

УДК 519.21

## ГРАНУЛОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФОТОПЛАНОГРАММ НЕОДНОРОДНЫХ ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ

**Бирюков Альберт Васильевич,**

доктор техн. наук, профессор

**Дягилева Анна Владимировна,**

кандидат техн. наук, доцент, e-mail:dyagileva1952@mail.ru

Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева, 650000, Россия,  
г. Кемерово, ул. Весенняя, 28

**Аннотация.** Изучаются математические аспекты обработки результатов измерений в гранулометрии и гранулометрические характеристики фотопланограмм неоднородных дисперсных систем.

**Ключевые слова:** горная порода, дробление, дисперсная система, диаметр частиц, статистика Тьюки, закон распределения.

При дроблении горных пород образуется дисперсная система из частиц случайных размеров. Если частицы заполняют трехмерную область, то их измерение обычно проводят на поверхности этой области (например, на поверхности раз渲ала взорванной породы или на фотопланограмме [1]).

При этом может оказаться, что за счет просеивания мелочи в нижнюю часть дисперсной системы гранулометрические характеристики всех частиц отличаются от аналогичных характеристик частиц на поверхности.

Для анализа ситуации необходимо сравнить две выборки, содержащие значения диаметра частиц на поверхности и частиц всей дисперсной системы. Такое сравнение можно провести по критерию Тьюки [2,3].

Для этого необходимо найти число частиц одной выборки с диаметром, превышающим диаметр всех частиц другой выборки, и число частиц другой выборки с диаметром, меньшим диаметра всех частиц первой. Сумма этих чисел образует статистику Тьюки [4,5], критическое значение которой равно семи [6]. Если вычисленная сумма превышает семь, то изучаемые выборки отличаются друг от друга неслучайно, то есть обе дисперсные системы различны по указанной выше причине.

Для этого случая обозначим плотности распределения диаметра всех частиц дисперсной системы и частиц на ее поверхности как случайных величин соответственно через  $f(x)$  и  $g(x)$ , где  $x$  – диаметр проекции частиц (средний линейный размер).

Путем несложных рассуждений получаем взаимосвязь вида

$$f(x) = g(x)/cx,$$

где  $c$  – среднее значение величины  $1/x$  для измеренных на поверхности частиц.

Для использования этой взаимосвязи необхо-

димо иметь конкретные функции  $f(x)$  и  $g(x)$ .

Их поиск следует проводить как аппроксимацию гистограмм диаметра.

Приведем следующие примеры.

Пусть диаметр частиц на поверхности распределен по параболическому закону с плотностью  $g(x) = 6x(z-x)/z^3$ , где  $z$  – наибольшее из наблюдаемых значений диаметра. Тогда  $f(x) = 2(z-x)/z^2$ , то есть диаметр частиц всей дисперсной системы распределен по треугольному закону.

Другой нередкий случай, когда диаметр частиц на поверхности имеет гамма-распределение с параметром формы, равным двум. Тогда  $f(x) = e^{-x/\bar{x}}$ , где  $\bar{x}$  – средний диаметр всех частиц.

Функцию  $f(x)$  можно найти лишь как аппроксимацию эмпирического распределения диаметра, получаемого измерением проекций репрезентативной выборки.

Но на практике такая выборка не является репрезентативной, поскольку измеряют обычно лишь проекции с диаметрами, превосходящими некоторое значение  $x$ , а проекции мелких частиц остаются неизмеренными. Поэтому средний диаметр  $\bar{x}$  всегда оказывается больше среднего диаметра всех проекций на фотопланограмме  $m$ , равного интегралу от  $xf(x)$  по всем значениям диаметра.

Если это условие нарушается, то выбранную аппроксимацию следует заменить. Разность  $\bar{x} - m$  зависит от правой границы значений диаметра неизмеренных проекций и от выбора аппроксимирующего закона.

Приведем примеры простейших и достаточных для практики аппроксимирующих эмпирическое распределение диаметра законов:

- 1)  $f(x) = 2(1-x)$ ,  $0 < x < 1$ ,  $m = 1/3$ , где за масштабную единицу принято наибольшее из наблюдаемых значений диаметра;
- 2)  $f(x) = 2x$ ,  $0 < x < 1$ ,  $m = 2/3$ ;
- 3)  $f(x) = 6x(1-x)$ ,  $0 < x < 1$ ,  $m = 1/2$ ;
- 4)  $f(x) = 1$ ,  $0 < x < 1$ ,  $m = 1/2$ ;
- 5)  $f(x) = e^{-x}$ ,  $0 < x < \infty$ ,  $m = 1$ .

Соответствующие эмпирические распределения в первом и пятом случаях являются убывающими, в втором случае – возрастающими, в третьем случае – симметричными и в четвертом случае – равномерными.

Если диаметр частицы равен  $z$ , то случайная величина имеет симметричное распределение в интервале  $t_0 < t < 1$ , где  $t = t_0$  соответствует случаю, когда  $x$  совпадает с минимальным линейным размером частицы, а  $t = 1$  достигается, когда диаметры  $x$  и  $z$  совпадают.

В силу независимости случайных величин  $x$  и  $z$  средние диаметры частицы и ее проекции связаны соотношением  $\bar{z} = \bar{x}/t_0$ . Величина  $t_0$ , равная отношению минимального размера частицы к максимальному, характеризует ее форму. Для частиц продуктов дробления горных пород эта величина с небольшой вариацией имеет центр рассеяния  $t_0 = 3/5$ . Следовательно,  $\bar{z} = 1,25\bar{x}$ .

В большинстве случаев частицы дисперсной системы заполняют некоторую трехмерную область. При этом фотопланограмма содержит проекции частиц, расположенных на поверхности этой области (например, на поверхности развода взорванной породы [7]). Но гранулометрические характеристики частиц всей дисперсной системы и частиц на ее поверхности могут быть существенно различными.

Например, средний диаметр частиц дисперсной системы равен  $1/c$ , где  $c$  – гармоническое диаметров измеренных проекций, то есть среднее значение величины  $1/x$ , равное интегралу от  $f(x)/x$  по всем значениям  $x$ .

Примеры:

$$f(x) = 6x(1-x), 0 < x < 1, c = 3,$$

$$g(z) = 2(1-z);$$

$$f(x) = 2x, 0 < x < 1, c = 2, g(z) = 1;$$

$$f(x) = xe^{-x}, 0 < x < 1, c = 1, g(z) = e^{-z}.$$

Гранулометрический анализ дисперсной системы из частиц случайных размеров часто проводят путем измерения проекций частиц на ее фотопланограмме.

Знание закона распределения диаметра проекций частиц на фотопланограмме позволяет вычислять любые гранулометрические характеристики дисперсной системы. Рассмотрим основные из

них, наиболее востребованные инженерной практикой.

Обозначим через  $m(k)$  математическое ожидание  $k$ -й степени диаметра проекции. Тогда величина  $w = m(2)/m(3)$ , где  $m(2)$  и  $m(3)$  есть соответственно средний квадрат и средний куб диаметра частиц равна суммарной площади поверхности частиц в единичном объеме. Она является важным параметром в гранулометрии и при дроблении в дробилках и мельницах определяет основные показатели динамики процесса.

В массивах горных пород, рассеченные естественными трещинами на блоки, диаметр блоков распределен в интервале от нуля до  $Z$ , при этом  $w = 4/3z$ . В данном случае величина  $w$  характеризует трещинную пустотность массива и его фильтрационные свойства.

При дроблении горных пород взрывом величина  $w$  также является необходимым параметром в определении коэффициента полезного действия взрыва.

Многие задачи горного дела предполагают известным фракционный состав дисперсной системы по суммарному объему частиц. Его описание дает гранулометрическая функция  $v(x)$  [8,9], получаемая интегрированием отношения  $x^3 f(x)/m(3)$  в границах от нуля до  $x$ , где  $x$  – третий начальный момент закона  $f(x)$ .

Для треугольного закона  $v(x) = 5(x/z)^4 - 4(x/z)^5$ , а для экспоненциального –  $v(x) = e^{-x/\bar{x}}(1 + \bar{x}x + \bar{x}^2 x^2/2)$ .

Примеры:

$$f(x) = 2(1-x), 0 < x < 1,$$

$$v(x) = 5x^4 - 4x^5;$$

$$f(x) = 2x, 0 < x < 1, v(x) = x^5;$$

$$f(x) = 1, 0 < x < 1, v(x) = x^4;$$

$$f(x) = e^{-x}, 0 < x < \infty,$$

$$v(x) = e^{-x} \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right).$$

Среднюю крупность частиц дисперсной системы характеризует их средневзвешенный диаметр, равный  $m(k+1)/m(k)$ , где весами являются значения  $k$ -й степени диаметра [10].

Наиболее употребительными на практике являются среднеарифметический диаметр ( $k = 0$ ), равный  $m(1)$ , и средневзвешенный по объему ( $k = 3$ ), равный  $m(4)/m(3)$ .

Например, если  $f(x) = 2(1-x), 0 < x < 1$ ,  $m(1) = 1/3$ , то  $m(4)/m(3) = 2/3$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Патент №2388998, РФ, МПК G01C 11/00, B07C 5/10. Способ определения грансостава раздробленной породы в карьерах / Ин-т проблем компл. освоения недр Российской академии наук (ИПКОН РАН); С. Д. Викторов, Н. Н. Казаков. – Опубл. в Б.И., 2010. – № 13.
2. Тьюки Дж. Анализ результатов наблюдений. Разведочный анализ. – Москва: Мир, 1981. – 696 с.
3. Мостеллер, Ф. Анализ данных и регрессия / Ф. Мостеллер, Д. Тьюки. – Москва: Финансы и статистика, 1982. – 239 с.
4. Hoaglin, D. C. Understanding robust and exploratory data analysis / D. C. Hoaglin, F. Mosteller, J. W. Tukey. – New York: John Wiley & Sons, 2000. – 448 p.
5. Кобзарь, А. И. Прикладная математическая статистика. – Москва: Физматлит, 2006. – 816 с.
6. Закс, Л. Статистическое оценивание. – Москва: Статистика, 1976. – 598 с.
7. Крюков, Г. М. Гранулометрический состав горной массы в зоне регулируемого дробления пород взрывом / Г. М. Крюков, В. В. Стадник, М. И. Докутович // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – Москва, МГГУ, 2007. – №2 – С. 34–42.
8. Бирюков, А. В. Гранулометрические функции // Вестник КузГТУ (журнал), 2010. – №6 – С. 116.
9. Бирюков, А. В. Аналитическая гранулометрия // Вестник КузГТУ (журнал), 2012. – №4 – С. 118–119.
10. Бирюков, А. В. Дисперсные системы горного дела / А. В. Бирюков, С. И. Протасов, П. А. Самусев // Вестник КузГТУ (журнал), 2014. – №3 – С. 60–61.

*Поступило в редакцию 12.08.2015*

**UDC 519.21**

## GRANULOMETRIC ANALYSIS OF INHOMOGENEOUS FOTOPLANOGRAMM DISPERSE SYSTEMS

**Birjukov Albert V.,**  
**Dr.Sc.(Engineering), Professor,**  
**Djagilewa Anna V.,**  
**C.Sc.(Engineering), Associate Professor, e-mail: e-mail:dyagileva1952@mail.ru**

T.F. Gorbachev Kuzbass State Technical University, 28 street Vesennaya, Kemerovo, 650000, Russian Federation

**Abstract.** The mathematical aspects of processing the results of measurements in particle size and particle size characteristics fotoplanogramm heterogeneous disperse systems are studied.

**Keywords:** rock, crushing, dispersion, diameter of particles, statistics Tukey, law of distribution.

## REFERENCES

1. Patent №2388998, RF, MPK G01C 11/00, B07C 5/10. Sposob opredelenija gransostava razdroblennoj porody v kar'erah / In-t problem kompl. osvojenija nedr Rossijskoj akademii nauk (IPKON RAN); S. D. Viktorov, N. N. Kazakov. – Opubl. v B.I., 2010. – № 13.
2. T'juki Dzh. Analiz rezul'tatov nabljudenij. Razvedochnyj analiz. – Moskva: Mir, 1981. – 696 s.
3. Mosteller, F. Analiz dannyh i regressija / F. Mosteller, D. T'juki. – Moskva: Finansy i statistika, 1982. – 239 s.
4. Hoaglin, D. C. Understanding robust and exploratory data analysis / D. C. Hoaglin, F. Mosteller, J. W. Tukey. – New York: John Wiley & Sons, 2000. – 448 p.
5. Kobzar', A. I. Prikladnaja matematicheskaja statistika. – Moskva: Fizmatlit, 2006. – 816 s.
6. Zaks, L. Statisticheskoe ocenivanie. – Moskva: Statistika, 1976. – 598 s.
7. Krjukov, G. M. Granulometricheskiy sostav gornoj massy v zone reguliruemogo droblenija porod vzryvom / G. M. Krjukov, V. V. Stadnik, M. I. Dokutovich // Gornyy informacionno-analiticheskij bjulleten' (nauchno-tehnicheskij zhurnal). – Moskva, MGGU, 2007. – №2 – S. 34–42.
8. Birjukov, A. V. Granulometricheskie funkciy // Vestnik KuzGTU (zhurnal), 2010. – №6 – S. 116.
9. Birjukov, A. V. Analiticheskaja granulometrija // Vestnik KuzGTU (zhurnal), 2012. – №4 – S. 118–119.
10. Birjukov, A. V. Dispersnye sistemy gornogo dela / A. V. Birjukov, S. I. Protasov, P. A. Samusev // Vestnik KuzGTU (zhurnal), 2014. – №3 – S. 60–61.

*Received: 12.08.2015*