

МАТЕМАТИКА**УДК 51-74****ИНВАРИАНТЫ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ЗАДАЧЕ
КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕНОСА****INVARIANTS OF AFFINE TRANSFORMATIONS
IN THE CONVECTIVE TRANSFER PROBLEM**

Черёмухина Евангелина Евгеньевна,
магистрант, e-mail: evangelinas@list.ru

Cheryomukhina Evangelina E., master

Мосин Владимир Геннадьевич,

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: yanbacha@yandex.ru

Mosin Vladimir G., C. Sc. (Physic&Mathematic), Associate Professor

Самарский государственный архитектурно-строительный университет, 443001 Молодогвардейская ул., 194, Самара, Самарская обл.

Samara State University of Architecture and Civil Engineering (SSUACE), 443001, Molodogvardeyskaya St 194, Samara, Russia

Аннотация: Показано, что если двумерное векторное поле является линейной интерполяцией значений в вершинах невырожденного треугольника, то любое аффинное преобразование сохраняет 1) направления его потоков через стороны и 2) среднюю объемную плотность переносимой субстанции внутри прямой призмы, построенной на этом треугольнике. Введено понятие стандартизирующего аффинного преобразования, позволяющего свести задачу к случаю единичного двумерного симплекса.

Abstract: Let there is a nonsingular triangle. Let the two-dimensional vector field be linear interpolation of values in the vertex of this triangle. Then any affine transformation saves: 1) the stream direction across triangle sides; 2) the average volume density of substation into a right triangular prism. The definition of standardize affine transformation is given. The example is considered.

Ключевые слова: математическое моделирование, конвективный перенос, аффинные преобразования, инварианты, линейная интерполяция.

Keywords: mathematical modeling, convection transfer, affine transformation, invariants, linear interpolation.

Решение задачи конвективного массопереноса играет важную роль в оценке и прогнозировании экологического состояния воздушного бассейна. Исследования в этой области носят, как правило, комплексный характер (см. [3], [4], [8]) и включают, помимо чисто технических решений, применение различных математических моделей распространения и рассеяния загрязняющих веществ в атмосферном воздухе. Широко известные математические модели конвекции-диффузии обладают локальным масштабом применения (см. [2], [3]). Они вполне уместны при изучении отдельных источников загрязнения, однако, для описания макромасштабных эффектов распространения воздушных примесей и их роли в глобальных экологических процессах они, к сожалению, неприменимы. Один из подходов к изучению макромасштабных ситуаций состоит в следующем. Допустим, на интересующей нас территории расположены n станций метеонаблюдения M_1, \dots, M_n , которые фиксируют значения ветрового потока v_1, \dots, v_n . Пусть везде на границе выпуклой оболочки точек M_i плотность загрязняющей аэрозольной

субстанции известна и постоянна по времени и по линейным участкам границы. Если триангулировать набор точек M_i и последовательно перебирать треугольники триангуляции, то, преобразуя плоскость, можно вычислить среднюю плотность загрязняющей субстанции на каждом из треугольников подобно тому, как это делается в [15] на единичном двумерном симплексе. При этом весьма актуальными оказываются вопросы инвариантности основных характеристик конвективного атмосферного массопереноса: 1) направления потока $v(x,y)$ относительно ребер триангуляции и 2) средней плотности загрязняющей субстанции на треугольнике.

1 Постановка задачи

Пусть T — невырожденный треугольник с вершинами $M_i(x_i, y_i)$, и пусть в его вершинах заданы векторы v_i . Линейно интерполируя значения векторов, можно получить векторное поле $v(x, y)$, определенное на треугольнике T , подобно тому, как это делается в [13] на единичном двумерном

симплексе.

Рассмотрим прямую призму P высоты h , построенную на треугольнике T . Пусть $v(x,y)$ означает поле скорости воздушного потока, проходящего через призму P , а нижняя грань призмы, определяемая условием $z = 0$, означает поверхность земли. Тогда для того, чтобы поле $v(x,y)$ подчинялось условию соленоидальности, необходимо расширить его до трехмерного поля $w(x, y, z)$, причем, как было показано в [14], это можно сделать следующим образом:

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} v_1(x, y) \\ v_2(x, y) \end{pmatrix},$$

$$w(x, y) = \begin{pmatrix} v_1(x, y) \\ v_2(x, y) \\ \alpha z \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где коэффициент α определяется, исходя из закона сохранения массы в интегральной форме:

$$\sum_{i=0}^4 \iint_{\sigma_i} w d\sigma = 0, \quad (2)$$

Здесь $\sigma_{0,4}$ означают соответственно нижнюю и верхнюю грани призмы P , а $\sigma_{1,2,3}$ — ее боковые грани.

Допустим, на гранях призмы P известна объемная плотность $\rho(x,y,z)$ загрязняющей аэрозольной субстанции, причем:

$$\rho(x, y, z) = \rho_i, \quad \forall (x, y, z) \in \sigma_i, i \neq 4, \quad (3)$$

$$\rho(x, y, z) = 0 \quad \forall (x, y, z) \in \sigma_4 \quad (4)$$

Допустим также, что треугольник T непротиворечив в смысле следующего определения.

Определение 1. Обозначим n_1 единичный вектор внутренней нормали к стороне M_1M_2 треугольника T . Будем говорить, что сторона M_1M_2 непротиворечива, если скалярные произведения

$(v_1; n_1)$ и $(v_2; n_1)$ имеют одинаковый знак. Если $(v_i; n_1) \geq 0$, мы будем называть поток воздуха, проходящий через грань призмы P , построенную на стороне M_1M_2 , входящим, а если $(v_i; n_1) \leq 0$, будем называть поток исходящим.

Аналогично определим непротиворечивость других сторон треугольника T . В целом, треугольник T будем называть непротиворечивым, если непротиворечивы все его стороны. Если противоречива хотя бы одна из его сторон, будем говорить, что треугольник T противоречив. Теперь, если треугольник T непротиворечив, а поле w и плотность ρ не зависят от времени, то среднюю объемную плотность ρ_P загрязняющей субстанции внутри призмы P можно рассчитать, как отношение объемов:

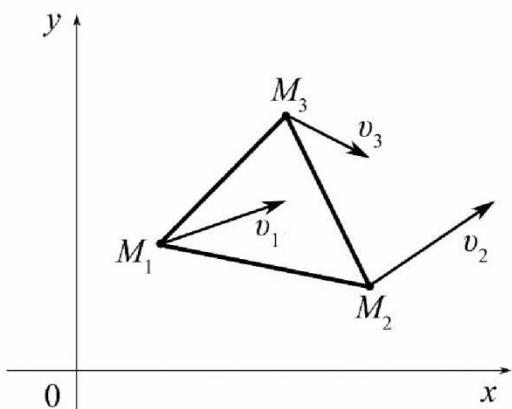
$$\rho_P = \frac{\sum_{i=1}^3 \delta_i \rho_i \Omega_i}{\sum_{i=1}^4 \delta_i \Omega_i}, \quad (5)$$

где $\Omega_{1,2,3}$ — объемы воздушных потоков, проходящих за единицу времени через боковые грани призмы P , Ω_4 — объем, проходящий через ее верхнюю грань, а коэффициенты δ_i равны 1 для входящих потоков, и 0 для исходящих. В настоящей работе мы изучим аффинные инварианты задачи конвективного переноса, в частности, покажем, что задачу конвективного переноса на произвольном треугольнике T можно свести к задаче конвективного переноса на двумерном единичном симплексе S .

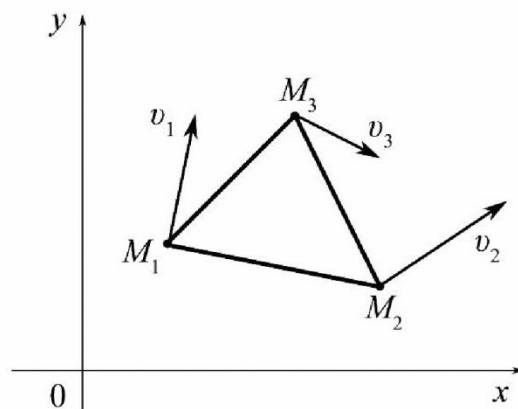
2 Инварианты непротиворечивости

Теорема 1 Под действием аффинного преобразования непротиворечивый треугольник переходит в непротиворечивый треугольник, при этом входящие потоки остаются входящими, а исходящие потоки — исходящими.

Доказательство. Для любых двух невырож-



(a) Непротиворечивый треугольник. Стороны M_1M_2 и M_3M_1 обладают входящими потоками, сторона M_2M_3 исходящим



(b) Противоречивый треугольник. Сторона M_1M_2 обладает входящим потоком, сторона M_2M_3 — исходящим, сторона M_3M_1 — противоречива

денных треугольников T и T' существует единственное аффинное преобразование ϕ , переводящее T в T' .

$$\phi: T(M_1, M_2, M_3) \rightarrow T'(M'_1, M'_2, M'_3). \quad (6)$$

Рассмотрим сторону M_1M_2 треугольника T . Прямая M_1M_2 разбивает плоскость на две полу平面:

$$\Pi = \Pi_+ \cup \Pi_-, M_3 \in \Pi_+, M_3 \notin \Pi_-, \quad (7)$$

где Π_+ означает полуплоскость, содержащую точку M_3 , а Π_- означает противоположную полуплоскость. Точно так же, прямая $M'_1M'_2$ разбивает плоскость на две полу平面:

$$\Pi' = \Pi'_+ \cup \Pi'_-, M'_3 \in \Pi'_+, M'_3 \notin \Pi'_-, \quad (8)$$

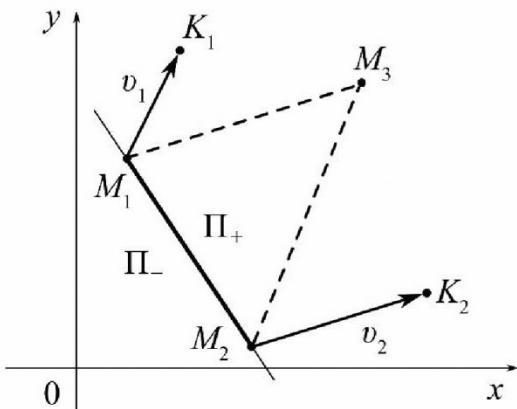
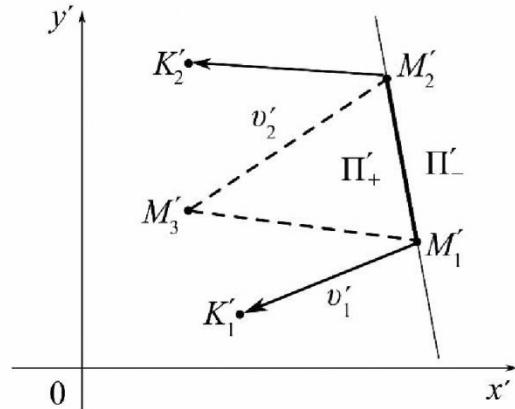
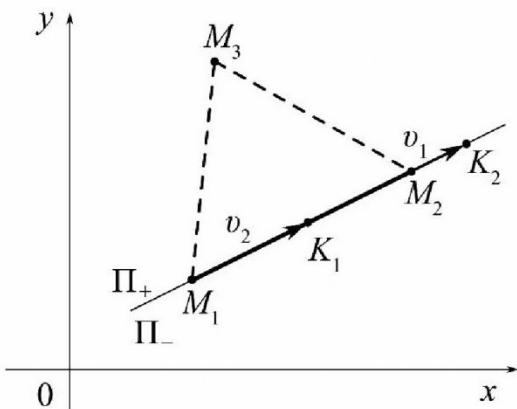
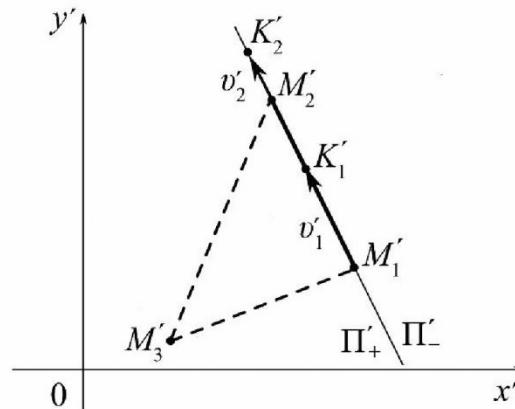
с теми же замечаниями относительно принадлежности точки M'_3 .

На плоскости Π обозначим K_1 точку, которая получается из точки M_1 смещением на вектор v_1 , и K_2 точку, которая получается из точки M_2 смещением на вектор v_2 . Аналогичные обозначения вве-

дем на плоскости Π' .

Рассмотрим сначала общую ситуацию, когда обе точки K_1 и K_2 не лежат на прямой M_1M_2 (см. рис. 2). В этом случае, так как треугольник T непротиворечив, то, в силу определения 1, точки K_1 и K_2 принадлежат одной полуплоскости: $K_1, K_2 \in \Pi_+$ или $K_1, K_2 \in \Pi_-$. Пусть выполняется первое из этих условий. Тогда $K_1, M_3 \in \Pi_+$, откуда, в силу того, что принадлежность двух точек одной полуплоскости является аффинным инвариантом, следует, что $K'_1, M'_3 \in \Pi'_+$. Точно так же, $K_2, M_3 \in \Pi_+$, откуда $K'_2, M'_3 \in \Pi'_+$.

Сопоставляя последние принадлежности, заключаем, что $K'_1, M'_2 \in \Pi'_+$, то есть, под действием аффинного преобразования ϕ непротиворечивая сторона M_1M_2 треугольника T переходит в непротиворечивую сторону $M'_1M'_2$ треугольника T' , причем объем потока Ω_1 , проходящего через сторону M_1M_2 является положительным, и объем потока Ω'_1 , проходящего через сторону $M'_1M'_2$, также положителен.

(a) Треугольник T (b) Треугольник T' Рис. 2 Обе точки K_1 и K_2 лежат вне прямой M_1M_2 (a) Треугольник T (b) Треугольник T' Рис.3 Обе точки K_1 и K_2 лежат на прямой M_1M_2

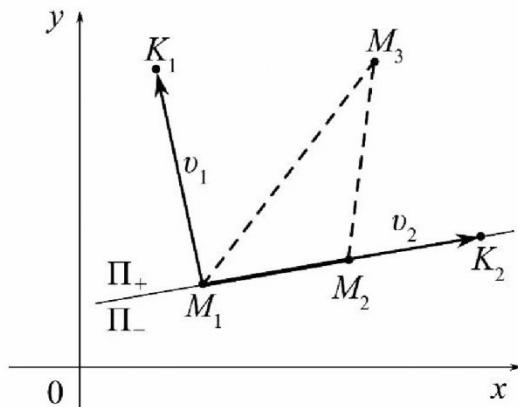
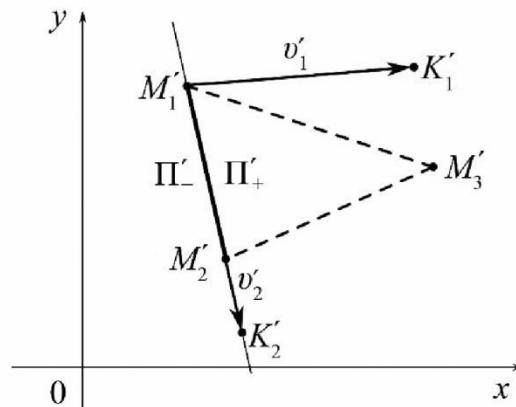

 (a) Треугольник T

 (b) Треугольник T'

 Рис.4 Точка K_1 лежит вне прямой M_1M_2 ; точка K_2 лежит на M_1M_2

Если же $K_1, K_2 \in \Pi_-$, то аналогичные рассуждения показывают, что непротиворечивая сторона M_1M_2 треугольника T переходит в непротиворечивую сторону $M'_1M'_2$ треугольника T' , но при этом объем потока Ω_1 , проходящего через сторону M_1M_2 является отрицательным, и объем потока Ω'_1 , проходящего через сторону $M'_1M'_2$ также является отрицательным.

Перейдем теперь к частным ситуациям.

Пусть точки K_1, K_2 лежат на прямой M_1M_2 (см. рис. 3). В силу того, что принадлежность точки прямой является аффинным инвариантом, это означает, что точки K'_1 и K'_2 лежат на прямой $M'_1M'_2$. Следовательно, и в этом случае после аффинного преобразования ϕ непротиворечивая сторона M_1M_2 треугольника T переходит в непротиворечивую сторону $M'_1M'_2$ треугольника T' , причем, объемы потоков на них являются нулевыми: $\Omega_1 = \Omega'_1 = 0$.

Наконец, рассмотрим ситуацию, когда одна из точек K_1 и K_2 лежит на прямой M_1M_2 , а вторая не лежит на ней (см. рис. 4). Пусть $K_1 \notin M_1M_2$, $K_2 \in M_1M_2$.

В силу аффинной инвариантности принадлежности точки прямой, из того, что $K_1 \notin M_1M_2$, следует, что $K'_1 \notin M'_1M'_2$, и, в силу тех же соображений, из того, что $K_2 \in M_1M_2$, следует, что $K'_2 \in M'_1M'_2$. Поэтому непротиворечивая сторона M_1M_2 треугольника T переходит в непротиворечивую сторону $M'_1M'_2$ треугольника T' . Допустим, что $K_1 \in \Pi_+$. Тогда $K_1, M_3 \in \Pi_+$, откуда, в силу аффинной инвариантности принадлежности двух точек одной полуплоскости, $K'_1, M'_3 \in \Pi_+$, то есть, $K'_1 \in \Pi_+$. При этом объем Ω_1 потока, проходящего через сторону M_1M_2 является положительным, и объем Ω'_1 потока, проходящего через сторону $M'_1M'_2$ также является положительным. Если же $K_1 \in \Pi_-$, то аналогичные рассуждения приводят к тем же выводам, но объемы обоих потоков в этом случае будут отрицательны. Понятно, что ситуация $K_1 \in M_1M_2$, $K_2 \notin M_1M_2$ отличается от рассмотренной

лишь обозначениями.

Итак, для любого взаимного расположения точек M_1, M_2, K_1 и K_2 под действием аффинного преобразования ϕ непротиворечивая сторона M_1M_2 треугольника T переходит в непротиворечивую сторону $M'_1M'_2$ треугольника T' , при этом входящий поток переходит во входящий, а исходящий в исходящий. Применяя те же рассуждения к сторонам M_2M_3 и M_3M_1 , получим требуемое. Теорема доказана.

3 Инвариантность объемной плотности

Пусть ϕ — аффинное преобразование плоскости, переводящее треугольник T в треугольник T' , пусть ψ — его трехмерное расширение, определяемое условием $z' = z$, и пусть P' — прямая призма, в которую переходит призма P под действием преобразования ψ . Пусть на границе призмы P известны значения объемной плотности загрязняющей аэрозольной субстанции, заданные условиями (3)–(4), и пусть треугольник T непротиворечив. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2 Средняя объемная плотность загрязняющей субстанции не изменяется под действием расширенного аффинного преобразования.

Доказательство. Средняя объемная плотность внутри призмы P' вычисляется аналогично (5) как отношение объемов:

$$\rho'_P = \frac{\sum_{i=1}^3 \delta'_i \rho_i \Omega'_i}{\sum_{i=1}^4 \delta'_i \Omega'_i}. \quad (9)$$

В силу теоремы 1, входящие потоки остаются входящими, а исходящие остаются исходящими. Поэтому

$$\delta'_i = \delta_i. \quad (10)$$

Кроме того, аффинные преобразования сохраняют отношения объемов. Поэтому коэффициенты при ρ_i в (9) равны коэффициентам при ρ_i в (5), и, следовательно

$$\rho_P' = \rho_P. \quad (11)$$

Теорема доказана.

4 Стандартизирующее преобразование

Определение 2 Стандартизирующим аффинным преобразованием будем называть аффинное преобразование, переводящее треугольник T в двумерный единичный симплекс.

Теорема 3 Пусть невырожденный треугольник T обладает вершинами $M_i(x_i, y_i)$. Тогда стандартизирующее аффинное преобразование задается следующей заменой:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Доказательство. Пусть Δ означает следующий определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \quad (13)$$

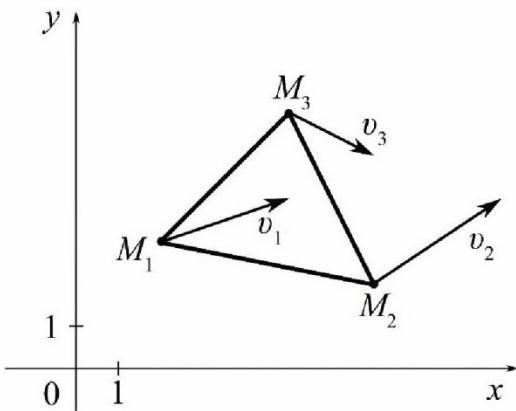
Так как треугольник T является невырожденным, то $\Delta \neq 0$, поэтому преобразование (12) обладает обратным преобразованием:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Из (14) видно, что $M_1 \rightarrow (0,0)$. Покажем, что $M_2 \rightarrow (1,0)$. Действительно, подставляя координаты M_2 в правую часть, получим:

$$\begin{aligned} \phi(M_2) &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & -(x_3 - x_1) \\ -(y_2 - y_1) & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1/\Delta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Аналогично, $M_3 \rightarrow (0,1)$. Теорема доказана.



(a) Треугольник T

Пример 1 Пусть в вершинах M_i треугольника T заданы векторы v_i :

$$M_1(2;3), \quad v_1(3;1),$$

$$M_2(7;2), \quad v_2(3;2), \quad (16)$$

$$M_3(5;6), \quad v_3(2;-1).$$

Пользуясь (12), запишем стандартизирующее аффинное преобразование:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Согласно теореме 3, под действием этого преобразования, вершины M_i переходят в вершины единичного симплекса:

$$M'_1(0;0), \quad M'_2(1;0), \quad M'_3(0;1). \quad (18)$$

Для вычисления векторов v'_i воспользуемся матрицей стандартизирующего преобразования. Так как

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

то

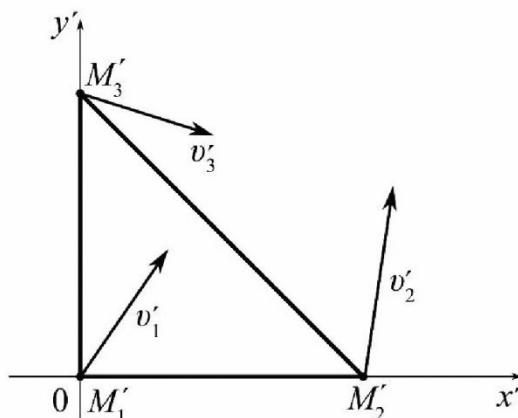
$$v'_1 = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/9 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$v'_2 = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 13/18 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$v'_3 = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/6 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Результат преобразования проиллюстрирован рисунком 5. Единицы масштаба на иллюстрациях 5(a) и 5(b) разные.

Пусть теперь P — это прямая призма высоты



(b) Симплекс S

Рис.5 Переход от данных на треугольнике T к данным на симплексе S

h , построенная на треугольнике T , и пусть $\sigma_{1,2,3}$ — ее боковые грани, построенные на сторонах M_1M_2 , M_2M_3 и M_3M_1 , а σ_4 — ее верхняя грань. Пусть на входящих гранях σ_1 и σ_3 плотность загрязняющей аэрозольной субстанции постоянна и равна ρ на σ_1 и 2ρ на σ_3 , а на верхней грани σ_4 плотность нулевая.

Пусть P' — прямая призма, построенная на симплексе S . При имеющихся данных рассчитаем среднюю объемную плотность $\rho_{P'}$. Для вычисления объемов потоков Ω'_i , воспользуемся формулами, полученными в [14]:

$$\Omega'_1 = \frac{b'_1 + b'_2}{2} h, \quad (23)$$

$$\Omega'_2 = -\left(\frac{a'_2 + a'_3}{2} + \frac{b'_2 + b'_3}{2}\right)h, \quad (24)$$

$$\Omega'_3 = \frac{a'_1 + a'_3}{2} h, \quad (25)$$

$$\Omega'_4 = -\left(\frac{a'_1 - a'_2}{2} + \frac{b'_1 + b'_3}{2}\right)h, \quad (26)$$

здесь Ω'_i — объем, проходящий через грань σ'_i , а (a'_i, b'_i) — координаты вектора v'_i . Получим:

$$\begin{aligned} \Omega'_1 &= \frac{21}{36}h, \quad \Omega'_2 = -\frac{22}{36}h, \quad \Omega'_3 = \frac{15}{36}h, \\ \Omega'_4 &= -\frac{14}{36}h. \end{aligned} \quad (27)$$

Применим формулы (9):

$$\rho_P' = \frac{\Omega'_1 \rho + \Omega'_3 2\rho}{\Omega'_1 + \Omega'_3} = \frac{41}{36}\rho. \quad (28)$$

Согласно теореме 2, средняя объемная плотность внутри призмы является аффинным инвариантом. Поэтому ρ_P имеет то же значение:

$$\rho_P = \frac{41}{36}\rho. \quad (29)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, П. С. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры / П. С. Александров. — М.: Наука, 1968. — 912 с.
2. Белихов, А. Б. Современные компьютерные модели распространения загрязняющих веществ в атмосфере / А. В. Белихов, Д. Л. Леготин, А. К. Сухов // Вестник КГУ. — 2013. — № 1. — С. 14–19.
3. Берлянд, М. Е. Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы / М. Е. Берлянд. — Л.: Гидрометеоиздат, 1975. — 448 с.
4. Берлянд, М. Е. Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы / М. Е. Берлянд. — Л.: Гидрометеоиздат, 1985. — 271 с.
5. Власова Е. А., Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. Приближенные методы математической физики: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. - 700 с
6. Ибрагимов, Н.Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Классические и новые методы. Нелинейные математические модели. Симметрия и принципы инвариантности: учебник.— М. : Физматлит, 2012. — 330 с.
7. Калиткин, Н. Н. Численные методы: учеб. пособие / Н. Н. Калиткин. — 2-е изд., исправленное. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 586 с.: ил. — (Учебная литература для вузов).
8. Марчук, Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Г. И. Марчук. — М.: Наука, 1982. — 320 с.
9. Мартинсон, Л. К., Малов, Ю. И. Дифференциальные уравнения математической физики / Л. К. Мартинсон, Ю. И. Малов. — М.: Изд-во МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2006. — 367 с.
10. Ольшанский, М. А. Анализ многосеточного метода для уравнений конвекции-диффузии с краевыми условиями Дирихле / М. А. Ольшанский // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2004. — Т. 44, № 8. — С. 1450–1479.
11. Постников М.М. Лекции по геометрии. Часть 1, Учебное пособие, — М.: Наука, 1979. — 336 с.
12. Тарко, А. М. Антропогенные изменения глобальных биосферных процессов. Математическое моделирование: Учебник / А.М. Тарко – 2005. – 232 с.
13. Черемухина, Е. Е., Линии тока линейно интерполированного векторного поля / Е. Е. Черемухина, В. Г. Мосин // Научное обозрение. — 2015. — № 20. — С. 162–165.
14. Черемухина, Е. Е. Линейно интерполированное векторное поле и выполнение условий соленоидальности / Е. Е. Черемухина, В. Г. Мосин // Международный научно-исследовательский журнал. — 2015. — № 11(42), часть 3. — С. 38–43.
15. Черемухина, Е. Е. Средняя объемная плотность аэрозольной субстанции в задаче конвективного переноса / Е. Е. Черемухина, В. Г. Мосин // Международный научно-исследовательский журнал. — 2016. — № 4(46), часть 6. — С. 137–142.

REFERENCES

1. Aleksandrov, P. S. Lekcii po analiticheskoi geometrii, popolnennye neobho-dimymi svedenijami iz algebry [Lectures on analytical geometry, supplemented by essential materials from algebra]— M.: Nauka, 1968. — 912 p.
2. Belihov, A. B. Sovremennye kompjuternye modeli rasprostranenija zagrjaznja-jushhih veshhestv v atmosfere [Modern computer models of the spread of pollutants in the atmosphere] Vestnik KGU. — 2013. — № 1. — P. 14–19.
3. Berljand, M. E. Sovremennye problemy atmosfernoj diffuzii i zagrjaznenija atmosfery [Modern problems of atmospheric diffusion and air pollution]. — L.: Gidrometeoizdat, 1975. — 448 p.
4. Berljand, M. E. Prognoz i regulirovanie zagrjaznenija atmosfery [Prediction and control of atmospheric pollution]—L.: Gidrometeoizdat, 1985. — 271 p.
5. Vlasova E. A., Zarubin V. S., Kuvyrkin G. N. Priblizhennye metody matematicheskoy fiziki: Ucheb. dlja vuzov / [Approximate methods of mathematical physics]. — M.: Izd-vo MGTU im. N.Je. Baumana, 2001. - 700 p.
6. Ibragimov, N.H. Prakticheskij kurs differencial'nyh uravnenij i matematicheskogo modelirovaniya. Klassicheskie i novye metody. Nelinejnye matematicheskie modeli. Simmetrija i principy invariantnosti: uchebnik [Practical Course of differential equations and mathematical modeling. Classic and new methods. Non-linear mathematical model. Symmetry and invariance principles].— M. : Fizmatlit, 2012. — 330 p.
7. Kalitkin, N. N. Chislennye metody: ucheb. posobie / N. N. Kalitkin. — 2-e izd., ispravленное [Numerical methods]. — SPb.: BHV-Peterburg, 2011. — 586 p.
8. Marchuk, G. I. Matematicheskoe modelirovaniye v probleme okruzhajushhej sredy [Mathematical modeling in environmental problem] — M.: Nauka, 1982. — 320 p.
9. Martinson, L. K., Malov, Ju. I. Differencial'nye uravnenija matematicheskoy fiziki / L. K. Martinson, Ju. I. Malov. — M.: Izd-vo MGTU imeni N. Je. Bau-mana, 2006. — 367 p.
10. Ol'shanskij, M. A. Analiz mnogosetochnogo metoda dlja uravnenij konvekci-diffuzii s kraevymi uslovi-jami Dirihle [An analysis of the multigrid method for convection-diffusion equation with boundary conditions of the Dirichlet]. — 2004. — T. 44, № 8. — P. 1450–1479
11. Postnikov M.M. Lekcii po geometrii. Chast' 1, Uchebnoe posobie, [Lectures on Geometry] — M.: Nauka, 1979. — 336 p.
12. Tarko A. M. Antropogennye izmenenija global'nyh bio-sferynh processov : Matematicheskoe modelirovaniye: Uchebnik [Anthropogenic changes of global biospheric processes] / A.M. Tarko – 2005. – 232 p.
13. Cheymuhina, E. E., Mosin V. G. [Current lines of a linearly interpolated vector field] Linii toka linejno interpolirovannogo vektornogo polja, E. E. Cherjomuhina, V. G. Mosin, Nauchnoe obozrenie. — 2015. — № 20. — S. 162–165.
14. Cheryomuhina E. E., Mosin V. G. [Linear interpolation of the vector field and the condition solenoidality] Linejno interpolirovannoe vektornoe pole i vypolnenie uslovija solenoidal'nosti E. E. Cherjomuhina, V. G. Mosin, Mezhdunarodnyj nauchno-issledovatel'skij zhurnal. — 2015. — № 11. – pp. 38-43.
15. Cheryomuhina E. E., Mosin V. G. [Average bulk density of the aerosol substance in the problem of convective diffusion] Srednjaja ob'emnaja plotnost' ajerozol'noj substancii v zadache konvektivnogo perenosa , E. E. Cherjomuhina, V. G. Mosin, Mezhdunarodnyj nauchno-issledovatel'skij zhurnal. — 2016. — № 4. – pp. 137–142.

Поступило в редакцию 26.03.2016
Received 26 April 2016