УДК 004.02

Е. В. Прокопенко, Я. В. Славолюбова, А. С. Березина

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ MAPLE ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ СТРУКТУР НА ПРЯМОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ АФФИННОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ И УНИМОДУЛЯРНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

В данной работе рассматривается применение системы аналитических вычислений *Maple* к получению теоретических результатов в области почти контактной геометрии.

Maple – система компьютерной математики, рассчитанная на широкий круг пользователей. До недавного времени ее называли системой компьютерной алгебры. Это указывало на особую роль символьных вичислений и преобразований, которые способна осуществлять эта система. Но такое название сужает сферу применения системы. На самом деле она уже способна выполнять быстро и эффективно не только символьные, но и численные расчеты, причем сочетает это с превосходными средствами графической визуализации и подготовки электронных документов.

Maple – типичная интегрированная система. Она объединяет в себе:

– мощный язык программирования (он же язык для интерактивного общения с системой);

– редактор для подготовки и редактирования документов и программ;

– современный многооконный пользовательский интерфейс с возможностью работы в диалоговом режиме;

– мощную справочную систему со многими тысячами примеров;

– ядро алгоритмов и правил преобразования математических выражений;

– численный и символьный процессоры;

– систему диагностики;

– библиотеки встроенных и дополнительных функций;

– пакеты функций сторонних производителей и поддержку некоторых других языков программирования и программ.

Ко всем этим средствам имеется полный доступ прямо из программы. *Maple* – одна из самых мощных и «разумных» интегрированных систем символьной математики, созданная фирмой *Waterloo Maple*, *Inc*. (Канада).

Система компьютерной математики *Maple* была разработана группой ученых, организованной Кейтом Гедом и Гастоном Гонэ в 1980 году в канадском университете *Waterloo*, занимающихся символьными вычислениями.

Кардинальным отличаем пакета *Maple* от систем для проведения численных расчетов является возможность решения задач в символьном виде. Такая специфика систем компьютерной алгебры позволяет проводить точные вычисления и получать ответ в символьной форме, более точной, чем любой из численных методов. Однако *Maple* успешно справляется и с численными расчетами. Если необходимо найти ответ в виде числа с плавающей точкой, то он будет найден в конце символьных вычислений. Таким образом, погрешность метода – это лишь погрешность округления.

Пакеты встроенных процедур *Linalg*, *LinerAlgebra*. Первые версии *Maple* содержали только пакет *linalg*, реализующий основные операции линейной алгебры. Начиная с шестой версии, в *Maple* появился пакет *LinerAlgebra*, оснащенный эффективными процедурами. Функциональность пакетов почти одинакова.

Основными объектами, с которыми работают команды этих пакетов, являются матрицы, однако матрицы одного пакета не эквивалентны матрицам другого.

Пакет *linalg* содержит команды для работы с символьными матрицами и векторами: сложение, умножение матриц, собственные числа и векторы в символьном виде и др. Пакет *LinearAlgebra* содержит усовершенствованные команды линейной алгебры для работы со специальным видом числовых матриц *Matrix*.

В *Maple* выполнение преобразований линейной алгебры можно осуществлять с помощью команд двух пакетов: *linalg* и *LinearAlgebra*, функциональность которых практически одинакова. Первый пакет входил в состав всех предыдущих версий *Maple*, тогда как второй пакет – это новое средство, позволяющее работать с числовыми матрицами, в том числе и с матрицами больших размеров, используя всю мощь известного пакета численных расчетов *NAG* (*Numerical Algorithms Group*). Базовыми объектами, с которыми работают команды этих пакетов, являются матрицы, однако матрицы одного пакета не эквивалентны матрицам другого. В пакете *linalg* используются матрицы, построенные на основе массива, создаваемого командой *array*(), тогда как в пакете *LinearAlgebra* применяются векторы и матрицы, построенные на основе новой структуры *r*-таблицы (*r-table*) и создаваемые специальными конструкторами *Vector*( ) и *Matrix*( ) или с использованием краткой нотации $< a, b, c >$. Матрицы в пакете *linalg* вычисляются только до уровня своих имен, поэтому в нем невозможно вычислить операции поэлементного суммирования или вычитания, используя простые операции над идентификаторами матриц, и приходится пользоваться специальной командой *evalm*( ) для вывода результирующих матриц. В пакете *LinearAlgebra* матрицы вычисяются до уровня своих элементов, поэтому простое задание имени матрицы в области ввода рабочего листа приводит к отображению ее элементов, а не имени матрицы, как в случае с пакетом *linalg*. Кроме этого, в пакете *LinearAlgebra* матрицы могут задаваться в качестве операторов сложения и вычитания, что приводит к поэлементному выполнению указанных операций без использования дополнительных команд.

При выборе пакета линейной алгебры для работы рекомендуется принять во внимание следующее: пакет *linalg* полезен при выполнении абстрактных вычислений над матрицами и векторами. Пакет *LinearAlgebra* обладает более дружественным интерфейсом и особенно эффективен при работе с числовыми матрицами больших размеров из-за возможности обращения к откомпилированным программам пакета численных расчетов *NAG*.

Определить матрицу или вектор в *Maple* можно двумя способами: либо с помощью команды *array*() стандартной библиотеки, либо командами *matrix*() и *vector*().

Пакет линейной алгебры *linalg* содержит команды создания матриц и векторов, предлагает большой набор функций для работы со структурой этих объектов, для выполнения основных матричных и векторных операций и для решения основных задач линейной алгебры: решение систем линейных уравнений, нахождение собственных значений и собственных векторов матрицы, приведение матриц к специальным формам и т. д. И все эти действия можно выполнять с матрицами и векторами, элементами которых являются общие алгебраические выражения, получая результаты также в виде алгебраических выражений.

Все команды пакета *LinearAlgebra* можно вызвать непосредственно по имени, предварительно подключив весь пакет стандартным способом, или можно подключить отдельную команду с использованием синтаксиса

with(*LinearAlgebra, имя команды*);

Можно вызвать команду, предварительно не подключая ее, а используя длинное имя

LinearAlgebra[*имя команды*] (*параметры*); *LinearAlgebra*[*'имя команды'*] (*параметры*);

Последняя форма (имя команды, заключенное в кавычки), вызывает соответствующую команду пакета, даже если в текущем сеансе используется какой-либо объект с таким же именем.

Пакет *LinearAlgebra* реализован в виде модуля, новой языковой конструкции *Maple*, использующей элементы объектно-ориентированного программирования. Каждая команда является методом объекта *LinearAlgebra*, и поэтому ее можно вызвать, используя специальную операцию: – обращения к методу объекта.

LinearAlgebra: – имя команды (*параметры*);

В этом случае вызываемая команда также будет загружена, не конфликтуя с объектом другого типа, созданным в текущем сеансе.

Для получения более полной информации по пакету *LinearAlgebra* можно загрузить справку командой *?LAOverview*. На этой странице справки расположены ссылки на другие страницы, подробно описывающие работу и программирование пакета *LinearAlgebra*, включая рабочие листы с примерами использования подпрограмм пакета *NAG*.

1. Общие сведения из теории почти контактных структур

Остановимся на основных понятиях и фактах относительно почти контактных структур, левоинвариантных метрик и левоинвариантных почти контактных структур на группах Ли.

Определение 1. Говорят, что дифференцируемое многообразие M^{2n+1} имеет почти контактную структуру (η, ξ, φ), если оно допускает поле φ эндоморфизмов касательных пространств, векторное поле ξ и 1-форму η, удовлетворяющих условиям:

$$\varphi(\xi)=0,\ \eta\circ\varphi=0,\ \eta(\xi)=1,\ \varphi^2=-I+\eta\otimes\xi, \quad (1)$$

где I - тождественное преобразование TM^{2n+1} [1].

Определение 2. Риманова метрика g на M^{2n+1} называется совместимой с почти контактной структурой (η, ξ, φ), если

$$g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y). \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $\eta(\mathrm{X})=g(\xi,X)$ (а также $\ker\eta=\xi^{\perp}$) для любой совместимой метрики.

Любая почти контактная структура допускает совместимую метрику. Фундаментальная 2-форма почти контактной метрической структуры (η, ξ, φ, *g*) определяется по формуле:

$$\Phi(X,Y)=g(X,\varphi Y).$$

Для любой почти контактной структуры выполняется неравенство $\eta\wedge\Phi^n\neq 0$, из которого следует, что почти контактное многообразие ориентируемо. Если совместимая метрика g удовлетворяет условию $d\eta=\Phi$, тогда многообразие (*M*, η, ξ, φ, *g*) называется контактным метрическим многообразием, а метрика *g* – ассоциированной метрикой.

По определению ранг почти контактной структуры (η, ξ, φ) является рангом ее 1-формы η. Таким образом, структура (η, ξ, φ) имеет ранг $r=2s$ (соответственно, $r=2s+1$), если $d\eta^s\neq 0$ и $\eta\wedge(d\eta)^s=0$ (соответственно, $\eta\wedge(d\eta)^s=0$ и $(d\eta)^{s+1}=0$). При этом 1-форма η называется контактной формой, если ее максимальный ранг равен *n*, то есть $\eta\wedge(d\eta)^n\neq 0$. Данное условие всегда выполняется в случае контактной метрической структуры [1].

Пусть M^{2n+1} – почти контактное метрическое многообразие, наделенное почти контактной структурой (η, ξ, φ). Рассмотрим $M^{2n+1}\times R$ и обозначим $(X, f\frac{d}{dt})$ –произвольное векторное поле на данном многообразии. Почти комплексная структура определяется следующим образом:

$$J(X, f\frac{d}{dt}) = (\varphi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}).$$

Почти контактная структура (η, ξ, φ) является нормальной, если и только, если почти комплексная структура J интегрируема. Выражая интегрируемость почти комплексной структуры J в терминах тензора Нейенхейса имеем, что почти контактная структура (η, ξ, φ) – нормальная, если и только, если

$$N^{(1)} = [\varphi, \varphi] + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

(см. теорему 6.1 [2]). Структурой Сасаки является нормальная контактная метрическая структура.

Напомним, что почти контактная структура (η, ξ, φ, g) называется η- Эйнштейновой, если

$$Ric = \overline{a}g + \overline{b}\,\eta \otimes \eta,$$

где Ric – тензор Риччи метрики g и $\overline{a}, \overline{b}$ - гладкие функции [1].

Если в качестве многообразия рассматривается группа Ли G, то естественно рассматривать левоинвариантные почти контактные метрические структуры. В этом случае контактная форма η, векторное поле Риба ξ, аффинор φ и совместимая метрика g задаются своими значениями в единице, т.е. на алгебре Ли $L(G)$ группы Ли G.

2. Применение пакета Maple к исследованию почти контактных метрических структур на 5-мерной алгебре Ли

Рассмотрим 5-мерную алгебру Ли $aff(R) \times u$, являющуюся прямым произведением аффинной алгебры Ли $aff(R)$ и 3х-мерной унимодулярной алгебры Ли u. Она имеет базис (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5), в котором выражения скобок Ли приведены в таблице.

Таблица. Скобки Ли алгебры Ли $aff(R) \times u$

№	Алгебра Ли	Скобки Ли
1	$aff(R) \times su(2) \cong aff(R) \times so(3)$	$[e_1, e_2] = e_2$, $[e_3, e_4] = e_5$, $[e_4, e_5] = e_3$, $[e_3, e_5] = -e_4$.
2	$aff(R) \times sl(2,R) \cong aff(R) \times o(1,2)$	$[e_1, e_2] = e_2$, $[e_3, e_4] = 2e_4$, $[e_3, e_5] = -2e_5$, $[e_4, e_5] = e_3$.
3	$aff(R) \times e(2)$	$[e_1, e_2] = e_2$, $[e_3, e_4] = -e_5$, $[e_3, e_5] = e_4$.
4	$aff(R) \times e(1,1)$	$[e_1, e_2] = e_2$, $[e_3, e_4] = e_5$, $[e_3, e_5] = -e_4$.
5	$aff(R) \times h_3$	$[e_1, e_2] = e_2$, $[e_3, e_4] = e_5$.

Определим левоинвариантную почти контактную метрическую структуру (η, ξ, φ, g) на алгебре Ли $aff(R) \times su(2)$. В качестве характеристического векторного поля ξ можно взять $\xi = e_i$, i=1,…,5. Соответствующие наиболее простые почти контактные формы $\eta = e^i$, i=1,…,5. Рассмотрим в отдельности каждый из приведенных случаев.

Случай 1. Пусть $\eta = e^1$ – почти контактная форма на алгебре Ли $aff(R) \times su(2)$. Дифференциал 1-формы $d\eta = -e^3 \wedge e^4$, характеристическое векторное поле ξ имеет вид $\xi = e_1$.

Выберем специальный базис ($E_1,\dots,E_5$), взяв в качестве пятого вектора характеристическое векторное поле ξ:

$$E_1 = e_2;\ E_2 = e_3;\ E_3 = e_4;\ E_4 = e_5;\ E_5 = e_1.$$

Ненулевые структурные константы в базисе ($E_1,\dots,E_5$):

$$C_{15}^1 = -C_{51}^1 = -1;\ C_{23}^4 = -C_{32}^4 = -1;\ C_{34}^2 = -C_{43}^2 = 1;$$
$$C_{24}^3 = -C_{42}^3 = 1.$$

Почти контактная форма в новом базисе определяется 1-формой $\eta = E^5$. Ее внешний дифференциал: $dE^5 = 0$.

Определим аффинор φ, который должен удовлетворять условиям: $\varphi^2|_{\ker\eta} = -I$, $\varphi(\xi) = 0$, $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$. Отметим, что такой аффинор задается неоднозначно. Зафиксируем аффинор φ_0, который действует на базисных векторах ($E_1,\dots,E_5$) следующим образом: $\varphi(E_1) = E_2$, $\varphi(E_2) = -E_1$, $\varphi(E_3) = E_4$, $\varphi(E_4) = -E_3$, $\varphi(E_5) = 0$. Определим также метрику $g_0 = E^1 + E^2 + E^3 + E^4 + E^5$.

Случай 2. Пусть $\eta = e^2$ – почти контактная форма на алгебре Ли $aff(R) \times su(2)$. Дифференциал 1-формы $d\eta = -e^1 \wedge e^2$, характеристическое векторное поле ξ имеет вид $\xi = e_2$.

Выберем специальный базис ($E_1,\dots,E_5$), взяв в качестве пятого вектора характеристическое векторное поле ξ:

$$E_1 = e_1;\ E_2 = e_3;\ E_3 = e_4;\ E_4 = e_5;\ E_5 = e_2.$$

Ненулевые структурные константы в базисе ($E_1,\dots,E_5$):

$$C_{15}^5 = -C_{51}^5 = -1;\ C_{23}^4 = -C_{32}^4 = 1;\ C_{34}^2 = -C_{43}^2 = 1;$$
$$C_{24}^3 = -C_{42}^3 = -1.$$

Почти контактная форма в новом базисе определяется 1-формой $\eta = E^5$. Ее внешний дифференциал: $dE^5 = -E^1 \wedge E^5$.

Зафиксируем аффинор φ_0, который действует на базисных векторах ($E_1,\ldots,E_5$) следующим образом: $\varphi(E_1) = E_2$, $\varphi(E_2) = -E_1$, $\varphi(E_3) = E_4$, $\varphi(E_4) = -E_3$, $\varphi(E_5) = 0$. Определим также метрику $g_0 = E^1 + E^2 + E^3 + E^4 + E^5$.

Случай 3. Пусть $\eta = e^3$ – почти контактная форма на алгебре Ли $aff(R)\times su(2)$. Дифференциал 1-формы $d\eta = -e^4 \wedge e^5$, характеристическое векторное поле ξ имеет вид $\xi = e_3$.

Выберем специальный базис ($E_1,\ldots,E_5$), взяв в качестве пятого вектора характеристическое векторное поле ξ:

$E_1 = e_1$; $E_2 = e_2$; $E_3 = e_4$; $E_4 = e_5$; $E_5 = e_3$.

Ненулевые структурные константы в базисе ($E_1,\ldots,E_5$):

$$C_{12}^2 = -C_{21}^2 = 1;\ C_{35}^4 = -C_{53}^4 = -1;\ C_{34}^5 = -C_{43}^5 = -1;$$
$$C_{45}^3 = -C_{54}^3 = 1.$$

Почти контактная форма в новом базисе определяется 1-формой $\eta = E^5$. Ее внешний дифференциал: $dE^5 = -E^3 \wedge E^4$.

Аффинор φ_0 действует на базисных векторах ($E_1,\ldots,E_5$) следующим образом: $\varphi(E_1) = E_2$, $\varphi(E_2) = -E_1$, $\varphi(E_3) = E_4$, $\varphi(E_4) = -E_3$, $\varphi(E_5) = 0$. Определим также метрику $g_0 = E^1 + E^2 + E^3 + E^4 + E^5$.

Случай 4. Пусть $\eta = e^4$ – почти контактная форма на алгебре Ли $aff(R)\times su(2)$. Дифференциал 1-формы $d\eta = e^3 \wedge e^5$, характеристическое векторное поле ξ имеет вид $\xi = e_4$.

Выберем специальный базис ($E_1,\ldots,E_5$), взяв в качестве пятого вектора характеристическое векторное поле ξ:

$E_1 = e_1$; $E_2 = e_2$; $E_3 = e_3$; $E_4 = e_5$; $E_5 = e_4$.

Ненулевые структурные константы в базисе ($E_1,\ldots,E_5$):

$$C_{12}^2 = -C_{21}^2 = 1;\ C_{35}^4 = -C_{53}^4 = -1;\ C_{45}^5 = -C_{54}^5 = -1;$$
$$C_{34}^5 = -C_{43}^5 = -1.$$

Почти контактная форма в новом базисе определяется 1-формой $\eta = E^5$. Ее внешний дифференциал: $dE^5 = E^3 \wedge E^4$.

Аффинор φ_0 действует на базисных векторах ($E_1,\ldots,E_5$) следующим образом: $\varphi(E_1) = E_2$, $\varphi(E_2) = -E_1$, $\varphi(E_3) = E_4$, $\varphi(E_4) = -E_3$, $\varphi(E_5) = 0$. Определим также метрику $g_0 = E^1 + E^2 + E^3 + E^4 + E^5$.

Случай 5. Пусть $\eta = e^5$ – почти контактная форма на алгебре Ли $aff(R)\times su(2)$. Дифференциал 1-формы $d\eta = -e^3 \wedge e^4$, характеристическое векторное поле ξ имеет вид $\xi = e_5$.

Выберем специальный базис ($E_1,\ldots,E_5$), взяв в качестве пятого вектора характеристическое векторное поле ξ:

$E_1 = e_1$; $E_2 = e_2$; $E_3 = e_3$; $E_4 = e_4$; $E_5 = e_5$.

Ненулевые структурные константы в базисе ($E_1,\ldots,E_5$) :

$$C_{12}^2 = -C_{21}^2 = 1;\ C_{34}^5 = -C_{43}^5 = 1;\ C_{45}^3 = -C_{54}^3 = -1;$$
$$C_{35}^4 = -C_{53}^4 = -1.$$

Почти контактная форма в новом базисе определяется 1-формой $\eta = E^5$. Ее внешний дифференциал: $dE^5 = -E^3 \wedge E^4$.

Аффинор φ_0 действует на базисных векторах ($E_1,\ldots,E_5$) следующим образом: $\varphi(E_1) = E_2$, $\varphi(E_2) = -E_1$, $\varphi(E_3) = E_4$, $\varphi(E_4) = -E_3$, $\varphi(E_5) = 0$. Определим также метрику $g_0 = E^1 + E^2 + E^3 + E^4 + E^5$.

Составляем программы на m-языке *Maple* для определения основных геометрических характеристик (см. пример листинга ниже) и свойств левоинвариантной почти контактной метрической структуры (η, ξ, φ, g).

В результате компьютерного исследования структуры (η, ξ, φ, g) получается следующий теоретический результат.

Теорема 1. *Пусть $Aff(R)\times SU(2)$ – группа Ли, наделенная левоинвариантной почти контактной метрической структурой* (η, ξ, φ, g) . *Тогда:*

1. При $\eta = e^i$, i=1,2 левоинвариантная почти контактная метрическая структура (η, ξ, φ_0, g_0) на алгебре Ли $aff(R)\times su(2)$ не является ни нормальной, ни K-контактной структурой.

Матрица оператора Риччи имеет вид:

$$\mathrm{RIC} = diag\left(-1;\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right).$$

Квадраты норм тензора Римана, Риччи и тензора кручения $N^{(1)}$ имеют выражения:

$$\|Riem\|^2 = \frac{19}{4};\ \|Ric\|^2 = \frac{11}{4};\ \|N^{(1)}\|^2 = \begin{cases} 4 \text{ при } \mathrm{i}=1, \\ 2 \text{ при } \mathrm{i}=2. \end{cases}$$

Скалярная кривизна принимает следующее значение: $S = -\frac{1}{2}$.

Главные кривизны Риччи имеют значения:

$$\lambda_1 = \lambda_5 = -1;\ \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1}{2}.$$

Секционные кривизны имеют вид:

$$k_{1,2} = k_{1,3} = k_{1,4} = 0;\ k_{2,3} = k_{2,4} = k_{3,4} = \frac{1}{4};$$

$$k_{1,5} = -1;\ k_{2,5} = k_{3,5} = k_{4,5} = 0.$$

2. *При* $\eta = e^i$, *i=3,4,5 левоинвариантная почти контактная метрическая структура (η, ξ, φ₀, g₀) на алгебре Ли* $aff(R)\times su(2)$ *является нормальной, не является K-контактной структурой.*

Матрица оператора Риччи имеет вид:

$$\mathrm{RIC} = diag\left(-1;-1;\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right).$$

Квадраты норм тензора Римана, Риччи и тензора кручения $N^{(1)}$ *имеют выражения:*

$$\|Riem\|^2 = \frac{19}{4};\ \|Ric\|^2 = \frac{11}{4};\ \|N^{(1)}\|^2 = 0.$$

Скалярная кривизна принимает следующее значение: $S = -\frac{1}{2}$.

Главные кривизны Риччи имеют значения:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1;\ \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \frac{1}{2}.$$

Секционные кривизны имеют вид:

$$k_{1,2} = -1;\ k_{1,3} = k_{1,4} = k_{2,3} = k_{2,4} = 0;\ k_{3,4} = \frac{1}{4};$$

$$k_{1,5} = k_{2,5} = 0;\ k_{3,5} = k_{4,5} = \frac{1}{4}.$$

Доказательство теоремы получается прямыми вычислениями с использованием системы символьных вычислений *Maple*.

Аналогичные результаты получены для остальных алгебр Ли: $aff(R)\times sl(2,R)$, $aff(R)\times o(1,2)$, $aff(R)\times e(2)$, $aff(R)\times e(1,1)$, $aff(R)\times h_3$. В базисе ($e_1,\dots,e_5$) алгебры Ли $aff(R)\times e(2)$ и $aff(R)\times e(1,1)$ допускают нормальную структуру (η, ξ, φ_0, g_0), если $\eta = e^3$; алгебра Ли $aff(R)\times h_3$ допускает нормальную структуру (η, ξ, φ_0, g_0), если $\eta = e^5$.

Приведем один из аннотированных листингов для вычисления основных геометрических характеристик левоинвариантной почти контактной метрической структуры (η, ξ, φ_0, g_0) на m-языке *Maple*.

#Запускаем команду *restart* для одновременной очистки всех переменных.

restart:

#Подключаем пакеты: *linalg*, позволяющий работать с символьными матрицами и *LinerAlgebra*, позволяющий работать со специальным видом числовых матриц *Matrix*.

with(LinearAlgebra):with(tensor):with(linalg):

#Загружаем массив метрики g_0:

g0:=array(sparse,1..5,1..5,[(1,1)=1,(2,2)=1,(3,3)=1,(4,4)=1,(5,5)=1]);

#Загружаем массив аффинора φ_0, действующего на алгебре Ли $aff(R)\times su(2)$:

f0:=array(sparse,1..5,1..5,[(1,2)=1,(2,1)=-1,(3,4)=1,(4,3)=-1]);

#Загружаем массив *C* структурных констант C_{ij}^k, *i*, *j*, *k*=1,...,5 алгебры Ли $aff(R)\times su(2)$:

C:=array(sparse,1..5,1..5,1..5,[(1,5,1)=1,(2,3,4)=1,(3,4,2)=1,(2,4,3)=1,(5,1,1)=1,(3,2,4)=1,
(4,3,2)=-1, (4,2,3)=1]):

#Вычисляем дифференциал *deta* почти контактной формы dη по формуле $dE^k = -\sum_{i<j} \mathrm{C}_{ij}^k E^i \wedge E^j$ [3]:

deta:=array(sparse,1..5, 1..5):
for j to 5 do
for i to j-1 do
deta[i,j]:=-C[i,j,5]:
deta[j,i]:=C[i,j,5]:
od od;

#Проверяем условие: $\varphi_0{}^2\,|_{\ker\eta} = -I$.

f0f0:=simplify(multiply(f0,f0));

#С помощью команды *inverse* находим обратную матрицу $g_0{}^{-1}$:

g0inv:= inverse(g0);

#По формуле: $\Gamma_{ij}^p = \frac{1}{2}\left(C_{ij}^p + g^{lp} g_{ik} C_{lj}^k + g^{lp} g_{jk} C_{li}^k\right)$[3] находим компоненты *Gamma* связности Γ_{ij}^p, *i*, *j*, *p*=1,...,5 (символы Кристоффеля):

Gamma:=array(1..5,1..5,1..5):
for i to 5 do
for j to 5 do
for p to 5 do
Gamma[i,j,p]:=(1/2)*(C[i,j,p]+sum(sum(g0inv[l,p]*g0[i,k]*C[l,j,k]+g0inv[l,p]*g0[j,k]*
C[l,i,k],'l'=1..5),'k'=1..5));
od od od;
i:='i': j:='j': k:='k': l:='s': l:='p':

#Вычислим тензор кривизны *Riem* ассоциированной метрики g_0 по формуле:

$R_{ijk}^s = \Gamma_{ip}^s \Gamma_{jk}^p - \Gamma_{jp}^s \Gamma_{ik}^p - C_{ij}^p \Gamma_{pk}^s$ [3].

Riem:=array(1..5,1..5,1..5,1..5):
for i to 5 do
for j to 5 do
for k to 5 do
for s to 5 do
p:='p':
Riem[i,j,k,s]:=simplify(sum(Gamma[i,p,s]*Gamma[j,k,p]-Gamma[j,p,s]*Gamma[i,k,p]-C[i,j,p]*Gamma[p,k,s],'p'=1..5));
i:='i': j:='j': k:='k': s:='s': p1:='p1':
Riem1:=array(1..5,1..5,1..5,1..5):
for i to 5 do
for j to 5 do
for k to 5 do
for s to 5 do
p1:='p1':
Riem1[i,j,k,s]:=simplify(sum(Riem[i,j,k,p1]*g0[p1,s],'p1'=1..5));
od od od od;
i:='i': j:='j': k:='k': s:='s': p1:='p1':

#Вычислим квадрат нормы *NRiem* тензора кривизны $\|Riem\|^2$ по формуле:

$$\|Riem\|^2 = g^{ip} g^{jr} g^{ks} g_{lt} R^l_{ijk} R^t_{prs} \text{ [3].}$$

```
NRiem:=factor(simplify(sum(sum(sum(sum(sum(sum(sum(g0inv[i,p]*g0inv[j,r]*g0inv[k,s]*g0[l,t]*Riem[i,j,k,l]*Riem[p,r,s,t],'p'=1..5),'r'=1..5),'s'=1..5),'t'=1..5),'l'=1..5),'k'=1..5),'j'=1..5),'i'=1..5)));
i:='i': j:='j': k:='k': s:='s': t:='t': l:='l': p:='p':r:='r':
```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Appel K., Haken W.* The Solution of the Four-Color-Map Problem // Scientific American. – 1977. – V. 237, 4. – P. 108 – 121.
2. *Blair D. E.* Contact Manifolds in Riemannian Geometry Lecture Notes in Mathematics. – Springer; Verlag; Berlin; Heidelberg;1976. – 145 p.
3. *Blair D. E.* Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds // Progress in Mathematics. – 2010. – Vol. 203. – 145 p.
4. *Blair D.E.* Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds // Progress in Mathematics. – Birkhäuser Boston, 2002. – Vol. 203. – P. 304.
5. *Calvaruso G.* Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures // Journal of Geometry and Physics, (69), 2013. – P. 60-73.
6. *Diatta A.* Left invariant contact structures on Lie groups // arXiv:math/0403555-v2, [math.DG], 2004. – 17 p.
7. *Diatta, A.* Left invariant contact structures on Lie groups // arXiv: math.DG/ 0403555, 2004. – Vol. 2. – 17 p.
8. *Geiges H.* Contact Geometry // arXiv:math/0307242v2 [math.SG], v2, 2004. – 86 p.
9. *Goze M., Khakimdjanov Y., Medina A.* Symplectic or contact structures on Lie groups. // Differential Geom. Appl. – Vol. 21, No. 1. – 2004. – P. 41 – 54.
10. *Ovando G.* Complex, symplectic and K – ahler structures on four dimensional Lie algebras // arXiv:math/0309146v1, [math.DG], 2003. – 15 p.
11. *Ovando G.* Four dimensional symplectic Lie algebras // arXiv:math/0407501v1, [math.DG], 2004. – 21 p.
12. *Rodionov E. D., Slavskii V. V.* Curvature estimations of left invariant Riemannian metrics on three dimensional Lie groups // Differential Geometry and Application. Proceeding of the 7th International Conference. Brno, August 10 – 14, 1998. – Masaryk University, Brno, Czech Republic, 1999.
13. *Rodionov, E. D., Slavskii V. V.* Conformal deformations of the Riemannian metrics and homogeneous Riemannian spaces // Comm. Math. Univ. Carol. – 2002. – V. 43, No 2. – P. 271 – 282.
14. *Аладьев В.З., Бойко В.К., Ровба Е.А.* Программирование и разработка приложений в Maple. Гродно:ГрГУ, 2007.
15. *Алексеев Е.Р., О.В. Чеснокова*. О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9. Серия: Самоучитель. – НТ Пресс, 2006. – 496 с.
16. *Арнольд В.И.* Математичские методы классической механики – 5-е изд., стереотипное. – М.: Едиториал УРСС, 2003. –416 с.
17. *Гандер В., Гржебичек И.* Решение задач в научных вычислениях с применением Maple и MATLAB. ISBN: 985-6642-06-X. Издательство "Вассамедина" 2005г. 520 стр.
18. *Дьяконов, В.* Maple 9 в математике, физике и образовании – М.: СОЛОН Пресс, 2004. – 688 с.
19. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. – М.: Наука, 1981. – Т 1. – 344 с.
20. *Кремлев А.Г.., Никоноров Ю.Г.* Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырёхмерных группах Ли. Унимодулярный случай Мат.труды. – 2008. Т.11, №2. – С.115-147.

Авторы статьи

Прокопенко Евгения Викторовна, к.ф.-м.н., доцент каф. прикладных информационных технологий КузГТУ. e-mail: pev-05@mail.ru

Славолюбова Ярославна Викторовна, к.ф.-м.н., доцент каф. высшей и прикладной математики Кемеровского института (филиала) РЭУ имени Г.В. Плеханова. e-mail: jar1984@mail.ru

Березина Анна Сергеевна, старший преподаватель каф. высшей и прикладной математики Кемеровского института (филиала) РЭУ имени Г.В. Плеханова. e-mail: asberezina79@mail.ru

Поступило в редакцию 15.11.2014