

УДК 62-233.3/9

**ПОЛНОЕ КИНЕТОСТАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМА  
С ПЕРЕКАТЫВАЮЩИМСЯ РЫЧАГОМ**

**THE FULL KINETOSTATIC ANALYSIS OF THE MECHANISM  
WITH THE ROLLING LEVER**

**Максимова Екатерина Николаевна,**  
аспирант, e-mail: [maksimovaen06@mail.ru](mailto:maksimovaen06@mail.ru)  
**Maksimova Ekaterina N.,** postgraduate student  
**Дворников Леонид Трофимович,**  
доктор техн. наук, профессор  
**Dvornikov Leonid T.,** Dr. Sc.in Engineering

Сибирский государственный индустриальный университет, 654007, Россия, г. Новокузнецк, ул. Кирова, 42.

Siberian State Industrial University, 42 street Kirov, Novokuznetsk, 654007, Russian Federation.

**Аннотация:** Особенностью механизмов перекатывающихся рычагов является использование в них высших кинематических пар  $p_4$ , в которых обычно имеет место проскальзывание. Подбором профилей элементов звеньев высшей пары – центроид в абсолютном или относительном движении, можно добиться отсутствия трения скольжения, что увеличивает износостойкость и КПД всего механизма. Статья посвящена силовому расчету механизма, перекатывающийся рычаг которого, в отличие от известных конструкций, выполнен с двумя высшими кинематическими парами. С помощью метода кинестатики определены реакции во всех его кинематических парах с учетом сил трения в высших парах. Найдена особая точка, относительно которой разрешены уравнения равновесия трехзвенной группы нулевой подвижности. Учет сил трения производится с применением способа последовательных приближений, то есть, принимая в первом приближении отсутствие трения скольжения (чистое качение), рассчитываются реакции в кинематических парах, по найденным реакциям определяются силы трения и подставляются в уравнения равновесия, уточняя искомые реакции. Цикл повторяется до необходимой степени точности значений реакций. Определен уравновешивающий момент на ведущем звене, необходимый для выбора двигателя. Таким образом, доказана полная кинестатическая разрешимость механизма с перекатывающимся рычагом.

**Abstract:** The property of the mechanisms with rolling levers is the using of higher kinematic pairs, usually it have slipping. With selecting of profiles of elements of the higher pair – centroids in absolute motion or relative motion can be achieved absence of sliding friction, it is increase the durability and efficiency of the whole mechanism. The article is devoted to the power analysis of mechanism with rolling lever, in contrast to known designs, is made with two higher kinematic pairs. Reactions in kinematic pairs were determined considering the friction forces in the higher pairs using the method of kinetostatics. Special point was found, it solve the equations of equilibrium of threelink group with zero mobility. The friction forces were produced using the method of successive approximations, that is, taking a first approximation, the absence of sliding friction (pure rolling), reaction in the kinematic pairs were calculated, the frictional force was determined and was offered in the equations of equilibrium, updating the desired reaction. The cycle is repeated until the required degree of accuracy of values. The balancing moment was detected on the drive link, it is necessary for the selection of the engine. Thus we have proved of the full kinetostatic solvability of the mechanism with the rolling lever.

**Ключевые слова:** высшая кинематическая пара, скольжение, реакция, сила трения, уравновешивающий момент.

**Key words:** higher kinematic pair, slipping, reaction, force of friction, balancing moment.

Механизмы перекатывающихся рычагов [1] имеют широкое применение в машиностроительной практике. На их основе созданы прессовые машины, а также разного рода газо- и гидрораспределительные механизмы [2]. Важной особенностью таких механизмов является использование в них высших кинематических пар [3]  $p_4$ , позволяющих в плоском механизме вращательное и поступатель-

ное относительные движения звеньев [4]. Причем перекатывание одного рычага по другому может происходить либо с проскальзыванием, либо без него [5]. На рис. 1,а представлен механизм, перекатывающийся рычаг 3 которого входит в соединение с другими звеньями посредством двух высших кинематических пар (D, E). Механизм защищен патентом на изобретение № 2514322 [6].

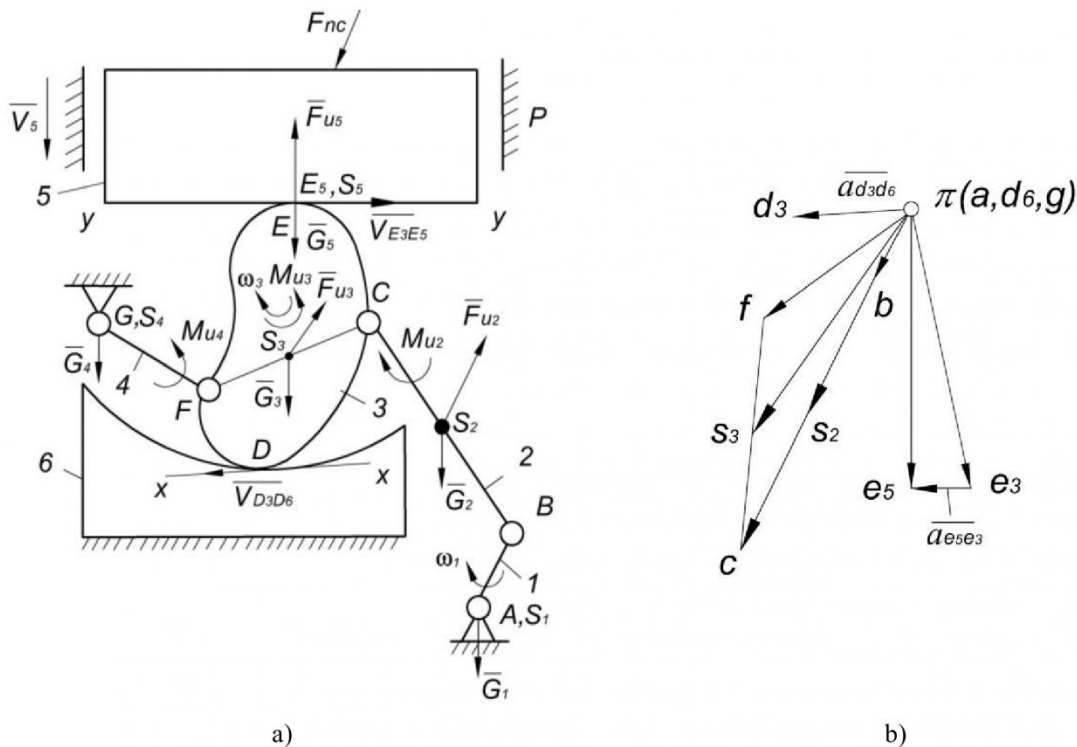


Рис. 1. Механизм с перекатывающимся рычагом  
 а) кинематическая схема; б) план ускорений  
 Fig. 1. Mechanism with the rolling lever a) kinematics; б) the acceleration plan

В состав механизма входят кривошип 1, шатун 2, перекатывающийся рычаг 3, коромысло 4, ползун 5 и стойка 6. Он собран в пять вращательных (A, B, C, F, G), одну поступательную P и, как уже говорилось, две высшие кинематические пары (D, E), в которых имеет место проскальзывание. Полное кинематическое исследование механизма было изложено в статье [7]. Обратимся к его кинетостатическому анализу. Как известно, кинетостатическое исследование механизма или его силовой расчет проводится с целью определения реакций во всех кинематических парах механизма и нахождения уравновешивающего момента, который необходимо приложить к ведущему звену (уравновешивающей силы, если ведущее звено движется поступательно), чтобы обеспечить работу механизма. В основе силового исследования лежат принцип Даламбера (принцип кинетостатики) и принцип статической определенности групп Ассура [8]. Принцип Даламбера заключается в следующем: если к механической системе приложить все внешние силы  $\bar{F}$ , силы и моменты сил инерции  $\bar{F}_u, \bar{M}_u$ , а также реакции связей  $\bar{R}$ , то система окажется в равновесии [9] и к ней можно применить уравнения статики, то есть

$$\bar{F} + \bar{F}_u + \bar{M}_u + \bar{R} = 0.$$

Для определения сил инерции звеньев необходимо найти ускорения их центров тяжести  $a_{Si}$ . Центр тяжести кривошипа 1 (рис. 1,а) сосредоточен на оси его вращения, т.е.  $S_1$  совпадает с точкой A.

Точка  $S_2$  звена 2 находится на середине BC, следовательно, точка  $s_2$  находится на половине отрезка bc на плане ускорений (рис. 1,б), который был подробно описан в статье [7]. Абсолютное ускорение точки  $S_2$  определим по формуле  $a_{S_2} = \pi s_2 \cdot \mu_a$ , где  $\mu_a$  – масштабный коэффициент ускорения. Центр тяжести перекатывающегося рычага 3 находится на середине отрезка CF, соответственно точка  $S_3$  находится на половине отрезка cf на плане ускорений. Ускорение точки  $S_3$  найдем по формуле  $a_{S_3} = \pi s_3 \cdot \mu_a$ . Центр тяжести коромысла 4  $S_4$  совпадает с G, а для ползуна 5 –  $S_5$  совпадает с  $E_5$ . По найденным ускорениям центров тяжести  $a_{Si}$  и угловым ускорениям  $\varepsilon_i$  звеньев [7] при заданных массах  $m_i$  и моментах инерции  $J_{Si}$  звеньев определим силы инерции и моменты сил инерции [10]:

$$\begin{aligned} F_{u1} &= m_1 \cdot a_{S1} = 0, \text{ так как } a_{S1} = 0; \\ M_{u1} &= \varepsilon_1 \cdot J_{S1} = 0, \text{ так как } \varepsilon_1 = 0 (\omega_1 = const); \\ F_{u2} &= m_2 \cdot a_{S2}; \quad M_{u2} = \varepsilon_2 \cdot J_{S2}; \\ F_{u3} &= m_3 \cdot a_{S3}; \quad M_{u3} = \varepsilon_3 \cdot J_{S3}; \\ F_{u4} &= m_4 \cdot a_{S4} = 0, \text{ так как } a_{S4} = 0; \\ M_{u4} &= \varepsilon_4 \cdot J_{S4}; \quad F_{u5} = m_5 \cdot a_{S5}. \end{aligned}$$

Далее, прикладывая действующие на звенья механизма внешние силы – силу полезного сопротивления  $\bar{F}_{nc}$  (рис. 1,а) [11], силы тяжести звеньев, а также силы инерции, направление которых про-

твояположно ускорениям центров тяжести, моменты сил инерции, направленные твояположно угловым ускорениям звеньев, составим расчетную схему механизма. Для отыскания реакций в кинематических парах декомпозируем механизм, то есть выделим в нем статически определимые группы звеньев – группы Ассур. Начнем исследование с наиболее удаленной от ведущего звена группы нулевой подвижности – выходного звена 5 (рис. 2,а) [12]. Прикладываем действующие на него силы, учитывая реакции в кинематических парах. Так как механизм создан для преодоления сопротивления обрабатываемого объекта – прессовый механизм, на звено 5 действует сила  $\overline{F}_{nc}$ , направленная под углом. Обратим особое внимание на наличие сил трения в поступательной кинематической паре  $P$  и высшей паре  $E$ . Сила трения  $\overline{F}_P$  в поступательной паре [13] направлена твояположно скорости движения ползуна 5 (рис. 1,а), а сила трения  $\overline{F}_E$  в высшей паре – твояположно скорости относительного движения  $\overline{V}_{E_3E_5}$ . Величины этих сил равны

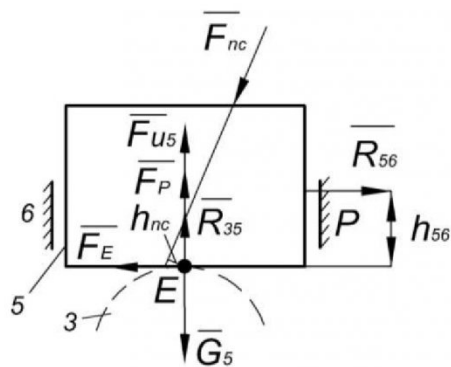
$$F_P = R_{56} f_P; \quad F_E = R_{35} f_E, \quad (1)$$

где  $f_P$  и  $f_E$  – коэффициенты трения в парах.

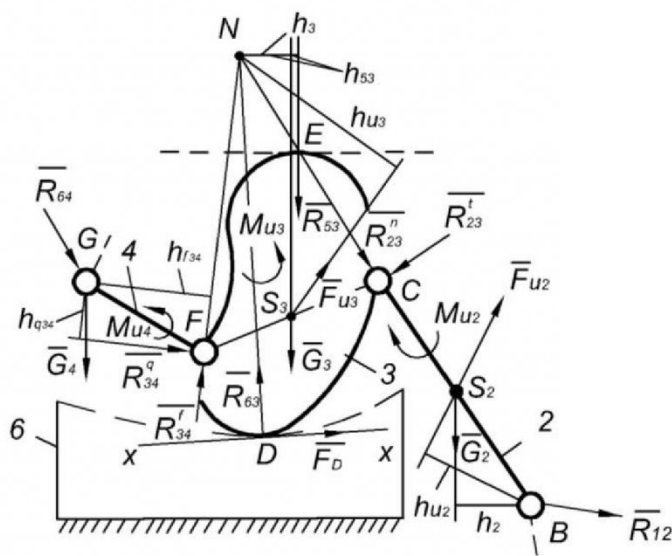
Для определения реакций в кинематических парах с учетом сил трения применим способ последовательных приближений [14].

Так, векторное уравнение равновесия сил, действующих на звено 5, имеет вид

$$\sum_{\text{звено 5}} \overline{F} = 0; \\ \overline{F}_{nc} + \overline{F}_{u5} + \overline{R}_{35} + \overline{F}_E + \overline{G}_5 + \overline{R}_{56} + \overline{F}_P = 0. \quad (2)$$



а)



б)

Рис. 2. К силовому анализу а) выходного звена; б) трехзвенной группы (2,3 и 4)

Fig. 2. The power analysis а) of the output link; б) a threelink group (2,3 and 4)

Для определения плеча реакции  $h_{56}$  в поступательной кинематической паре  $P$  составим уравнение моментов сил относительно точки  $E$

$$\sum_{\text{звено 5}} M(E) = 0;$$

$$F_{nc} \cdot h_{nc} \cdot \mu_l - R_{56} \cdot h_{56} \cdot \mu_l = 0, \quad (3)$$

где  $\mu_l$  – масштабный коэффициент длины [м/мм].

Отметим, что моменты сил трения  $\overline{F}_P$  и  $\overline{F}_E$  относительно точки  $E$  равны нулю. Из уравнения (2), предполагая в первом приближении, что  $F_E = 0$  и  $F_P = 0$ , найдем величины реакций  $\overline{R}_{35}^0$  и  $\overline{R}_{56}^0$ . Подставим их значения в формулы (1)

$$F'_P = R_{56}^0 f_P; \quad F'_E = R_{35}^0 f_E.$$

Полученные  $F'_P$  и  $F'_E$  подставляем в уравнение (2), из которого определяем новые значения величин  $\overline{R}'_{35}$  и  $\overline{R}'_{56}$ . Снова подставив их в (1), повторяем цикл и получаем величины  $\overline{R}''_{35}$  и  $\overline{R}''_{56}$ .

Далее выделяем трехзвенную структурную группу Ассур (2, 3 и 4, рис. 2,б) и прикладываем действующие на нее силы, учитывая реакции в кинематических парах.

Начнем с рассмотрения равновесия звена 2. Разложим неизвестную реакцию в кинематической паре  $C$  на составляющие, при этом направим одну из них  $\overline{R}_{23}^n$  вдоль звена 2, чтобы она не давала момента относительно точки  $B$ , а вторую  $\overline{R}_{23}^t$  – перпендикулярно звену. Из уравнения моментов сил относительно точки  $B$

$$\sum_{\text{звено 2}} M(B) = 0;$$

$$G_2 \cdot h_2 \cdot \mu_l - F_{u_2} \cdot h_{u_2} \cdot \mu_l - M_{u_2} + R_{23}^t \cdot l_2 = 0$$

выразим величину тангенциальной составляющей  $\overline{R}_{23}^t$ .

Перейдем к перекатывающемуся рычагу 3. Реакция со стороны стойки б на рычаг 3  $\overline{R}_{63}$  направлена перпендикулярно касательной хх [15]. Сила трения  $\overline{F}_D$  в высшей кинематической паре D направлена по хх противоположно скорости относительного движения  $\overline{V}_{D_3D_6}$ . Величина этой силы равна

$$F_D = R_{63} f_D. \quad (4)$$

На пересечении линий действия  $\overline{R}_{63}$  и нормальной составляющей  $\overline{R}_{23}^n$  найдем особую точку N, принадлежащую звену 3. Соединим N с точкой F и зададим направления составляющих реакции в кинематической паре F, при этом одну из них  $\overline{R}_{34}^f$  направим вдоль линии NF, а вторую  $\overline{R}_{34}^q$  – перпендикулярно NF. Обратим внимание, что относительно особой точки N реакции  $\overline{R}_{23}^n$ ,  $\overline{R}_{63}$  и  $\overline{R}_{34}^f$  не дадут моментов. Из уравнения равновесия звена 3

$$\sum_{\text{звено 3}} M(N) = 0 \quad (5)$$

или

$$\begin{aligned} R_{23}^t \cdot NC \cdot \mu_l + R_{53} \cdot h_{53} \cdot \mu_l - M_{u_3} - \\ - F_{u_3} \cdot h_{u_3} \cdot \mu_l + G_3 \cdot h_3 \cdot \mu_l - \\ - R_{34}^q \cdot NF \cdot \mu_l + F_D \cdot ND \cdot \mu_l = 0 \end{aligned}$$

определим величину реакции  $\overline{R}_{34}^q$ , приняв в первом приближении  $\overline{F}_D = 0$ .

Рассмотрим звено 4. Из уравнения моментов относительно G

$$\sum_{\text{звено 4}} M(G) = 0;$$

$$R_{34}^f \cdot h_{f34} \cdot \mu_l + R_{34}^q \cdot h_{q34} \cdot \mu_l + M_{u_4} = 0$$

выразим величину составляющей  $\overline{R}_{34}^f$ . После чего становится возможным найти полную реакцию  $\overline{R}_{34}$  в кинематической паре F. Затем из векторного уравнения равновесия звена 4

$$\sum_{\text{звено 4}} \overline{F} = 0; \quad \overline{R}_{64} + \overline{G}_4 + \overline{R}_{34} = 0$$

найдем полную реакцию  $\overline{R}_{64}$  в кинематической

паре G. Величины  $\overline{R}_{63}$  и  $\overline{R}_{23}^n$ , а следовательно, и полная реакция  $\overline{R}_{23}$  в кинематической паре C, могут быть найдены из векторного уравнения равновесия звена 3, предполагая в первом приближении  $\overline{F}_D = 0$ ,

$$\sum_{\text{звено 3}} \overline{F} = 0;$$

$$\overline{R}_{23}^n + \overline{R}_{23}^t + \overline{R}_{53} + \overline{F}_{u_3} + \overline{G}_3 + \overline{R}_{63} + \overline{F}_D + \overline{R}_{34} = 0.$$

Найденное значение  $R_{63}$  подставляем в формулу (4) в виде

$$F'_D = R_{63}^0 f_D.$$

Полученное  $F'_D$  подставляем в уравнение (5) и последовательно уточняем отыскиваемые реакции. Определив новые значения  $R'_{63}$  и снова подставив его в формулу (4), повторяем цикл и получаем искомую величину  $\overline{R}_{63}''$ .

Оставшиеся неизвестные для рассматриваемой группы – величину и направление полной реакции в кинематической паре B, найдем, составив векторное уравнение равновесия звена 2

$$\sum_{\text{звено 2}} \overline{F} = 0; \quad \overline{R}_{23} + \overline{F}_{u_2} + \overline{G}_2 + \overline{R}_{12} = 0.$$

Заключительным этапом кинетостатического исследования механизма является отыскание уравновешивающего момента, который необходимо приложить к ведущему звену для преодоления сил сопротивления. Итак, выносим ведущее звено (*кривошип 1*) и прикладываем действующие на него силы и уравновешивающий момент  $M_y$  (рис. 3).

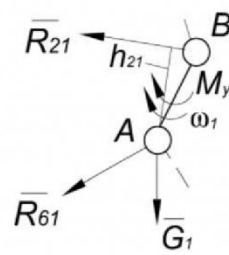


Рис. 3. К силовому анализу ведущего звена  
Fig. 3. The power analysis of the driving link

Из уравнения моментов относительно точки A

$$\sum_{\text{звено 1}} M(A) = 0; \quad M_y - R_{21} \cdot h_{21} \cdot \mu_l = 0$$

выразим уравновешивающий момент.

Составив векторное уравнение равновесия звена

$$\sum_{\text{звено 1}} \overline{F} = 0; \quad \overline{R}_{21} + \overline{G}_1 + \overline{R}_{61} = 0,$$

найдем последнюю неизвестную реакцию  $\overline{R}_{61}$ .

Таким образом, механизм, перекатывающийся ры-

чаг которого выполнен с двумя высшими кинематическими парами, имеет полную кинестатическую разрешимость.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артоболевский, И.И. Синтез плоских механизмов / И.И. Артоболевский, Н.И. Левитский, С. А Черкудинов. – М.: Наука, 1959. – 1085 с.
2. Кожевников, С.Н. Механизмы / С.Н. Кожевников, Я.И. Есипенко, Я.М.Раскин. – М.: Машиностроение, 1976. – 784 с.
3. Reuleaux, F. Lehrbuch der Kinematik. Braunschweig, 1875, Bd. I.
4. Grashof, F. Theorie der Getriebe. (Theoretische Maschinenlehre. B. II) 1883.
5. Beyer, R. Kinematische Getriebesynthese. 1953. – 318 с.
6. 2514322, С1 RU, МПК F16H 21/16. Механизм с перекатывающимся рычагом / Дворников Л. Т., Максимова Е.Н. – Опул. в Б.И., 2014. – № 12.
7. Дворников, Л.Т., Максимова, Е.Н. Кинематическое исследование механизма с перекатывающимся рычагом, выполненным с двумя высшими кинематическими парами // Вестник Кузбасского государственного технического университета, 2014. – №5. – С. 76-79.
8. Кожевников, С.Н. Теория механизмов и машин. – М.: Машиностроение, 1973. – 592 с.
9. Левитский, Н.И. Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1979. – 576 с.
10. Машков, А.А. Теория механизмов и машин. – Минск: Вышэйшая школа, 1971. – 471 с.
11. Озол, О.Г. Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
12. Артоболевский, И.И. Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1988. – 640 с.
13. Баранов, Г.Г. Курс теории механизмов и машин. – М.: Машиностроение, 1975. – 494 с.
14. Артоболевский, И.И. Теория механизмов. – М.: Наука, 1967. – 719 с.
15. Фролов, К.В. Теория механизмов и машин / К.В.Фролов, С.А.Попов, А.К. Мусатов. – М.: Высшая школа, 1987. – 496 с.

### REFERENCES

1. Artobolevskiy I.I. Sintez ploskikh mekhanizmov. I.I. Artobolevskiy, N.I. Levitskiy, S. A Cherkudinov. Moscow, Nauka, 1959. 1085 P.
2. Kozhevnikov S.N. Mekhanizmy. S.N. Kozhevnikov, Ya.I. Esipenko, Ya.M.Raskin. Moscow, Mashinostroenie, 1976. 784 P.
3. Reuleaux F. Lehrbuch der Kinematik. Braunschweig, 1875, Bd. I.
4. Grashof F. Theorie der Getriebe. (Theoretische Maschinenlehre. B. II) 1883.
5. Beyer R. Kinematische Getriebesynthese. 1953. 318 P.
6. 2514322, S1 RU, МПК F16H 21/16. Mekhanizm s perekatyvayushchimsya ryuchagom. Dvornikov L. T., Maksimova E.N. Opubl. v B.I., 2014. № 12.
7. Dvornikov L.T., Maksimova E.N. Kinematischeskoe issledovanie mekhanizma s perekatyvayushchimsya ryuchagom, vpolnennym s dvumya vysshimi kinematischeskimi parami // Vestnik Kuzbasskogo gosudarstvennogo tehniceskogo universiteta. 2014. No. 5. P. 76-79.
8. Kozhevnikov S.N. Teoriya mekhanizmov i mashin. Moscow, Mashinostroenie, 1973. 592 P.
9. Levitskiy N.I. Teoriya mekhanizmov i mashin. Moscow, Nauka, 1979. 576 P.
10. Mashkov A.A. Teoriya mekhanizmov i mashin. Minsk, Vysheyshaya shkola, 1971. 471 P.
11. Ozol O.G. Teoriya mekhanizmov i mashin. Moscow, Nauka, 1984. 432 P.
12. Artobolevskiy I.I. Teoriya mekhanizmov i mashin. Moscow, Nauka, 1988. 640 P.
13. Baranov G.G. Kurs teorii mekhanizmov i mashin. Moscow, Mashinostroenie, 1975. 494 P.
14. Artobolevskiy I.I. Teoriya mekhanizmov. Moscow, Nauka, 1967. 719 P.
15. Frolov K.V. Teoriya mekhanizmov i mashin. K.V.Frolov, S.A.Popov, A.K. Musatov. Moscow, Vysshaya shkola, 1987. 496 P.

Поступило в редакцию 25.10.2015

Received 25 November 2015