

ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА

УДК 622.61: 516.02

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В СОПЛЕ С ПРОФИЛЕМ БЕЗЫЗГИБНОЙ ОБОЛОЧКИ

Черданцев Сергей Васильевич¹,
доктор технических наук, профессор. e-mail: svch01@yandex.ru
Черданцев Николай Васильевич²,
доктор технических наук. e-mail: cherdantsevvnv@icc.kemsc.ru

¹ Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева, Россия, 650000, г. Кемерово, ул. Весенняя, 28.

² Институт угля Сибирского отделения Российской академии наук, 650065, Россия, г. Кемерово, Ленинградский проспект, 10

Аннотация

В рамках классических допущений газовой динамики сформулирована задача с начальными условиями, описывающая течение идеального газа в сопле, профилем которого является безызгибная оболочка. Рассмотрен метод характеристик, для которого составлена разностная схема и алгоритм ее численной реализации. Получено значение скорости газа на выходе из сопла.

Ключевые слова: сопло Лавала, уравнения Эйлера, угол Маха, характеристические линии, задача Коши, безызгибные оболочки, уравнения в конечных разностях.

Трубы, каналы и сопла переменного поперечного сечения, названные именем шведского инженера П. Лавала, предназначены для преобразования дозвукового течения газа в сверхзвуковое течение. Они широко применяются в конструкциях паровых турбин (рис. 1,а), ракетных двигателей (рис. 1,б), аэродинамических труб, эжекторов и других газодинамических приборов и аппаратов.

К настоящему времени во многих случаях расчет сопел Лавала выполняется в предположении, что течение газа одномерное. В силу этого, рассматривается только средние скорости в каждом поперечном сечении сопла, а в качестве основного уравнения используется уравнение неразрывности совместно с уравнением адиабаты.

Скорость v_2 и расход газа G в выходном сече-

нии сопла F в этом случае определяются по формулам [1, 2]

$$v_2 = a_* \sqrt{\frac{k+1}{k-1} (1 - \varepsilon^m)},$$

$$G = F \sqrt{\frac{2gk}{k-1} (1 - \varepsilon^m) p_0 \gamma_0} \cdot \varepsilon^{1/k}, \quad (1)$$

где a_* – критическая скорость; k – показатель адиабаты Пуассона (для воздуха $k = 1,4$); $m = (k - 1)/k$, $\varepsilon = p_a/p_0$ – отношение давления за соплом к давлению перед соплом.

Анализ одномерного течения показывает [1-4], что если в минимальном сечении сопла Лавала будет достигнута критическая скорость, то скорость газа в сопле будет непрерывно увеличиваться.

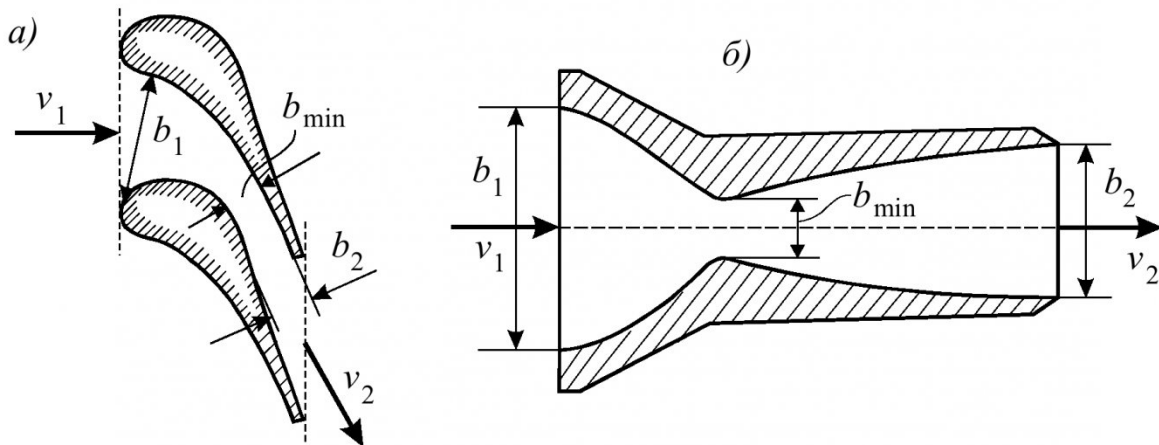


Рис. 1. Каналы переменного сечения в решетках паровых турбин (рис. 1,а) и в реактивных двигателях (рис. 1,б)

ся от дозвуковой – в сужающейся части (конфузоре), до сверхзвуковой – в расширяющейся (диффузоре). Кроме этого, установлено, что максимальное значение расхода отвечает критической скорости и соответственно критическому отношению давлений.

Из формул (1) следует, что скорость v_2 и расход газа G не зависят ни от очертания стенок сопла, ни от его длины. Однако именно эти параметры определяют отклонения действительного течения в сопле от идеальной схемы «струйки» с равномерным распределением скоростей в каждом поперечном сечении, а контур входной части особенно существенно влияет на равномерность потока при выходе из сопла [5, 6].

Следовательно, в рамках модели одномерного течения газа вопрос о получении на выходе из сопла заданного поля скоростей остается открытым, в чем состоит существенный недостаток одномерной модели.

Поэтому далее мы обсудим модель осесимметричного течения идеального политропного газа, полагая, что течение: 1) стационарное, 2) осесимметричное, 3) изоэнтропическое. В силу этого искомыми величинами являются компоненты v_x, v_y вектора скорости \vec{v} (его модуль будем обозначать v), плотность ρ и давление p , причем последние две связаны уравнением состояния

$$\rho = \rho(p). \quad (2)$$

Искомые величины являются функциями декартовых координат x, y . Причем, ввиду осесимметричности течения, мы полагаем, что ось симметрии совпадает с прямой $y = 0$. Кроме этого, картина осесимметричного течения восстанавливается в трехмерном пространстве путем вращения меридиональной полуплоскости $y > 0$ вокруг оси $y = 0$. При повороте на угол 180° эта полуплоскость становится продолжением исходной, а любое изображение – зеркально симметричным исходному. Во всех случаях плоскость (x, y) будем называть плоскостью течения.

Исходными дифференциальными уравнения для отыскания основных величин являются уравнения Эйлера, которые, в силу первых двух допущений, представляются в виде [5 – 9]

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3)$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4)$$

и уравнение неразрывности

$$v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{v_y}{y} \right) = 0. \quad (5)$$

Таким образом, мы располагаем уравнениями (2) – (5), образующих систему четырех уравнений, содержащих четыре искомые функции ρ, p, v_x, v_y , в силу чего система (2) – (5) вполне определена.

Учитывая первое и третье допущение, запишем еще одно равенство [5 – 9]

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

выражающее условие отсутствия вихря скорости в установившемся изоэнтропическом течении.

Принимая во внимание, что местная скорость звука a в газе равна [1, 2]

$$a = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}$$

и учитывая условие баротропности газа (2)

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (7)$$

приведем уравнение неразрывности (5) к виду

$$v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + \rho a^2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{v_y}{y} \right) = 0. \quad (8)$$

Выразив из уравнений (3), (4) производные $\partial p / \partial x, \partial p / \partial y$ и подставив их в (7), а также учитывая условие (6), мы получим уравнение, содержащее неизвестные компоненты вектора скорости v_x, v_y и местную скорость звука в потоке газа

$$A \frac{\partial v_x}{\partial x} + 2B \frac{\partial v_x}{\partial y} + C \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{a^2 v_y}{y} = 0, \quad (9)$$

где

$$A = a^2 - v_x^2, \quad B = -v_x v_y, \quad C = a^2 - v_y^2. \quad (10)$$

Поскольку компоненты v_x, v_y в безвихревом движении могут быть выражены с помощью потенциала скоростей ϕ

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (11)$$

то уравнение (9) можно привести к дифференциальному уравнению 2-го порядка

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{a^2 v_y}{y} = 0, \quad (12)$$

описывающее осесимметричное изоэнтропическое движение идеального баротропного газа.

Уравнению (12) соответствует квадратичная форма [10]

$$At_1^2 + 2Bt_1 t_2 + Ct_2^2,$$

заменив в которой $t_1 \rightarrow \partial u / \partial x, t_2 \rightarrow \partial u / \partial y$, и приравняв ее к нулю получим уравнение

$$A \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + C \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 0, \quad (13)$$

которое можно переписать в виде

$$\left[A \frac{\partial u}{\partial x} + (B + \sqrt{B^2 - AC}) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \cdot$$

$$\left[A \frac{\partial u}{\partial x} + (B - \sqrt{B^2 - AC}) \frac{\partial u}{\partial y} \right] = 0$$

Таким образом, взамен одного уравнению (13) мы получаем систему двух уравнений 1-го порядка

$$A \frac{\partial u}{\partial x} + (B + \sqrt{B^2 - AC}) \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (14)$$

$$A \frac{\partial u}{\partial x} + (B - \sqrt{B^2 - AC}) \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (15)$$

решения каждого из которых, является решением уравнения (13).

Далее между коэффициентами A, B, C уравнения (12) найдем соотношение

$$\begin{aligned} B^2 - AC &= v_x^2 v_y^2 - (a^2 - v_x^2)(a^2 - v_y^2) = \\ &= a^2(v_x^2 + v_y^2 - a^2) = a^2(v^2 - a^2) \end{aligned}, \quad (16)$$

из которого следует, что если течение газа сверхзвуковое ($v > a$), то $B^2 - AC > 0$ и, в соответствии с классификацией уравнений 2-го порядка [10], уравнение (12) является гиперболическим. Если же течение дозвуковое ($v < a$), то $B^2 - AC < 0$ и, поэтому уравнение (12) является эллиптическим. И, наконец, при $v = a$, $B^2 - AC = 0$ уравнение (12) принадлежит параболическому типу.

Поскольку область течения газа расположена внутри сопла, задача отыскания потенциала скоростей является внутренней задачей [9]. Если известна поверхность сопла, описываемая уравнением

$$F(x, y) = 0, \quad (17)$$

то внутренняя задача относится к классу прямых задач, в отличие от обратных задач, в которых отыскиваются формы сопла, по известным параметрам газового потока.

Так как через боковую поверхность сопла газ не протекает, то из (17) следует

$$\frac{\partial F}{\partial x} v_x + \frac{\partial F}{\partial y} v_y = 0, \quad (18)$$

являющееся условием непротекания и представляющее собой граничное условие, которое, с помощью соотношений (11), мы приведем к виду

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \quad (19)$$

Располагая граничным условием (19), мы можем сформулировать следующую краевую задачу: требуется найти потенциал скоростей φ , удовлетворяющий внутри области течения уравнению (12), а на границе области – условию (19).

Отметим, что сформулированная краевая задача справедлива для любого из отмеченных типов уравнения (12), но далее мы будем рассматривать только гиперболический тип этого уравнения, описывающий сверхзвуковое течение газа.

Поскольку в этом случае величина

$$B^2 - A \cdot C = a^2(v^2 - a^2) > 0,$$

то в замену уравнениям (14) и (15) мы можем написать соответствующую им систему уравнений

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B + \sqrt{B^2 - AC}}, \quad (20)$$

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B - \sqrt{B^2 - AC}}, \quad (21)$$

поскольку всякое решение уравнения (20) является решением уравнения (14) и наоборот [11]. То же самое мы можем утверждать и об уравнениях (21) и (15).

Из уравнений (20), (21) вытекает следующие равенства

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad (22)$$

подставляя в которые формулы (10), находим выражения для производных

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{-v_x v_y + a \sqrt{v^2 - a^2}}{a^2 - v_x^2}, \quad (23)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{-v_x v_y - a \sqrt{v^2 - a^2}}{a^2 - v_x^2}, \quad (24)$$

определяющих положение касательных в любой точке к некоторым кривым $y_1(x), y_2(x)$, называемых характеристическими линиями (или просто характеристиками).

Заметим, что уравнения (20) и (21) мы можем представить в другой форме

$$A dy - (B + \sqrt{B^2 - AC}) dx = 0,$$

$$A dy - (B - \sqrt{B^2 - AC}) dx = 0$$

и затем привести к одному уравнению

$$A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0$$

или, то же самое, в виде

$$A y'^2 - 2B \cdot y' + C = 0. \quad (25)$$

Из формул, определяющих понятие полного дифференциала

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy, \quad dv_y = \frac{\partial v_y}{\partial x} dx + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy$$

вытекают соотношения

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{dv_x}{dx} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dx}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{dv_y}{dy} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{dx}{dy},$$

с помощью которых перепишем уравнение (9)

$$\begin{aligned} &A \left(\frac{dv_x}{dx} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) + 2B \frac{\partial v_y}{\partial x} + \\ &+ C \left(\frac{dv_y}{dy} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{dx}{dy} \right) + \frac{a^2 v_y}{y} = 0 \end{aligned}$$

Умножив полученное уравнение на dx

$$A dv_x - A \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dx} dx + 2B \frac{\partial v_y}{\partial x} dx +$$

$$-Cdv_y \frac{dx}{dy} - C \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{dx}{dy} dx + \frac{a^2 v_y}{y} = 0$$

и учитывая, что $dy/dx = y'$, имеем

$$\begin{aligned} Adv_x y' - A \frac{\partial v_x}{\partial y} y'^2 dx + 2By' \frac{\partial v_y}{\partial x} dx + Cdv_y \\ - C \frac{\partial v_y}{\partial x} dx + \frac{a^2 v_y}{y} y' dx = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Группируя в (26) подчеркнутые члены, и принимая во внимание (25), мы замечаем, что уравнение (26) существенно упрощается

$$Adv_x y' + Cdv_y + \frac{a^2 v_y}{y} y' dx = 0,$$

а после подстановки сюда сначала формул (22), а затем (10) и (16), мы получаем уравнения, связывающие компоненты скорости v_x , v_y и их дифференциалы на характеристических линиях $y_1(x)$, $y_2(x)$

$$\begin{aligned} (-v_x v_y \pm a \sqrt{v^2 - a^2}) dv_x + (a^2 - v_y^2) dv_y + \\ + \frac{a^2 v_y}{y} \frac{(-v_x v_y \pm a \sqrt{v^2 - a^2})}{a^2 - v_x^2} dx = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

здесь и далее верхний знак соответствует характеристике $y_1(x)$, а нижний – характеристике $y_2(x)$.

Уравнения (27) допускают дальнейшие преобразования, если ввести в рассмотрение угол Маха α и угол θ , образованный вектором скорости с горизонтальной осью v_x

$$\begin{aligned} \sin \alpha = \frac{a}{v}, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad \cos \theta = \frac{v_x}{v}, \\ \sin \theta = \frac{v_y}{v} \end{aligned} \quad (28)$$

и тогда уравнения характеристик (23) и (24) в этих обозначениях примут вид

$$\frac{dy_{1,2}}{dx} = \frac{-v \cos \theta \cdot v \sin \theta \pm v \sin \alpha \cdot \sqrt{v^2 - a^2} \sin^2 \alpha}{v^2 \sin^2 \alpha - v^2 \cos^2 \theta} \quad (29)$$

С помощью тригонометрических тождеств

$$\sin \beta = \frac{tg \beta}{\sqrt{1 + tg^2 \beta}}, \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \beta}},$$

в которых β может быть, как углом θ , так и углом α , приведем формулы (29) к виду

$$\frac{dy_1}{dx} = tg(\theta - \alpha), \quad \frac{dy_2}{dx} = tg(\theta + \alpha), \quad (30)$$

откуда мы видим, что характеристики $y_1(x)$, $y_2(x)$ на плоскости x , y располагаются под углом 2α друг к другу, причем вектор скорости делит этот

угол пополам.

После подстановки (28) и (30) в (27) мы получим систему дифференциальных уравнений

$$\cos(\theta \pm \alpha) dv_x + \sin(\theta \pm \alpha) dv_y - \frac{v_y \cdot \sin^2 \alpha}{y} dl, \quad (31)$$

где dl – дифференциал дуги характеристики, определяемый по формуле

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (32)$$

Система уравнений (31), кроме двух искомого dv_x , dv_y содержит еще угол α , который, в свою очередь, связан первой из формул (28) с местной скоростью звука, подлежащей определению. Следовательно, система (31) не определена.

Чтобы исключить эту неопределенность воспользуемся уравнением Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{a_0^2}{k-1},$$

из которого находим местную скорость звука

$$a = \sqrt{a_0^2 - \frac{k-1}{2} v^2}, \quad (33)$$

где a_0 – скорость звука в покоящемся газе, определяемая по формуле [2, 7, 8]

$$a_0 = \sqrt{kRT_0}, \quad (34)$$

где T_0 – абсолютная температура (далее $T = 288^\circ\text{K}$), R – универсальная газовая постоянная.

Сейчас система (31) в совокупности с формулой (33) полностью определена во всех точках характеристических линий, кроме тех точек, которые принадлежат оси симметрии ($y = 0$, $v_y = 0$), поскольку в этих точках уравнения (31) содержат неопределенность вида $0/0$, раскрывая которую по Лопиталю, имеем

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{v_y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(v_y)'_y}{(y)'_y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial v_y}{\partial y} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}. \quad (35)$$

Из уравнения неразрывности (5) на оси симметрии ($y = 0$) вытекает равенство

$$\frac{v_x}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{v_y}{y} = 0,$$

из которого, с учетом (35), получаем формулу

$$\frac{v_y}{y} = -\frac{1}{2} \left(\frac{v_x}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right). \quad (36)$$

С другой стороны из уравнения (3) при $y = 0$ с учетом первой формулы (7) вытекает равенство

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

в силу которого (36) приобретает вид

$$\frac{v_y}{y} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial x} \left(\frac{v_x^2}{a^2} - 1 \right)$$

а учитывая, что при $y=0$: $v_x=v$, $v^2/a^2 = 1/\sin^2 \alpha$, перепишем полученную формулу еще раз

$$\frac{v_y}{y} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

и подставив ее в (31), получим систему уравнений

$$\cos(\theta \pm \alpha) dv_x + \sin(\theta \pm \alpha) dv_y - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \frac{\partial v_x}{\partial x} dl \quad (37)$$

которую следует использовать на оси симметрии сопла (при $y = 0$).

Таким образом, в результате преобразований мы перешли от уравнения 2-го порядка (12) гиперболического типа к двум уравнениям (31) первого порядка.

Обращаем внимание, что, если уравнение (12) должно выполняться в каждой точке внутри сопла, то система уравнений (31) справедлива в каждой точке на характеристических линиях $y_1(x)$ и $y_2(x)$, положение которых определяется формулами (30).

Из сказанного следует, что для уравнений (31) мы должны указать не граничные условия (19), а начальные условия, в качестве которых следует принять значения компонентов скоростей v_x и v_y во всех точках на некоторой линии (далее начальная линия), находящейся в сверхзвуковой области. В совокупности с системой уравнений (31) начальные условия, образуют задачу Коши [10], которую будем рассматривать взамен краевой задачи (12), (19).

В качестве еще одного допущения примем, что звуковая линия является прямой и расположена в горловине сопла перпендикулярно его осевой линии. Сказанное в полной мере относится к одномерному течению газа [1, 2], но не всегда соответствует плоскому или осесимметричному течению газа, хотя часто и используется для описания последних [5, 6, 9].

Далее мы построим решение задачи Коши для сопла, профиль которого является меридианом одной из незамкнутых в вершине безызгибных оболочек вращения, обнаруженных и описанных в [12].

Главные радиусы безызгибных оболочек получены в явном виде [12]

$$R_1 = \frac{C_1 - C_2 x^2}{2C_1 C_2 x^2 (3C_1 - C_2 x^2)}, \quad R_2 = \frac{C_1 - C_2 x^2}{2C_1 C_2 x^2}, \quad (38)$$

а уравнение меридиана (левая ветвь) выражается посредством интеграла

$$f(x) = - \int_{-r}^x \frac{2C_1 C_2 x^3 dx}{\sqrt{(C_1 - C_2 x^2)^2 - 4C_1^2 C_2^2 x^6}}, \quad (39)$$

В формулах (38) и (39) абсцисса x отсчитывается от оси оболочки по перпендикуляру к ней (рис 2).

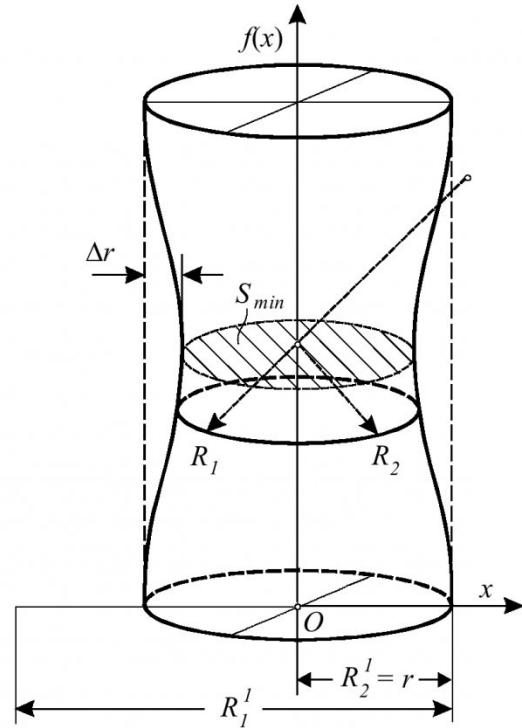


Рис. 2. Незамкнутая в вершине безызгибная оболочка вращения

Из условия при

$$\vartheta = \vartheta_1 = \frac{\pi}{2} : R_2(\vartheta_1) \equiv R_2^1 = r, \quad R_1(\vartheta_1) \equiv R_1^1,$$

определяются постоянные интегрирования

$$C_1 = \frac{R_1^1}{r(r - 3R_1^1)}, \quad C_2 = \frac{R_1^1}{r^3(r - R_1^1)}. \quad (40)$$

Численное интегрирование в (39) позволило построить меридианы безызгибных оболочек [12].

Из всего многообразия указанного класса незамкнутых безызгибных оболочек мы выбираем в качестве профиля сверхзвукового сопла оболочку, у которой соотношение радиусов в торце равно $R_1^1 / R_2^1 = 3$ (рис. 2). Относительное сужение этой оболочки равно $\Delta r/r = 0,2423$, а ее относительная длина $L/r = 3,2096$.

Построение решения задачи Коши начнем с выбора начальной линии, в качестве которой мы не можем принять звуковую линию AB , расположенную в горловине (рис. 3), поскольку в этом случае угол Маха $\alpha = 90^\circ$ и поэтому все характеристические линии, выходящие из точек, принадлежащих AB , будут совпадать с самой AB . В силу этого, за начальную линию мы примем линию $a_1 a_7$, которую расположим параллельно звуковой линии AB на расстоянии $\delta x = 0,2r$ от нее в сверхзвуковой области (рис. 3). В этом случае линия $a_1 a_7$ не совпадает ни с одним характеристическим направлением, выходящим из любой ее точки.

Для выбранной нами безызгибной оболочки ордината $y_{a1} = 0,7904r$, а соседние точки

a_2, \dots, a_7 расположим друг от друга на расстоянии $\Delta y = 0,263r$.

Будем полагать, что скорость газа во всех точках a_1, \dots, a_7 одинакова и равна 320 м/с. При этом $\operatorname{tg} \theta$ в точке a_1 , очевидно, равен производной y' в этой точке, который мы найдем путем дифференцирования (39).

Далее мы воспользуемся методом характеристик [7–9], сущность которого состоит в замене в формулах (30) и уравнениях (31) бесконечно малых величин dy, dx, dl, dv_x, dv_y их малыми, но конечными значениями.

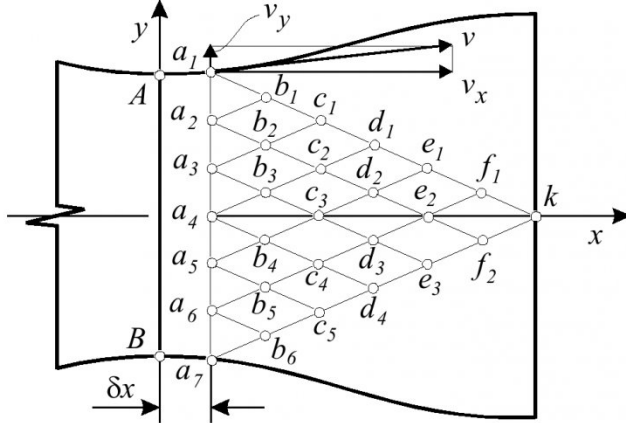


Рис. 3. Схема построения характеристической сетки

Затем через каждую из точек a_1, \dots, a_7 проведем касательные к характеристическим линиям обоих семейств, определяемых по формулам (30).

В результате пересечения характеристических линий получатся точки b_i ($i = 1, 2, \dots, 6$), принадлежащие i -му «слою», для вычисления координат которых составляем систему уравнений в конечных разностях, вытекающую из формул (30)

$$\begin{cases} y_{b_i} - y_{a_i} = (x_{b_i} - x_{a_i}) \operatorname{tg}(\theta_{a_i} - \alpha_{a_i}), \\ y_{b_i} - y_{a_{i+1}} = (x_{b_i} - x_{a_{i+1}}) \operatorname{tg}(\theta_{a_{i+1}} + \alpha_{a_{i+1}}), \end{cases}$$

из которой мы получаем искомые координаты

$$x_{b_i} = \{y_{a_{i+1}} - y_{a_i} + x_{a_i} \operatorname{tg}(\theta_{a_i} - \alpha_{a_i}) - x_{a_{i+1}} \operatorname{tg}(\theta_{a_{i+1}} + \alpha_{a_{i+1}})\} /$$

$$\{\operatorname{tg}(\theta_{a_i} - \alpha_{a_i}) - \operatorname{tg}(\theta_{a_{i+1}} + \alpha_{a_{i+1}})\}$$

$$y_{b_i} = y_{a_i} + (x_{b_i} - x_{a_i}) \operatorname{tg}(\theta_{a_i} - \alpha_{a_i}).$$

Далее определяем

$$\Delta x_{a_i b_i} = x_{b_i} - x_{a_i}, \quad \Delta y_{a_i b_i} = y_{b_i} - y_{a_i},$$

$$\Delta l_{a_i b_i} = \sqrt{\Delta x_{a_i b_i}^2 + \Delta y_{a_i b_i}^2}.$$

Затем мы записываем уравнения (31) в конечных разностях для точки b_i ($i = 1, 2, \dots, 6$)

$$\cos(\theta_{a_i} + \alpha_{a_i})(v_{x(b_i)} - v_{x(a_i)}) + \sin(\theta_{a_i} + \alpha_{a_i}) \times$$

$$\times (v_{y(b_i)} - v_{y(a_i)}) - \frac{v_{y(a_i)} \cdot \sin^2 \alpha_{a_i}}{y_{a_i}} \Delta l_{a_i b_i} = 0$$

$$\cos(\theta_{a_{i+1}} - \alpha_{a_{i+1}})(v_{x(b_i)} - v_{x(a_{i+1})}) +$$

$$+ \sin(\theta_{a_{i+1}} - \alpha_{a_{i+1}}) \times (v_{y(b_i)} - v_{y(a_{i+1})})$$

$$- \frac{v_{y(a_{i+1})} \cdot \sin^2 \alpha_{a_{i+1}}}{y_{a_{i+1}}} \Delta l_{a_{i+1} b_i} = 0,$$

откуда находим составляющие скорости газа в точке b_i

$$v_{x(b_i)} = v_{x(a_i)} - \operatorname{tg}(\theta_{a_i} + \alpha_{a_i})(v_{y(b_i)} - v_{y(a_i)}) +$$

$$+ \frac{v_{y(a_i)} \cdot \sin^2 \alpha_{a_i}}{y_{a_i} \cos(\theta_{a_i} + \alpha_{a_i})} \Delta l_{a_i b_i} = 0$$

$$v_{y(b_i)} =$$

$$= \frac{v_{y(a_i)} \operatorname{tg}(\theta_{a_i} + \alpha_{a_i}) - v_{y(a_{i+1})} \cdot \operatorname{tg}(\theta_{a_{i+1}} - \alpha_{a_{i+1}})}{\operatorname{tg}(\theta_{a_i} + \alpha_{a_i}) - \operatorname{tg}(\theta_{a_{i+1}} - \alpha_{a_{i+1}})} +$$

$$\left(\frac{v_{y(a_i)} \cdot \sin^2 \alpha_{a_i}}{y_{a_i} \cos(\theta_{a_i} + \alpha_{a_i})} - \frac{v_{y(a_{i+1})} \cdot \sin^2 \alpha_{a_{i+1}}}{y_{a_{i+1}} \cos(\theta_{a_{i+1}} - \alpha_{a_{i+1}})} \frac{\Delta l_{a_{i+1} b_i}}{\Delta l_{a_i b_i}} \right) \times$$

$$\frac{\Delta l_{a_i b_i}}{\operatorname{tg}(\theta_{a_i} + \alpha_{a_i}) - \operatorname{tg}(\theta_{a_{i+1}} - \alpha_{a_{i+1}})}.$$

По найденным компонентам находим скорость газа в точке b_i

$$v_{b_i} = \sqrt{v_{x(b_i)}^2 + v_{y(b_i)}^2},$$

угол наклона скорости

$$\theta_{b_i} = \arcsin \left(\frac{v_{y(b_i)}}{v_{b_i}} \right)$$

и местную скорость звука

$$a_{b_i} = \sqrt{a_0^2 - \frac{k-1}{2} v_{b_i}^2}.$$

По описанной процедуре мы вычислили вначале параметры, характеризующие скорость газа в точках b_1, b_2, b_3

$$v_{b_1} = 393,632 \text{ м/с}, \quad v_{b_2} = 406,763 \text{ м/с},$$

$$v_{b_3} = 413,968 \text{ м/с}, \quad a_{b_1} = 291,083 \text{ м/с},$$

$$a_{b_2} = 287,449 \text{ м/с}, \quad a_{b_3} = 285,385 \text{ м/с},$$

а затем в этих же точках нашли число Маха по формуле $M = v/a$

$$M_{b_1} = 1,352, \quad M_{b_2} = 1,415, \quad M_{b_3} = 1,451.$$

Здесь мы учли, что, ввиду осевой симметрии

сопла с профилем безызгибной оболочки, значения параметров газа в точках b_4, b_5, b_6 будут равны соответствующим найденным значениям.

Отыскав параметры газа в точках i -го «слоя», продвигаемся на следующий j -й «слой», содержащий точки c_1, c_2, \dots, c_5 (см. рис. 3), затем на m -й и т.д.

Обратим внимание, что каждый последующий слой содержит на одну расчетную точку меньше, чем предыдущий и, следовательно, последний расчетный слой содержит всего одну точку k , в которой мы тоже нашли параметры газа

$$v_k = 497,416 \text{ м/с}, \quad a_k = 265,326 \text{ м/с}, \\ M_k = 1,875.$$

Таким образом, описанная процедура метода характеристик позволяет последовательно определить параметры газа во всех узлах характери-

стической сетки.

Выводы.

1. Сформулирована задача Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, описывающая течение газа в сверхзвуковой части сопла.

2. Обосновано применение метода характеристик для построения решения задачи Коши.

3. Составлен алгоритм численной реализации метода характеристик для определения скорости газа в сверхзвуковой части сопла.

4. На основе выполненных вычислений установлено, что сопло, профилем которого является безызгибная оболочка с соотношением радиусов в торце $R_1^1 / R_2^1 = 3$, обеспечивает скорость газа на выходе в 1,875 раза, превышающую скорость звука.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дейч, М. Е. Техническая газодинамика. – М.–Л. : Госэнергоиздат, 1961. – 670 с.
2. Абрамович, Г. И. Прикладная газовая динамика. Ч. 1: – М.: Наука, 1991. – 600 с.
3. Трухний, А. Д. Стационарные паровые турбины. – М. : Энергоатомиздат, 1990. – 640 с.
4. Черданцев, С. В. Движение идеального газа по трубам переменного сечения // Вестник Кузбасского государственного технического университета. – 2011. – № 3. – С. 22 – 25.
5. Христианович, С. А. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1981. – 485 с.
6. Гудерлей, К. Г. Теория околосзвуковых течений (пер. с нем.). – М.: Изд-во ИЛ, 1960. – 421 с.
7. Рахматуллин, Х. А. Газовая динамика. / Х. А. Рахматуллин, А. Я. Сагомоян, А. И. Бунимович и др.– М.: Высшая школа, 1965. – 723 с.
8. Аржанников, Н. С. Аэродинамика больших скоростей. / Н. С. Аржанников, Г. С. Садекова.– М.: Высшая школа, 1965. – 561 с.
9. Пирумов, У. Г. Газовая динамика сопел. / У. Г. Пирумов, Г. С. Росляков – М.: Наука, 1990. – 368 с.
10. Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики. / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М.: Высш. школа, 1970. – 712 с.
11. Степанов, В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
12. Гуревич, В. И. Тонкие оболочки вращения, деформирующиеся без изгиба под действием равномерного давления / В. И. Гуревич, В. И. Калинин // Докл. АН СССР.– 1981. – т. 256, № 5. – С. 1085 – 1088.

Поступило в редакцию 15.05.2015

MATHEMATICAL MODELING TO SUPERSONIC OF THE SYMMETRICAL CURRENT OF THE GAS IN NOZZLE WITH PROFILE WITHOUT MOMENT OF THE SHELL

Cherdantsev Sergey V.¹,

Dr.Sc. (Engineering), Professor. E-mail: svch01@yandex.ru:

Cherdantsev Nikolay V.²,

Dr.Sc. (Engineering). E-mail: cherdantsevvnv@icc.kemsc.ru

¹ T.F. Gorbachev Kuzbass State Technical University, 28 street Vesennyaya, Kemerovo, 650000, Russian Federation

² Institute of Coal of the Siberian Branch of the RAS, 10 Leningradsky Prospect, Kemerovo, 650065, Russian Federation.

Abstract

Problem worded within the framework of classical admissions of the gas track record with initial condition, describing current of the ideal gas in nozzle with profile of without moment of the shell. The considered method

of the features, for which is formed разностная scheme and algorithm her numerical realization. Importance of the velocity of the gas is received on output from the nozzle.

The Keywords: nozzle Lavalya, equations Eйлера, corner of the Mach, indicative lines, problem Koshi, without moment of the shell, equations in final difference

REFERENCES

1. *Dejch, M. E.* Tehnicheskaja gazodinamika. – M.–L. : Gosjenergoizdat, 1961. – 670 s.
2. *Abramovich, G. II.* Prikladnaja gazovaja dinamika. Ch. 1: – M.: Nauka, 1991. – 600 s.
3. *Truhnij, A. D.* Stacionarnye parovye turbiny. – M. : Jenergoatomizdat, 1990. – 640 s.
4. *Cherdancev, S. V.* Dvizhenie ideal'nogo gaza po trubam peremennogo sechenija // Vestnik Kuzbasskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta. – 2011. – № 3. – S. 22 – 25.
5. *Hristianovich, S. A.* Mehanika sploshnoj sredy. M.: Nauka, 1981. – 485 s.
6. *Guderlej, K. G.* Teorija okolozvukovyh techenij (per. s nem.). – M.: Izd-vo IL, 1960. – 421 s.
7. *Rahmatulin, H. A.* Gazovaja dinamika. / H. A. Rahmatullin, A. Ja. Sagomonjan, A. I. Bunimovich i dr.– M.: Vysshaja shkola, 1965. – 723 s.
8. *Arzhannikov, N. S.* Ajerodinamika bol'shih skorostej. / N. S. Arzhannikov, G. S. Sadekova.– M.: Vysshaja shkola, 1965. – 561 s.
9. *Pirumov, U. G.* Gazovaja dinamika sopel. / U. G. Pirumov, G. S. Rosljakov – M.: Nauka, 1990. – 368 s.
10. *Koshljakov, N. S.* Uravnenija v chastnyh proizvodnyh matematicheskoj fiziki. / N. S. Koshljakov, Je. B. Gliner, M. M. Smirnov. – M.: Vyssh. shkola, 1970. – 712 s.
11. *Stepanov, V. V.* Kurs differencial'nyh uravnenij. – M.: Fizmatgiz, 1959. – 468 s.
12. *Gurevich, V.I.* Tonkie obolochki vrashhenija, deformirujushiesja bez izgiba pod dejstviem ravnornogo davlenija / V. I. Gurevich, V. I. Kalinin // Dokl. AN SSSR.– 1981. – t. 256, № 5. – S. 1085 – 1088.

Received 15.05.2015