} \right) = 0. \quad (14)$$

Преобразуем слагаемые

$$\begin{aligned} & 2\tau_0 \left(\sum_{k=1}^{N-1} \hat{d}v_h \omega^{m+1} h - \sum_{k=1}^{N-1} \hat{d}v_h \omega^m h, \sum_{k=1}^{N-1} \hat{d}v_h \omega^{m+1} h \right) = \\ & = \tau_0 \left(\left\| \sum_{k=1}^{N-1} \hat{d}v_h \omega^{m+1} h \right\|^2 - \left\| \sum_{k=1}^{N-1} \hat{d}v_h \omega^m h \right\|^2 - \left\| \sum_{k=1}^{N-1} \hat{d}v_h (\omega^{m+1} - \omega^m) h \right\|^2 \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Учитывая (15), умножим (13), (14) на τ и сложим их, в результате получим

$$\begin{aligned} & \|\omega^{n+1}\|^2 - \|\omega^n\|^2 + \|\omega^{n+1} - \omega^n\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0} \left(\|\pi^{n+1}\|^2 - \|\pi^n\|^2 + \|\pi^{n+1} - \pi^n\|^2 \right) + \\ & + 2\tau \|\omega^{n+1}\|_1^2 + \delta\tau_0 \tau \sum_{\alpha=1}^2 \left(\|\omega_{\alpha x_\alpha}^{n+1}\|^2 - \|\omega_{\alpha x_\alpha}^n\|^2 + \|\omega_{\alpha x_\alpha}^{n+1} - \omega_{\alpha x_\alpha}^n\|^2 \right) = \\ & = \tau_0 \tau_0 \left(\left\| \sum_{k=1}^{N-1} \hat{d}v_h \omega^{m+1} h \right\|^2 - \left\| \sum_{k=1}^{N-1} \hat{d}v_h \omega^m h \right\|^2 - \left\| \sum_{k=1}^{N-1} \hat{d}v_h (\omega^{m+1} - \omega^m) h \right\|^2 \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Заметим, что существует положительная постоянная β_0 , не зависящая от шага сетки. Для него справедливо неравенство

$$\beta_0 \sum_{\alpha=1}^2 \|\omega_{\alpha x_\alpha}^{n+1} - \omega_{\alpha x_\alpha}^n\|^2 \geq \left\| \sum_{k=1}^{N-1} \hat{d}v_h (\omega^{n+1} - \omega^n) h \right\|^2, \quad (17)$$

$$\frac{\tau}{\tau_0} \|\pi^{n+1} - \pi^n\|^2 = \tau \tau_0 \left\| \sum_{k=1}^{N-1} \hat{d}v_h \omega^{n+1} h \right\|^2. \quad (18)$$

Отбросим отрицательные слагаемые в правой части (16) и δ возьмем так, чтобы $(\delta - \beta_0) > 0$. Тогда с учетом (17), (18) имеем

$$\begin{aligned} & \|\omega^{n+1}\|^2 - \|\omega^n\|^2 + \|\omega^{n+1} - \omega^n\|^2 + 2\tau \|\omega^{n+1}\|_1^2 + \delta\tau_0 \tau \sum_{\alpha=1}^2 \left(\|\omega_{\alpha x_\alpha}^{n+1}\|^2 - \|\omega_{\alpha x_\alpha}^n\|^2 \right)_2 + \\ & + \frac{\tau}{\tau_0} \left(\|\pi^{n+1}\|^2 - \|\pi^n\|^2 \right) + (\delta - \beta_0) \tau_0 \tau \sum_{\alpha=1}^2 \|\omega_{\alpha x_\alpha}^{n+1} - \omega_{\alpha x_\alpha}^n\|^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Отсюда видно, что $\|\omega^{n+1}\|_1 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Но из формулы (19) получить скорость сходимости затруднительно. Для получения оценки скорости сходимости сделаем следующие преобразования:

умножим (19) на любую сеточную функцию, которая обращается в ноль на границе, затем просуммируем по точкам области. В результате имеем:

$$\begin{aligned} \tau \left(\pi^{n+1}, \sum_{\alpha=1}^3 \psi_{\alpha x_\alpha} \right) &= (\omega^{n+1} - \omega^n, \psi) + \tau (\omega_x^{n+1} \psi_x)_1 + \\ &+ \delta \tau \tau_0 \left(\sum_{\alpha=1}^2 (\omega_{\alpha x_\alpha}^{n+1} - \omega_{\alpha x_\alpha}^n) \psi_{\alpha x_\alpha} \right) + \tau \tau_0 \left(\sum_{k=1}^{N-1} h d \hat{i} v_h (\omega^{n+1} - \omega^n) d \hat{i} v_h \psi \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем следующую оценку

$$\begin{aligned} \tau \sup_{\|\psi\|_1=1} \left(\pi^{n+1}, \sum_{\alpha=1}^3 \psi_{\alpha x_\alpha} \right) &\leq \\ \leq N_0 \left(\|\omega^{n+1} - \omega^n\| + \tau \|\omega^{n+1}\|_1 + \delta \tau_0 \tau \left\| \sum (\omega_{\alpha x_\alpha}^{n+1} - \omega_{\alpha x_\alpha}^n) \right\| + \tau \tau_0 \left\| \sum d \hat{i} v_h (\omega^{n+1} - \omega^n) h \right\| \right) &\quad (20) \end{aligned}$$

или

$$\sup_{\|\psi\|_1=1} \left(\pi^{n+1}, \sum_{\alpha=1}^3 \psi_{\alpha x_\alpha} \right) \leq \chi \|\pi^{n+1}\|. \quad (21)$$

С учетом формулы (17) из формулы (20) получим

$$\begin{aligned} \tau^2 \chi^2 \|\pi^{n+1}\|^2 &\leq N_2 \left(\|\omega^{n+1} - \omega^n\|^2 + \tau^2 \|\omega^{n+1}\|_1^2 + \right. \\ &+ \left. (\delta^2 \tau_0^2 \tau^2 + \beta_0 \tau^2 \tau_0^2) \left\| \sum_{\alpha=1}^2 (\omega_{\alpha x_\alpha}^{n+1} - \omega_{\alpha x_\alpha}^n) \right\|^2 \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Умножим неравенство (22) на положительное число α_0 , сложим его с формулой (19). Полагая, что $1 - \alpha_0 N_2 > 0$, получим

$$(1 - \tau N_2 \alpha_0) > 0, \quad (\delta - \beta_0) \delta \tau_0 \tau - \alpha_0 N_2 (\delta^2 \tau_0^2 \tau^2 + \beta_0 \tau^2 \tau_0^2) > 0. \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \|\omega^{n+1}\|^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_0} + \alpha_0 \chi^2 \tau^2 \right) \|\pi^{n+1}\|^2 + 2\tau \|\omega^{n+1}\|_1^2 + \delta \tau_0 \tau \sum_{\alpha=1}^2 \|\omega_{x_\alpha}^{n+1}\|^2 &\leq \\ \leq \delta \tau_0 \tau \sum_{\alpha=1}^2 \|\omega_{x_\alpha}^n\|^2 + \|\omega^n\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0} \|\pi^n\|^2. & \end{aligned}$$

Применяя неравенства

$$\tau \|\omega^{n+1}\|_1 \geq C_\Omega \|\omega^{n+1}\| \tau, \quad \tau \|\omega^{n+1}\|_1 \geq \tau \sum \|\omega_{\alpha x_\alpha}^{n+1}\|,$$

из формулы (23) получим

$$\begin{aligned} \|\omega^{n+1}\|^2 \left(1 + \frac{\tau C_\Omega}{2} \right) + \tau \left(\frac{1}{2} + \delta \tau_0 \right) \sum_{\alpha=1}^2 \|\omega_{x_\alpha}^{n+1}\|^2 + \left(\frac{1}{\tau_0} + \alpha_0 \chi^2 \tau \right) \tau \|\pi^{n+1}\|^2 &\leq \\ \leq \|\omega^n\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0} \|\pi^n\|^2 + \delta \tau \tau_0 \sum_{\alpha=1}^2 \|\omega_{x_\alpha}^n\|^2. & \end{aligned}$$

Последнее неравенство перепишем в виде

$$\begin{aligned} \|\omega^{n+1}\|^2 \left(1 + \frac{\tau C_\Omega}{2} \right) + \left(1 + \frac{1}{2 \delta \tau_0} \right) \delta \tau_0 \tau \sum_{\alpha=1}^2 \|\omega_{x_\alpha}^{n+1}\|^2 + \left(1 + \alpha_0 \chi^2 \tau^2 \tau \right) \frac{\tau}{\tau_0} \|\pi^{n+1}\|^2 &\leq \\ \leq \|\omega^n\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0} \|\pi^n\|^2 + \delta \tau \tau_0 \sum_{\alpha=1}^2 \|\omega_{x_\alpha}^n\|^2. & \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\|\omega^{n+1}\|^2 + \delta\tau_0\tau \sum_{\alpha=1}^2 \|\omega_{x_\alpha}^{n+1}\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0} \|\pi^{n+1}\|^2 \leq q \left(\|\omega^n\|^2 + \delta\tau\tau_0 \sum_{\alpha=1}^2 \|\omega_{x_\alpha}^n\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0} \|\pi^n\|^2 \right),$$

где

$$q = \min \left\{ 1 + \frac{\tau C_\Omega}{2}, 1 + \alpha_0 \chi^2 \tau^2 \tau, 1 + \frac{1}{2\delta\tau_0} \right\}.$$

Нами доказана следующая теорема

Теорема 1. Пусть выполнены условия (23). Тогда решение задачи (7) – (8) сходится к решению задачи (4) – (6) со скоростью геометрической прогрессии.

Лемма. Если $\|f_h\|_{(-1)} \leq c < \infty$, то разностная схема (4) – (6) имеет хотя бы одно решение и для решения имеет место оценка

$$\|u\|_1 \leq c (\|f_h\|_{(-1)} + \|\rho g\|) \quad (24)$$

Доказательство. Умножим (4) на v , (6) на v_3 и просуммируем по сеткам Ω_h , используя (5), (7), получим

$$\|u\|_1^2 = (pg_1 u_3) + (f_h, v). \quad (25)$$

Правую часть (25) оцениваем по неравенству Гельдера

$$\begin{aligned} |(\rho g', u_3)| &\leq \|\rho g\| \|v\|_1, \\ |(f_h, u)| &\leq \|f_h\|_{(-1)} \|u\|_1. \end{aligned}$$

Отсюда легко получить оценку (24).

Из теоремы Брауэра [1] следует существование хотя бы одного решения задачи (4) – (6). Лемма доказана.

Таким образом, на основании выше изложенного, для линейной модели океана можно применить двухслойный итерационный метод. Многие гидродинамические модели [1-4] для решения определения качества воды океана и разных водоемов сводятся к решению гидростатических моделей атмосферы и океана. Особенность моделей заключается в том, что системы уравнений интегро-дифференциальные.

Для задачи (4) – (6) построим неявный итерационный процесс:

$$B V_t^{n+1} = \mu_0 V_{x_3 \bar{x}_3}^{n+1} + \mu \Delta_h V^{n+1} - \hat{\nabla}_h \xi^{n+1} + f_h - (\alpha l \times V^{n+1} + \beta l \times V^n), \quad (26)$$

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

$$\chi \tau \xi_t^{n+1} + \sum_{k=1}^{N-1} d\bar{V}_h V^{n+1} h = 0, \quad (\xi, 1)_{\Omega_h} = 0. \quad (27)$$

χ, τ – итерационные параметры, B – некоторый положительный оператор V :

$$V^0 = V_0, \quad \xi^0 = \xi_0, \quad x \in \bar{\Omega}_h, \quad V^n|_{S_h} = 0. \quad (28)$$

Устойчивость этих двухслойных разностных схем более улучшенная. Если $\chi = 0, B = 0$, то итерационный процесс сходится за одну итерацию. Непосредственное применение двухслойных итерационных методов для модели океана вызывает некоторые затруднения, так как запись итерационного метода (26) – (27) отличается от классической формы двухслойных итерационных методов:

$$By_t + Ay = \varphi.$$

Исследуем теперь сходимость итерационных методов (26) – (28). Составим погрешности $\omega^{n+1} = V^{n+1} - V$, $\pi^{n+1} = \xi^{n+1} - \xi$. Тогда из (4) – (6) и (26) – (28) получим сеточную краевую задачу для ω^{n+1} и π^{n+1} :

$$B \omega_t^{n+1} = \mu_0 V_{x_3 \bar{x}_3}^{n+1} + \mu \Delta_h \omega^{n+1} - \hat{\nabla}_h \pi^{n+1} - (\alpha l \times \omega^{n+1} + \beta l \times \omega^n), \quad (29)$$

$$\chi \tau \pi_t^{n+1} + \sum_{k=1}^{N-1} d\bar{V}_h V^{n+1} h = 0, \quad (\pi^{n+1}, 1)_{\Omega_h} = 0,$$

$$\omega^0 = V_0 - V, \quad \omega^n|_{S_h} = 0, \quad \pi^0 = \xi_0 - \xi, \quad (\pi^0, 1)_{\Omega_h} = 0.$$

Пусть D - симметричный сеточный неотрицательный оператор, определенный в $L_2(\Omega_h)$, тогда через $\|u\|_D$ обозначим полунорму $(Du, u) = \|u\|_D$. Положим $B=B^*>0$, через $\|u\|_2$ обозначим

$$\|u\|_2^2 = (Bu, u) + \frac{\tau\alpha_0}{\alpha_1} \|u\|_1^2,$$

где $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 1$ – положительные постоянные.

Теорема 2. Если $B = B^* \geq \chi_0 \|v\|^2 \geq \|v\|^2$, то итерационный процесс сходится со скоростью геометрической прогрессии при $\tau \leq \tau_0(\beta)$, и имеет место оценка

$$\|\omega^{n+1}\|_2^2 + \chi\tau \|\pi^{n+1}\|^2 \leq q (\|\omega^{n+1}\|_2^2 + \chi\tau \|\pi^n\|^2), \quad q < 1.$$

Доказательство. Умножим (26) на $2\tau v^{n+1}h^3, 2\tau h^2\xi^{n+1}$, просуммируем по сеткам области и в результате сложения имеем равенство

$$\begin{aligned} & \|\omega^{n+1}\|_B^2 - \|\omega^n\|_B^2 + \|\omega^{n+1} - \omega^n\|_B^2 + \tau 2 \|\omega^{n+1}\|_1^2 + \chi\tau (\|\pi^{n+1}\|^2 - \|\pi^n\|^2) + \\ & + \tau\chi \|\pi^{n+1} - \pi^n\|^2 + 2\tau\beta(l \times \omega^n, \omega^{n+1}) = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Предположим, что

$$\|v\|_B = (Bv, v) \leq \chi_1 \|v\|_1, \quad \chi_0 \|v\|_B^2 \geq \|v\|^2.$$

Оценим последние слагаемые в равенстве (30):

$$\begin{aligned} & \tau\beta(l \times \omega^n, \omega^{n+1}) \leq |\tau\beta(l \times \omega^n, \omega^{n+1} - \omega^n)| = \tau\beta(l \times \omega^n, \omega^{n+1} - \omega^n) = \\ & = \tau\beta(l \times (\omega^n - \omega^{n+1}), (\omega^{n+1} - \omega^n)) + \tau\beta(l \times \omega^{n+1}, \omega^{n+1} - \omega^n) \leq \\ & \leq \tau\beta(\|\omega^{n+1}\| \|\omega^{n+1} - \omega^n\|) \leq \tau\beta\sqrt{\chi_0} \|\omega^{n+1} - \omega^n\|_B \|\omega^{n+1}\| \leq \\ & \leq \frac{1}{4} \|\omega^{n+1} - \omega^n\|_B^2 + \frac{\tau^2 \beta \chi_0 C_\Omega}{2} \|\omega^{n+1}\|_1^2. \end{aligned}$$

Для оценки использовано неравенство Фридрихса $\|\omega^{n+1}\|^2 \leq C_\Omega \|\omega^{n+1}\|_1$. Тогда

$$\begin{aligned} & \|\omega^{n+1}\|_B^2 - \|\omega^n\|_B^2 + \frac{1}{2} \|\omega_{\bar{t}}^{n+1}\|_B^2 + 2\tau(2 - C_\Omega \tau \chi_0 \beta) \|\omega^{n+1}\|_1^2 + \\ & + \chi\tau (\|\pi^{n+1}\|^2 - \|\pi^n\|^2) + \tau^3 \chi \|\pi_{\bar{t}}^{n+1}\|^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Слагаемые $\hat{\nabla}_h \pi^{n+1}$ в формуле (29) оценим в негативной норме, в результате получим

$$\|\pi^{n+1}\| \leq N_0 (\|\omega_{\bar{t}}^{n+1}\|_B \sqrt{\chi_0} + \|\omega^{n+1}\|_1 + \alpha \|\omega^{n+1}\| + \beta \|\omega^n\|).$$

Следовательно

$$\begin{aligned} & \|\pi^{n+1}\| \leq 4N_0^2 \left(\chi_0 \|\omega_{\bar{t}}^{n+1}\|_B^2 + \|\omega^{n+1}\|_1^2 + \alpha^2 \|\omega^{n+1}\|^2 + \beta^2 \|\omega^n\|^2 \right) \leq \\ & \leq 4N_0^2 \left(\chi_0 \|\omega_{\bar{t}}^{n+1}\|_B^2 + \|\omega^{n+1}\|_1^2 + (\alpha^2 + 2\beta^2) \|\omega^{n+1}\|^2 + 2\beta^2 \|\omega^{n+1} - \omega^n\|^2 \right) \leq \\ & \leq 4N_0^2 \left(\chi_0 \|\omega_{\bar{t}}^{n+1}\|_B^2 + \|\omega^{n+1}\|_1^2 + (\alpha^2 + 2\beta^2) C_\Omega \|\omega^{n+1}\|_1^2 + 2\beta^2 \chi_0 \|\omega_{\bar{t}}^{n+1}\|_B^2 \tau^2 \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Умножим неравенство (32) на $\lambda_0 \tau^2 \chi$, где λ_0 - некоторая положительная постоянная, сложим с неравенством (31), получим

$$\begin{aligned} & \left\| \omega^{n+1} \right\|_B^2 - \left\| \omega^n \right\|_B^2 + \tau^2 \left(\frac{1}{2} - 8\beta^2 N_0^2 \chi_0 \tau^2 \chi \lambda_0 - 4N_0^2 \chi_0 \chi \lambda_0 \right) \left\| \omega_{\bar{\ell}}^{n+1} \right\|_B^2 + \\ & + \tau \left(2 - C_{\Omega} \tau \chi_0 \beta - 4N_0^2 \lambda_0 \tau \chi (1 + (\alpha^2 + 2\beta^2)) C_{\Omega} \right). \\ & \cdot \left\| \omega^{n+1} \right\|_1^2 + \chi \tau (1 + \lambda_0 \tau) \left\| \pi^{n+1} \right\|^2 \leq \left\| \omega^{n+1} \right\|_B^2 + \tau \chi \left\| \pi^n \right\|^2. \end{aligned}$$

Так как $\lambda_0 > 0$ - произвольное число, то выберем λ_0 и τ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} - 8N_0^2 \lambda_0 \tau^2 \chi_0 \beta^2 \chi - 4N_0^2 \chi_0 \chi \lambda_0 \geq 0, \\ & 2 - C_{\Omega} \tau \beta - 4N_0^2 \lambda_0 \tau \chi (1 + (\alpha^2 + 2\beta^2)) C_{\Omega} \geq 2\alpha_0 > 0, \end{aligned}$$

в результате получим

$$\left\| \omega^{n+1} \right\|_B^2 - \left\| \omega^n \right\|_B^2 + 2\tau\alpha_0 \left\| \omega^{n+1} \right\|_1^2 + \chi\tau(1 + \lambda_0\tau) \left\| \pi^{n+1} \right\|^2 \leq \left\| \omega^n \right\|_B^2 + \chi\tau \left\| \pi^n \right\|^2.$$

Из полученного неравенства следует, что

$$\left(1 + \frac{\tau\alpha_0}{\chi_1} \right) \left\| \omega^{n+1} \right\|_B^2 + \tau\alpha_0 \left\| \omega^{n+1} \right\|_1^2 + \chi\tau(1 + \lambda_0\tau) \left\| \pi^{n+1} \right\|^2 \leq \left\| \omega^n \right\|_B^2 + \chi\tau \left\| \pi^n \right\|^2. \quad (33)$$

Левую часть неравенства (33) оценим снизу

$$\alpha_1 \left(\left\| \omega^{n+1} \right\|_B^2 + \chi\tau \left\| \pi^{n+1} \right\|^2 \right) + \tau\alpha_0 \left\| \omega^{n+1} \right\|_1^2 \leq \left\| \omega^n \right\|_B^2 + \chi\tau \left\| \pi^n \right\|^2, \quad (34)$$

$$\text{где } \alpha_1 = \min \left\{ 1 + \frac{\tau\alpha_0}{\chi_1}, 1 + \lambda_0\tau \right\} > 1.$$

Разделим (34) на α_1 и оценим правую часть сверху

$$\left\| \omega^{n+1} \right\|_B^2 + \chi\tau \left\| \pi^{n+1} \right\|^2 + \frac{\tau\alpha_0}{\alpha_1} \left\| \omega^{n+1} \right\|_1^2 + \frac{\tau\alpha_0}{\alpha_1} \left\| \omega^{n+1} \right\|^2 \leq \frac{1}{\alpha_1} \left(\left\| \omega^n \right\|_B^2 + \frac{\tau\alpha_0}{\alpha_1} \left\| \omega^n \right\|_1^2 + \chi\tau \left\| \pi^n \right\|^2 \right).$$

Отсюда получим

$$\left\| \omega^{n+1} \right\|_B^2 + \chi\tau \left\| \pi^n \right\|^2 + \frac{\tau\alpha_0}{\alpha_1} \left\| \omega^{n+1} \right\|_1^2 \leq q^n \left(\left\| \omega^0 \right\|_B^2 + \frac{\tau\alpha_0}{\alpha_1} \left\| \omega^0 \right\|_1^2 + \chi\tau \left\| \pi^0 \right\|^2 \right),$$

где $q = 1/\alpha_1$. Теорема доказана. Таким образом, доказана сходимость итерационного метода (26) - (28).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О.А. О сходящихся разностных схемах для уравнения Навье – Стокса / Ладыженская О.А., Рившинд В.Я. //Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. 1971, т.3, с.55-73.
2. Кузнецов Б.Г. О разностных схемах с малым параметром, аппроксимирующих уравнения Навье – Стокса. / Кузнецов Б.Г., Смагулов Ш.С. //Труды V Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой несжимаемой жидкости. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. 1975, с.109-122.
- 3 Кажикенова С.Ш. ε -аппроксимация температурной модели неоднородных жидкостей с учетом диссипации энергии // Вестник КазНУ. – Серия математика, механика, информатика. - 2002. – № 3(31). –С. 96-98
- 4 Кажикенова С. Ш. Аппроксимация стационарной модели неоднородной несжимаемой жидкости // Вестник Кузбасского государственного технического университета. – Кемерово, 2010. -№ 6. – С.113-116.

Авторы статьи

Алибиев Даulet Будешович, канд. физ.-мат. наук, доцент каф. «Прикладная математика и информатика» (Карагандинский государственный университет) Тел. 8(7212)770395

Кажикенова Айгуль Шарапатовна, канд.техн. наук, доцент каф. «Прикладная математика и информатика» (Карагандинский государственный университет) Email: sauleshka555@mail.ru

Поступило в редакцию 10.11.2014