

## НАУКИ О ЗЕМЛЕ

УДК 622.831

### ДЕФОРМАЦИОННЫЕ И ПРОЧНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ХРУПКИХ ГОРНЫХ ПОРОД ПРИ СЖАТИИ

### DEFORMATION AND STRENGTH CHARACTERISTICS BRITTLE ROCK UNDER COMPRESSION

Гоголин Вячеслав Анатольевич,  
д.т.н., профессор, e-mail: [inna-e@inbox.ru](mailto:inna-e@inbox.ru)  
Gogolin Vjacheslav A., Dr. Sc. (Engineering), Professor

Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева, 650026, Россия,  
г. Кемерово, ул. Весенняя, 28  
T. F. Gorbachev Kuzbass State Technical University, 28 street Vesennyaya, Kemerovo,  
650000, Russian Federation

**Аннотация:** В работе предлагается модель полной диаграммы сжатия горных пород для определения деформационных и прочностных характеристик горных пород при объемном сжатии. Модель кусочно-линейной диаграммы сжатия построена на основе определения предела прочности на сжатие, остаточной прочности и модуля спада. Используются физические соотношения: критерий разрушения, равенство энергий допредельного и запредельного деформирования и экспериментальные закономерности. Сравнение теоретических и экспериментальных значений пределов прочности горных пород показало адекватность предлагаемой модели.

**Abstract:** We propose a model of a complete diagram of the compression of rocks for determination of deformation and strength properties of rocks at a volume compression. Model piecewise linear graph of compression is based on the determination of the compressive strength, residual strength and modulus of recession. Use physical relations: failure criterion, equality and the beyond of the limiting energy of deformation and experimental laws. Comparison of theoretical and experimental values of ultimate strength of rocks showed the adequacy of the proposed model.

**Ключевые слова:** модель полной диаграммы сжатия горных пород, критерий разрушения, равенство энергий допредельного и запредельного деформирования, модуль спада.

**Keywords:** model of a complete diagram of compression of rocks, fracture criterion, equality and the beyond of the limiting energy of deformation module recession.

Полные диаграммы одноосного сжатия были впервые представлены в работе [1], по результатам натурных испытаний призматических целиков угля. В дальнейшем были получены полные диаграммы объемного сжатия на жестких прессах образцов горных пород [3-7]. Данные результаты были впервые использованы в численных и аналитических расчетах напряженно-деформированного состояния и устойчивости горных пород при очистной выемке [8] и в окрестности подготовительной выработки круглого сечения [9,10]. В дальнейшем были рассмотрены различные геомеханические задачи о НДС и устойчивости массива, учитывающие запредельное деформирование, например в работах [5, 11,12].

Анализ полных диаграмм сжатия образцов горных пород с боковым подпором [4] показывает, что при достижении нагрузок, составляющих  $0,93 \div 0,97$  значения предела прочности, поперечная деформация имеет то же значение, что и при

одноосном сжатии. При одноосном сжатии образца под действием вертикального напряжением  $\sigma_1$  до предела прочности  $\sigma_{сж}$  образец линейно деформируется с модулем  $E$ , так что его вертикальная деформация составляет  $\varepsilon_1 = \sigma_1 / E$ . Поперечная деформация определяется модулем поперечных деформаций  $\nu$  и связана с вертикальной деформацией как  $\varepsilon_2 = -\nu \cdot \varepsilon_1 = -\nu \sigma_1 / E$ . Здесь сжимающие напряжения и деформации приняты положительными, а растягивающие – отрицательными. При достижении напряжений значения предела прочности в образце развивается продольная микротрещиноватость [5-7], вызывающая значительные поперечные деформации образца. Образец теряет за счет этого свою несущую способность и его дальнейшее запредельное деформирование происходит при снижении нагрузки.

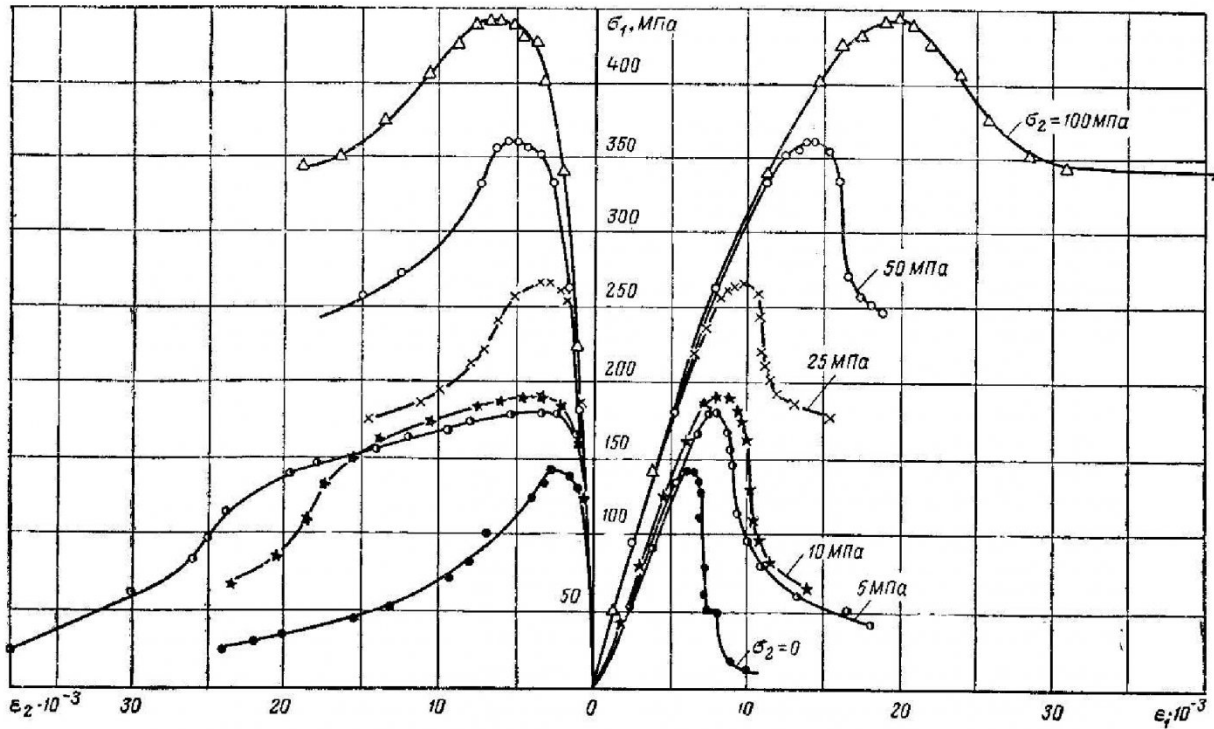


Рис. 1. Зависимость «напряжение – деформация» при разных напряженных состояниях для HBO песчаника Донбасса [4]

Fig. 1. Dependence of the "stress - strain" in various states of stress for HBO sandstone Donbass [4]

Поэтому, возрастание поперечных деформаций до предельного  $\varepsilon_2^{сж} = -\nu\sigma_{сж} / E$  может служить критерием прочности при одноосном сжатии.

Анализ полных диаграмм трехосного сжатия показывает, что в большинстве случаев (рис.1, [4]) вертикальные деформации в допредельной части также линейно зависят от напряжений с тем же

модулем линейных деформаций  $E$ , а поперечные деформации меняются незначительно. Поэтому модельная диаграмма трехосного сжатия выглядит так, как показано на рис. 2.

Предположение о кусочно-линейной аппроксимации полной диаграммы сжатия использовалось в расчетах напряженно-деформированного состояния горных пород, например в [2]. Однако, в этих работах значения прочности на сжатие,

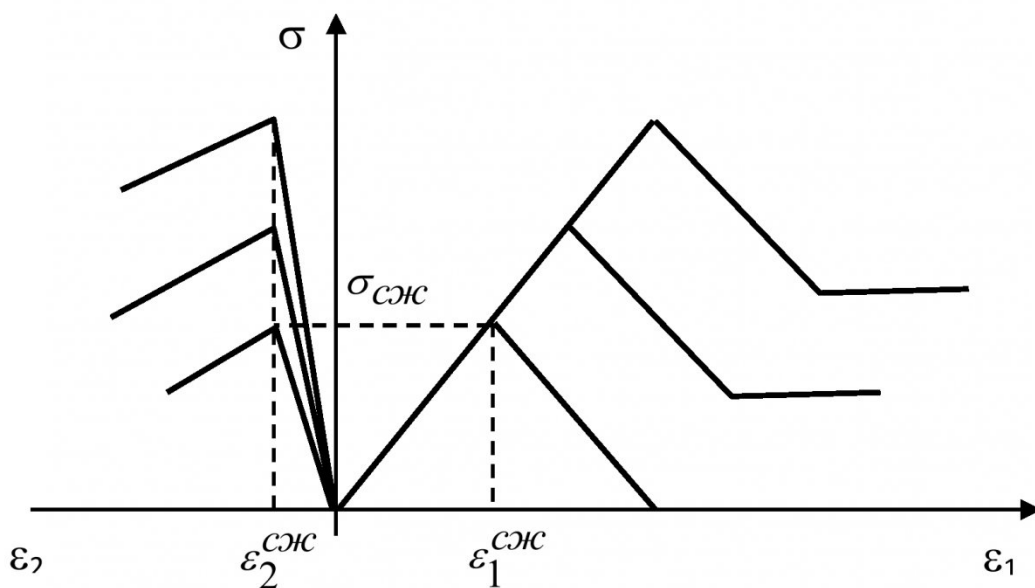


Рис. 2. Модель полной диаграммы сжатия горных пород

Fig. 2. Model full diagram of compression of rocks

остаточной прочности и модуля спада принимались по экспериментальным данным.

При объемном сжатии поперечные давления  $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_{бок}$ , и по закону Гука поперечная деформация  $\varepsilon_2 = [\sigma_{бок} - \nu(\sigma_1 + \sigma_{бок})]/E$ . Принимая за критерий прочности при объемном сжатии предельную поперечную деформацию  $\varepsilon_2^{сж} = -\nu\sigma_{сж}/E$ , имеем предел прочности горных пород при объемном сжатии в следующем виде:

$$\sigma_{сж}^{об} = \frac{1-\nu}{\nu}\sigma_{бок} + \sigma_{сж}. \quad (1)$$

Сравнение теоретических значений прочности образцов горных пород на сжатие с данными лабораторных испытаний [4] приведены в таблице, где напряжения указаны в МПа. К сожалению нельзя было провести такое сравнение с другими данными лабораторных испытаний [5-7], так как в этих работах отсутствуют сведения о значениях коэффициентов поперечных деформаций испытываемых горных пород. Погрешность отклонения теоретических значений прочности горных пород на сжатие от экспериментальных данных при значениях боковой нагрузки до 25 МПа не превышает 28,2%.

Для горных пород в состоянии плоской деформации  $\varepsilon_3 = 0$  и  $\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2)$ . То-

гда поперечная деформация с учетом выражения для  $\sigma_3$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)]/E = \\ &= [\sigma_2(1-\nu^2) - \sigma_1(\nu + \nu^2)]/E \end{aligned}$$

Используя тот же критерий прочности  $\varepsilon_2^{сж} = -\nu\sigma_{сж}/E$ , приходим к выражению для предела прочности горных пород, находящихся в состоянии плоской деформации, в виде:

$$\sigma_{сж}^{пл} = \frac{1-\nu}{\nu}\sigma_{бок} + \frac{\sigma_{сж}}{1+\nu}. \quad (2)$$

Рассматривая краевую часть вынимаемого пласта, находящуюся в состоянии объемного сжатия, из (1) имеем следующее выражение, определяющее прочность пласта на сжатие:

$$\sigma_{сж}^{об} = \frac{1-\nu}{\nu}(\lambda \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)\gamma H + \sigma_{сж} \quad (3)$$

где  $\alpha$  – угол падения пласта;  $\lambda$  - коэффициент бокового распора.

Для пологого пласта это выражение имеет вид:

$$\sigma_{сж}^{об} = \frac{1-\nu}{\nu}\lambda\gamma H + \sigma_{сж}. \quad (4)$$

В сечениях пласта, параллельных линии очистных работ или параллельных штрекам, пласт находится в состоянии плоской деформации, и прочность его краевой части определяется по (2)

Лабораторные и теоретические значения прочности горных пород при объемном сжатии

| НВО песчаник ( Донбасс )      |     |      |       |      |      |       |
|-------------------------------|-----|------|-------|------|------|-------|
| $\sigma_2$                    | 0   | 5    | 10    | 25   | 50   | 100   |
| $\varepsilon_2^{сж}$          | 2,7 | 3,2  | 3,4   | 3,4  | 3,4  | 3,7   |
| $\sigma_2^{сж}$ , лаб.        | 142 | 180  | 190   | 265  | 350  | 425   |
| $\sigma_1^{сж}$ , теор        | 142 | 179  | 215   | 325  | 507  | 872   |
| Погрешность, %                | 0   | 0,8  | 13,2  | 22,5 | 44,9 | 105,2 |
| Биотитовый гранит ( Карелия ) |     |      |       |      |      |       |
| $\sigma_2$                    | 0,3 | 5    | 10    | 25   | 50   | 100   |
| $\varepsilon_2^{сж}$          | 2,4 | 2,6  | 2,6   | 2,4  | 7,5  | 7,6   |
| $\sigma_2^{сж}$ , лаб.        | 164 | 214  | 231   | 280  | 435  | 598   |
| $\sigma_1^{сж}$ , теор        | 164 | 189  | 213   | 289  | 409  | 654   |
| Погрешность, %                | 0   | 11,9 | 7,8   | 3,2  | 6,0  | 9,4   |
| Мрамор ( Коелга )             |     |      |       |      |      |       |
| $\sigma_2$                    | 0   | 2,5  | 10    | 25   | 50   | 100   |
| $\varepsilon_2^{сж}$          | 4,6 | 4,4  | 4,3   | 4,0  | 5,0  | 6,0   |
| $\sigma_2^{сж}$ , лаб.        | 57  | 95,2 | 115,5 | 145  | 185  | 234,5 |
| $\sigma_1^{сж}$ , теор        | 57  | 68   | 102   | 171  | 285  | 513   |
| Погрешность, %                | 0   | 28,2 | 13,2  | 17,1 | 54   | 119   |

как

$$\sigma_{сж}^{пл} = \frac{1-\nu}{\nu} (\lambda \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \gamma H + \frac{\sigma_{сж}}{1+\nu} \quad (5)$$

Прочность пологого пласта, находящегося в состоянии плоской деформации

$$\sigma_{сж}^{пл} = \frac{1-\nu}{\nu} \lambda \gamma H + \frac{\sigma_{сж}}{1+\nu}. \quad (6)$$

В гидростатическом поле напряжений прочность пологого пласта определяется по (4), (6) при  $\lambda=1$ . При отсутствии горизонтальных деформаций в нетронутом массиве горных пород (гипотеза А. Н. Динника), то есть, при  $\lambda = \nu/(1-\nu)$ , имеем простые выражения для вычисления значений прочности пласта:

$$\sigma_{сж}^{об} = \gamma H + \sigma_{сж}, \quad \sigma_{сж}^{пл} = \gamma H + \frac{\sigma_{сж}}{1+\nu} \quad (7)$$

для объемного и плоско-деформированного состояния краевой части пласта соответственно.

Полученные выражения (3), (5) и их частные случаи показывают, что прочность пласта при объемном и плоско-деформированном состоянии зависит только от деформационной  $\nu$  и прочностной  $\sigma_{сж}$  характеристик угля, а также вида и степени нагружения пласта в соответствии со значениями параметров  $\lambda$ ,  $\gamma H$  и  $\alpha$ .

На ниспадающей ветви одноосного деформирования образца происходит дальнейшее устойчивое трещинообразование. Будем считать, что накопленная в образце энергия упругого деформирования  $w_{упр}$  частично расходуется на запределное деформирование  $w_{запр}$  (раскрытие и рост трещин), а остаточная прочность мала, что характерно для хрупких горных пород (рис.). Запишем условие равенства энергий деформирования на восходящей и нисходящей ветвях диаграммы одноосного сжатия образца:

$$w_{упр} = w_{запр} + w_{упр}^{ост}, \quad (8)$$

где  $w_{упр}^{ост}$  остаточная энергия упругих деформаций образца в запределном состоянии.

На восходящей ветви при линейном деформировании с модулем  $E$  запасенная упругая энергия выражается как:

$$w_{упр} = \frac{\sigma_{сж}^2}{2E}.$$

На нисходящей ветви зависимость напряжений от запределных деформаций также линейная с модулем спада  $M$  и имеет следующий вид:

$$\sigma = \sigma_{сж} - (\varepsilon - \varepsilon_{сж}) \cdot M.$$

Энергия запределного деформирования при значении снижающегося напряжения  $\sigma$  определяется следующим образом

$$: w_{запр} = \int_{\varepsilon_{сж}}^{\varepsilon} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon =$$

$$= \int_{\varepsilon_{сж}}^{\varepsilon} [\sigma_{сж} - (\varepsilon - \varepsilon_{сж})] d\varepsilon =$$

$$= \sigma_{сж} \frac{\sigma_{сж} - \sigma}{M} - \frac{(\sigma_{сж} - \sigma)^2}{2M}$$

Остаточная энергия упругого деформирования для этого же значения напряжения

$$w_{упр}^{ост} = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

Условие равенства энергий допределного и запределного деформирования (8) принимает вид:

$$\frac{\sigma_{сж}^2}{2E} = \sigma_{сж} \frac{\sigma_{сж} - \sigma}{M} - \frac{(\sigma_{сж} - \sigma)^2}{2M} + \frac{\sigma^2}{2E},$$

и после упрощений сводится к следующему равенству:

$$\frac{\sigma_{сж}^2}{E} - \frac{\sigma^2}{E} = \frac{\sigma_{сж}^2}{M} - \frac{\sigma^2}{M}.$$

Отсюда следует, что  $M = E$ , то есть модуль спада равен модулю линейных деформаций.

В случае объемного деформирования модуль спада остается неизменным, а остаточная прочность возрастает так же как предел прочности на сжатие, а именно

$$\sigma_{ост}^{об} = \sigma_{сж}^{об} - \sigma_{сж} = \frac{1-\nu}{\nu} \sigma_{бок}.$$

Пропорциональная зависимость остаточной прочности и прочности пород при объемном сжатии от боковой нагрузки подтверждается лабораторными испытаниями на объемное сжатие образцов угля и кварцита [13].

Выводы.

1. Критерием прочности горных пород при объемном сжатии служит величина поперечных деформаций при достижении одноосной нагрузки предела прочности.

2. Прочность горных пород на сжатие в состояниях объемного и плоскодеформированного сжатия определяется прочностью образца на одноосное сжатие, его коэффициентом поперечных деформаций и величиной боковой нагрузки.

3. В первом приближении можно считать, что максимум опорного давления постоянен и равен значению прочности пласта, что позволяет трактовать пласт, как своего рода образец в массиве горных пород.

4. Модуль спада хрупких горных пород равен модулю линейных деформаций в допределном состоянии.

5. Предел прочности на сжатие и остаточная прочность горных пород пропорциональны боковой нагрузке.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов К. И. Некоторые результаты натурных исследований несущей способности и напряженно-го состояния угольных целиков / К. И. Иванов, К. П. Бетанели // Уголь. 1963. - №3. - С.21-28.
2. Bieniawski, Z. T. Failure of fractured rock./ Z.T. Bieniawski, H. G. Denkhaus // Int. J.Rock Mech. Min. Sci. v. 6, 1969, pp. 323 – 709.
3. Прочность и деформируемость горных пород./ Ю. М. Карташов, Б. В. Матвеев, Г. В. Михеев, А. Б. Фадеев - М.: Недра, 1979. - 269 с
4. Ставрогин А. Н. Прочность горных пород и устойчивость выработок на больших глубинах./ А. Н. Ставрогин, А. Г. Протосеня – М.: Недра, 1985, 271 с.
5. Баклашов И. В. Деформирование и разрушение породных массивов. – М.: Недра, 1988. – 271 с.
6. Фармер Я. Выработки угольных шахт. – М.: Недра, 1990. – 269 с.
7. Бенявски З. Управление горным давлением. – М.: Мир, 1990. – 254 с.
8. Гоголин В. А. Нелинейная модель взаимодействия боковых пород с закладочным массивом и угольным пластом./ В. А. Гоголин, Ю. А. Рыжков // ФТПРПИ, 1977, № 1, с. 23 – 27.
9. Линьков А. М. Учет запредельных деформаций в плоской задаче о круглой выработке. ФТПРПИ, №5, 1977, с. 16 – 22.
10. Баклашов И. В. Оценка устойчивости горных выработок. / И. В. Баклашов, Б. А. Картозия. //Шахтное строительство. 1978, № 2, с. 13 – 16.
- 11 Петухов И. М. Механика горных ударов и выбросов./ И. М. Петухов, А. М. Линьков. М.: Недра, 1983, 324 с.
12. Орехов В. Г. Механика разрушений инженерных сооружений и горных массивов./ В. Г. Орехов, М. Г. Зерцалов. – М.: Изд-во АСВ, 1999, 330 с.
13. Ozbay M. U. Physical and numerical modeling of rock fracture./ . M. U. Ozbay, T. Dedet, J. A. L. Napiert // The Journal of The South African Institute of Mining and Metallurgy DECEMBER 1996, с.317 – 323.

## REFERENCES

1. Ivanov, K. I. Nekotorye rezul'taty naturnyh issledovanij nesushhej sposobnosti i naprjazhennogo sostojanija ugol'nyh celikov / K. I. Ivanov, K.P. Betaneli // Ugol'. 1963. - №3. - S.21-28.
2. Bieniawski, Z. T. Failure of fractured rock./ Z. T. Bieniawski, H. G. Denkhaus // Int. J.Rock Mech. Min. Sci. v. 6, 1969, pp. 323 – 709.
3. Prochnost' i deformiruemost' gornyh porod./ Ju. M. Kartashov, B. V. Matveev, G. V. Miheev, A. B. Fadeev - M.: Nedra, 1979. - 269 s
4. Stavrogina, A. N. Prochnost' gornyh porod i ustojchivost' vyrabotok na bol'shih glubinah./ A. N. Stavrogina, A. G. Protosenja – M.: Nedra, 1985, 271 s.
5. Baklashov, I. V. Deformirovanie i razrushenie porodnyh massivov. – M.: Nedra, 1988. – 271 s.
6. Farmer, Ja. Vyrabotki ugol'nyh shaht. – M.: Nedra, 1990. – 269 s.
7. Benjavski, Z. Upravlenie gornym davleniem. – M.: Mir, 1990. – 254 s.
8. Gogolin, V. A. Nelinejnaja model' vzaimodejstvija bokovyh porod s zakla-dochnym massivom i ugol'nyim plastom./ V. A. Gogolin, Ju. A. Ryzhkov // FTRPI, 1977, № 1, s. 23 – 27.
9. Lin'kov, A. M. Uchet zapredel'nyh deformacij v ploskoj zadache o krugloj vyrabotke. FTRPI, №5, 1977, s. 16 – 22.
10. Baklashov, I. V. Ocenka ustojchivosti gornyh vyrabotok. / I. V. Baklashov, B. A. Kartozija. //Shahtnoe stroitel'stvo. 1978, № 2, s. 13 – 16.
- 11 Petuhov, I. M. Mehanika gornyh udarov i vybrosov./ I. M. Petuhov, A. M. Lin'kov. M.: Nedra, 1983, 324 s.
12. Orehov, V. G. Mehanika razrushenij inzhenernyh sooruzhenij i gornyh massivov./ V. G. Orehov, M. G. Zercalov. – M.: Izd-vo ASV, 1999, 330 s.
13. Ozbay, M. U. Physical and numerical modeling of rock fracture./ . M. U. Ozbay, T. Dedet, J. A. L. Napiert // The Journal of The South African Institute of Mining and Metallurgy DECEMBER 1996, с.317 – 323.

Поступило в редакцию 17.05.2016  
Received 17 May 2016