

## МАТЕМАТИКА

УДК 51-74

ИНВАРИАНТЫ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ЗАДАЧЕ  
КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕНОСАINVARIANTS OF AFFINE TRANSFORMATIONS  
IN THE CONVECTIVE TRANSFER PROBLEM

Черёмухина Евангелина Евгеньевна,

магистрант, e-mail: evangelinas@list.ru

Cheryomukhina Evangelina E., master

Мосин Владимир Геннадьевич,

к.ф.-м.н, доцент, e-mail: yanbacha@yandex.ru

Mosin Vladimir G., C. Sc. (Physic&amp;Mathematic), Associate Professor

Самарский государственный архитектурно-строительный университет, 443001 Молодогвадейская ул., 194, Самара, Самарская обл.

Samara State University of Architecture and Civil Engineering (SSUACE), 443001, Molodogvadeyskaya St 194, Samara, Russia

**Аннотация:** Показано, что если двумерное векторное поле является линейной интерполяцией значений в вершинах невырожденного треугольника, то любое аффинное преобразование сохраняет 1) направления его потоков через стороны и 2) среднюю объемную плотность переносимой субстанции внутри прямой призмы, построенной на этом треугольнике. Введено понятие стандартизирующего аффинного преобразования, позволяющего свести задачу к случаю единичного двумерного симплекса.

**Abstract:** Let there is a nonsingular triangle. Let the two-dimensional vector field be linear interpolation of values in the vertex of this triangle. Then any affine transformation saves: 1) the stream direction across triangle sides; 2) the average volume density of substation into a right triangular prism. The definition of standardize affine transformation is given. The example is considered.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, конвективный перенос, аффинные преобразования, инварианты, линейная интерполяция.

**Keywords:** mathematical modeling, convection transfer, affine transformation, invariants, linear interpolation.

Решение задачи конвективного массопереноса играет важную роль в оценке и прогнозировании экологического состояния воздушного бассейна. Исследования в этой области носят, как правило, комплексный характер (см. [3], [4], [8]) и включают, помимо чисто технических решений, применение различных математических моделей распространения и рассеяния загрязняющих веществ в атмосферном воздухе. Широко известные математические модели конвекции-диффузии обладают локальным масштабом применения (см. [2], [3]). Они вполне уместны при изучении отдельных источников загрязнения, однако, для описания макромасштабных эффектов распространения воздушных примесей и их роли в глобальных экологических процессах они, к сожалению, неприменимы. Один из подходов к изучению макромасштабных ситуаций состоит в следующем. Допустим, на интересующей нас территории расположены  $n$  станций метеонаблюдения  $M_1, \dots, M_n$ , которые фиксируют значения ветрового потока  $v_1, \dots, v_n$ . Пусть везде на границе выпуклой оболочки точек  $M_i$  плотность загрязняющей аэрозольной

субстанции известна и постоянна по времени и по линейным участкам границы. Если триангулировать набор точек  $M_i$  и последовательно перебирать треугольники триангуляции, то, преобразуя плоскость, можно вычислить среднюю плотность загрязняющей субстанции на каждом из треугольников подобно тому, как это делается в [15] на единичном двумерном симплексе. При этом весьма актуальными оказываются вопросы инвариантности основных характеристик конвективного атмосферного массопереноса: 1) направления потока  $v(x,y)$  относительно ребер триангуляции и 2) средней плотности загрязняющей субстанции на треугольнике.

## 1 Постановка задачи

Пусть  $T$  — невырожденный треугольник с вершинами  $M_i(x_i, y_i)$ , и пусть в его вершинах заданы векторы  $v_i$ . Линейно интерполируя значения векторов, можно получить векторное поле  $v(x,y)$ , определенное на треугольнике  $T$ , подобно тому, как это делается в [13] на единичном двумерном

симплексе.

Рассмотрим прямую призму  $P$  высоты  $h$ , построенную на треугольнике  $T$ . Пусть  $v(x,y)$  означает поле скорости воздушного потока, проходящего через призму  $P$ , а нижняя грань призмы, определяемая условием  $z = 0$ , означает поверхность земли. Тогда для того, чтобы поле  $v(x,y)$  подчинялось условию соленоидальности, необходимо расширить его до трехмерного поля  $w(x,y,z)$ , причем, как было показано в [14], это можно сделать следующим образом:

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \end{pmatrix},$$

$$w(x,y) = \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \\ \alpha z \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где коэффициент  $\alpha$  определяется, исходя из закона сохранения массы в интегральной форме:

$$\sum_{i=0}^4 \iint_{\sigma_i} w d\sigma = 0, \quad (2)$$

Здесь  $\sigma_{0,4}$  означают соответственно нижнюю и верхнюю грани призмы  $P$ , а  $\sigma_{1,2,3}$  — ее боковые грани.

Допустим, на гранях призмы  $P$  известна объемная плотность  $\rho(x,y,z)$  загрязняющей аэрозольной субстанции, причем:

$$\rho(x,y,z) = \rho_i, \quad \forall (x,y,z) \in \sigma_i, \quad i \neq 4, \quad (3)$$

$$\rho(x,y,z) = 0 \quad \forall (x,y,z) \in \sigma_4 \quad (4)$$

Допустим также, что треугольник  $T$  непротиворечив в смысле следующего определения.

**Определение 1.** Обозначим  $n_1$  единичный вектор внутренней нормали к стороне  $M_1M_2$  треугольника  $T$ . Будем говорить, что сторона  $M_1M_2$  непротиворечива, если скалярные произведения

$(v_1; n_1)$  и  $(v_2; n_1)$  имеют одинаковый знак. Если  $(v_i; n_1) \geq 0$ , мы будем называть поток воздуха, проходящий через грань призмы  $P$ , построенную на стороне  $M_1M_2$ , входящим, а если  $(v_i; n_1) \leq 0$ , будем называть поток исходящим.

Аналогично определим непротиворечивость других сторон треугольника  $T$ . В целом, треугольник  $T$  будем называть непротиворечивым, если непротиворечивы все его стороны. Если противоречива хотя бы одна из его сторон, будем говорить, что треугольник  $T$  противоречив. Теперь, если треугольник  $T$  непротиворечив, а поле  $w$  и плотность  $\rho$  не зависят от времени, то среднюю объемную плотность  $\rho_P$  загрязняющей субстанции внутри призмы  $P$  можно рассчитать, как отношение объемов:

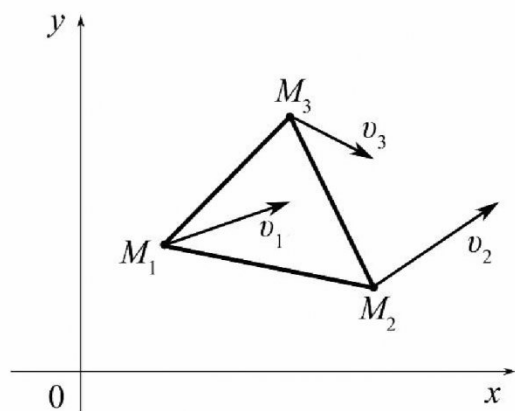
$$\rho_P = \frac{\sum_{i=1}^3 \delta_i \rho_i \Omega_i}{\sum_{i=1}^4 \delta_i \Omega_i}, \quad (5)$$

где  $\Omega_{1,2,3}$  — объемы воздушных потоков, проходящих за единицу времени через боковые грани призмы  $P$ ,  $\Omega_4$  — объем, проходящий через ее верхнюю грань, а коэффициенты  $\delta_i$  равны 1 для входящих потоков, и 0 для исходящих. В настоящей работе мы изучим аффинные инварианты задачи конвективного переноса, в частности, покажем, что задачу конвективного переноса на произвольном треугольнике  $T$  можно свести к задаче конвективного переноса на двумерном единичном симплексе  $S$ .

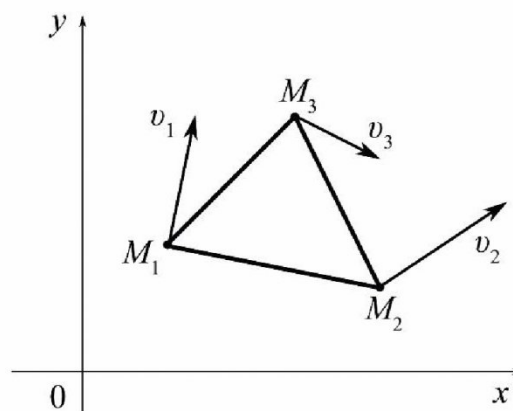
## 2 Инварианты непротиворечивости

**Теорема 1** Под действием аффинного преобразования непротиворечивый треугольник переходит в непротиворечивый треугольник, при этом входящие потоки остаются входящими, а исходящие потоки — исходящими.

**Доказательство.** Для любых двух невырож-



(а) Непротиворечивый треугольник. Стороны  $M_1M_2$  и  $M_3M_1$  обладают входящими потоками, сторона  $M_2M_3$  исходящим



(б) Противоречивый треугольник. Сторона  $M_1M_2$  обладает входящим потоком, сторона  $M_2M_3$  — исходящим, сторона  $M_3M_1$  — противоречива

Рис.1 Отсутствие и наличие противоречий

денных треугольников  $T$  и  $T'$  существует единственное аффинное преобразование  $\phi$ , переводящее  $T$  в  $T'$ .

$$\phi: T(M_1, M_2, M_3) \rightarrow T'(M'_1, M'_2, M'_3). \quad (6)$$

Рассмотрим сторону  $M_1M_2$  треугольника  $T$ . Прямая  $M_1M_2$  разбивает плоскость на две полуплоскости:

$$\Pi = \Pi_+ \cup \Pi_-, \quad M_3 \in \Pi_+, \quad M_3 \notin \Pi_-, \quad (7)$$

где  $\Pi_+$  означает полуплоскость, содержащую точку  $M_3$ , а  $\Pi_-$  означает противоположную полуплоскость. Точно так же, прямая  $M'_1M'_2$  разбивает плоскость на две полуплоскости:

$$\Pi' = \Pi'_+ \cup \Pi'_-, \quad M'_3 \in \Pi'_+, \quad M'_3 \notin \Pi'_-, \quad (8)$$

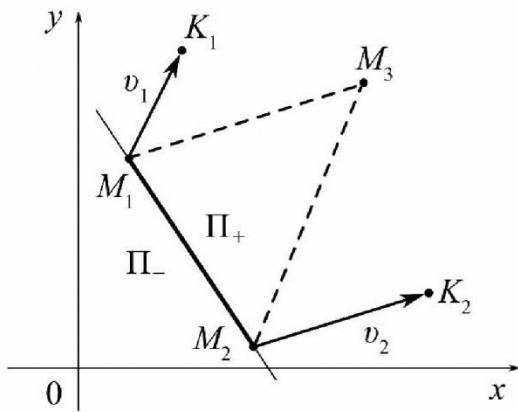
с теми же замечаниями относительно принадлежности точки  $M'_3$ .

На плоскости  $\Pi$  обозначим  $K_1$  точку, которая получается из точки  $M_1$  смещением на вектор  $v_1$ , и  $K_2$  точку, которая получается из точки  $M_2$  смещением на вектор  $v_2$ . Аналогичные обозначения вве-

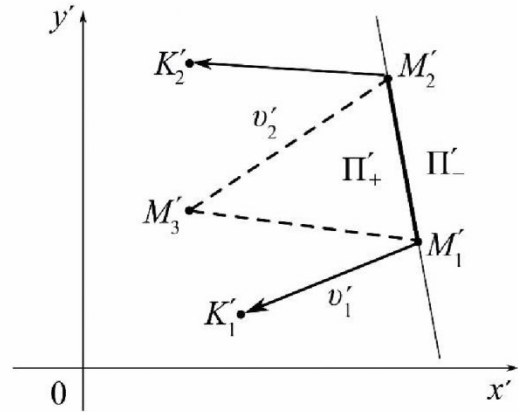
дем на плоскости  $\Pi'$ .

Рассмотрим сначала общую ситуацию, когда обе точки  $K_1$  и  $K_2$  не лежат на прямой  $M_1M_2$  (см. рис. 2). В этом случае, так как треугольник  $T$  непротиворечив, то, в силу определения 1, точки  $K_1$  и  $K_2$  принадлежат одной полуплоскости:  $K_1, K_2 \in \Pi_+$  или  $K_1, K_2 \in \Pi_-$ . Пусть выполняется первое из этих условий. Тогда  $K_1, M_3 \in \Pi_+$ , откуда, в силу того, что принадлежность двух точек одной полуплоскости является аффинным инвариантом, следует, что  $K'_1, M'_3 \in \Pi'_+$ . Точно так же,  $K_2, M_3 \in \Pi_+$ , откуда  $K'_2, M'_3 \in \Pi'_+$ .

Сопоставляя последние принадлежности, заключаем, что  $K'_1, M'_2 \in \Pi'_+$ , то есть, под действием аффинного преобразования  $\phi$  непротиворечивая сторона  $M_1M_2$  треугольника  $T$  переходит в непротиворечивую сторону  $M'_1M'_2$  треугольника  $T'$ , причем объем потока  $\Omega_1$ , проходящего через сторону  $M_1M_2$  является положительным, и объем потока  $\Omega'_1$ , проходящего через сторону  $M'_1M'_2$ , также положителен.

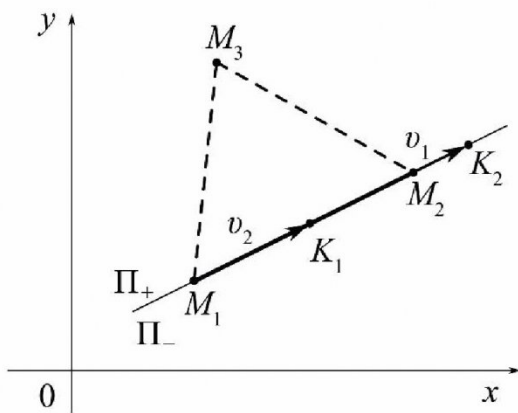


(a) Треугольник  $T$

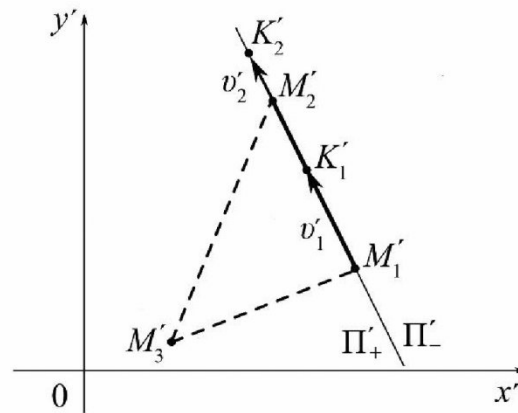


(b) Треугольник  $T'$

Рис. 2 Обе точки  $K_1$  и  $K_2$  лежат вне прямой  $M_1M_2$



(a) Треугольник  $T$



(b) Треугольник  $T'$

Рис. 3 Обе точки  $K_1$  и  $K_2$  лежат на прямой  $M_1M_2$

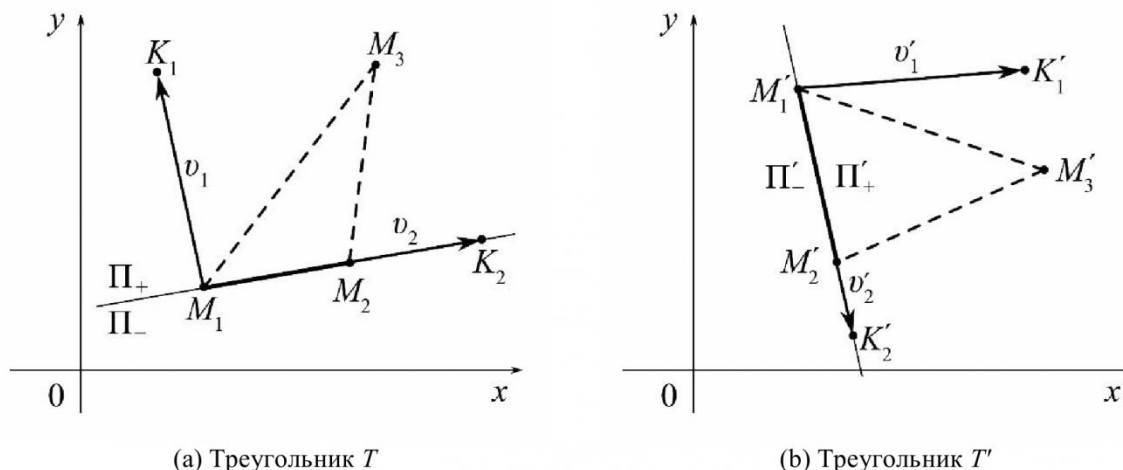


Рис. 4 Точка  $K_1$  лежит вне прямой  $M_1M_2$ ; точка  $K_2$  лежит на  $M_1M_2$

Если же  $K_1, K_2 \in \Pi$ , то аналогичные рассуждения показывают, что непротиворечивая сторона  $M_1M_2$  треугольника  $T$  переходит в непротиворечивую сторону  $M'_1M'_2$  треугольника  $T'$ , но при этом объем потока  $\Omega_1$ , проходящего через сторону  $M_1M_2$  является отрицательным, и объем потока  $\Omega'_1$ , проходящего через сторону  $M'_1M'_2$  также является отрицательным.

Перейдем теперь к частным ситуациям.

Пусть точки  $K_1, K_2$  лежат на прямой  $M_1M_2$  (см. рис. 3). В силу того, что принадлежность точки прямой является аффинным инвариантом, это означает, что точки  $K'_1$  и  $K'_2$  лежат на прямой  $M'_1M'_2$ . Следовательно, и в этом случае после аффинного преобразования  $\phi$  непротиворечивая сторона  $M_1M_2$  треугольника  $T$  переходит в непротиворечивую сторону  $M'_1M'_2$  треугольника  $T'$ , причем, объемы потоков на них являются нулевыми:  $\Omega_1 = \Omega'_1 = 0$ .

Наконец, рассмотрим ситуацию, когда одна из точек  $K_1$  и  $K_2$  лежит на прямой  $M_1M_2$ , а вторая не лежит на ней (см. рис. 4). Пусть  $K_1 \notin M_1M_2, K_2 \in M_1M_2$ .

В силу аффинной инвариантности принадлежности точки прямой, из того, что  $K_1 \notin M_1M_2$ , следует, что  $K'_1 \notin M'_1M'_2$ , и, в силу тех же соображений, из того, что  $K_2 \in M_1M_2$ , следует, что  $K'_2 \in M'_1M'_2$ . Поэтому непротиворечивая сторона  $M_1M_2$  треугольника  $T$  переходит в непротиворечивую сторону  $M'_1M'_2$  треугольника  $T'$ . Допустим, что  $K_1 \in \Pi_+$ . Тогда  $K_1, M_3 \in \Pi_+$ , откуда, в силу аффинной инвариантности принадлежности двух точек одной полуплоскости,  $K'_1, M'_3 \in \Pi_+$ , то есть,  $K'_1 \in \Pi_+$ . При этом объем  $\Omega_1$  потока, проходящего через сторону  $M_1M_2$  является положительным, и объем  $\Omega'_1$  потока, проходящего через сторону  $M'_1M'_2$  также является положительным. Если же  $K_1 \in \Pi_-$ , то аналогичные рассуждения приводят к тем же выводам, но объемы обоих потоков в этом случае будут отрицательны. Понятно, что ситуация  $K_1 \in M_1M_2, K_2 \notin M_1M_2$  отличается от рассмотренной

лишь обозначениями.

Итак, для любого взаимного расположения точек  $M_1, M_2, K_1$  и  $K_2$  под действием аффинного преобразования  $\phi$  непротиворечивая сторона  $M_1M_2$  треугольника  $T$  переходит в непротиворечивую сторону  $M'_1M'_2$  треугольника  $T'$ , при этом входящий поток переходит во входящий, а исходящий в исходящий. Применяя те же рассуждения к сторонам  $M_2M_3$  и  $M_3M_1$ , получим требуемое. Теорема доказана.

### 3 Инвариантность объемной плотности

Пусть  $\phi$  — аффинное преобразование плоскости, переводящее треугольник  $T$  в треугольник  $T'$ , пусть  $\psi$  — его трехмерное расширение, определяемое условием  $z' = z$ , и пусть  $P'$  — прямая призма, в которую переходит призма  $P$  под действием преобразования  $\psi$ . Пусть на границе призмы  $P$  известны значения объемной плотности загрязняющей аэрозольной субстанции, заданные условиями (3)–(4), и пусть треугольник  $T$  непротиворечив. Тогда справедлива следующая теорема.

**Теорема 2** Средняя объемная плотность загрязняющей субстанции не изменяется под действием расширенного аффинного преобразования.

**Доказательство.** Средняя объемная плотность внутри призмы  $P'$  вычисляется аналогично (5) как отношение объемов:

$$\rho'_P = \frac{\sum_{i=1}^3 \delta'_i \rho_i \Omega'_i}{\sum_{i=1}^4 \delta'_i \Omega'_i}. \quad (9)$$

В силу теоремы 1, входящие потоки остаются входящими, а исходящие остаются исходящими. Поэтому

$$\delta'_i = \delta_i. \quad (10)$$

Кроме того, аффинные преобразования сохраняют отношения объемов. Поэтому коэффициенты при  $\rho_i$  в (9) равны коэффициентам при  $\rho_i$  в (5), и, следовательно

$$\rho_P' = \rho_P. \tag{11}$$

Теорема доказана.

**4 Стандартизирующее преобразование**

**Определение 2** Стандартизирующим аффинным преобразованием будем называть аффинное преобразование, переводящее треугольник  $T$  в двумерный единичный симплекс.

**Теорема 3** Пусть невырожденный треугольник  $T$  обладает вершинами  $M_i(x_i, y_i)$ . Тогда стандартизирующее аффинное преобразование задается следующей заменой:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

**Доказательство.** Пусть  $\Delta$  означает следующий определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Так как треугольник  $T$  является невырожденным, то  $\Delta \neq 0$ , поэтому преобразование (12) обладает обратным преобразованием:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Из (14) видно, что  $M_1 \rightarrow (0,0)$ . Покажем, что  $M_2 \rightarrow (1,0)$ . Действительно, подставляя координаты  $M_2$  в правую часть, получим:

$$\begin{aligned} \phi(M_2) &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & -(x_3 - x_1) \\ -(y_2 - y_1) & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = v_3' = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1/\Delta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Аналогично,  $M_3 \rightarrow (0,1)$ . Теорема доказана.

**Пример 1** Пусть в вершинах  $M_i$  треугольника  $T$  заданы векторы  $v_i$ :

$$\begin{aligned} M_1(2;3), \quad v_1(3;1), \\ M_2(7;2), \quad v_2(3;2), \\ M_3(5;6), \quad v_3(2;-1). \end{aligned} \tag{16}$$

Пользуясь (12), запишем стандартизирующее аффинное преобразование:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Согласно теореме 3, под действием этого преобразования, вершины  $M_i$  переходят в вершины единичного симплекса:

$$M_1'(0;0), \quad M_2'(1;0), \quad M_3'(0;1). \tag{18}$$

Для вычисления векторов  $v_i'$  воспользуемся матрицей стандартизирующего преобразования. Так как

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

то

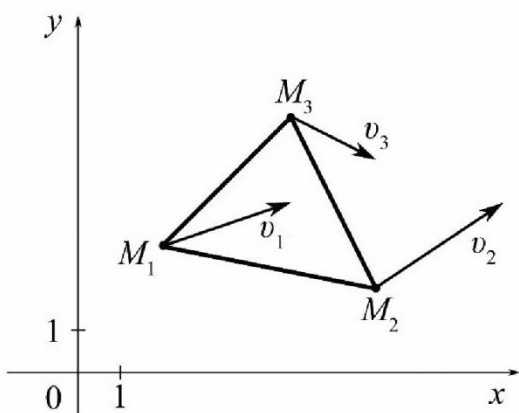
$$v_1' = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/9 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$v_2' = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 13/18 \end{pmatrix} \tag{21}$$

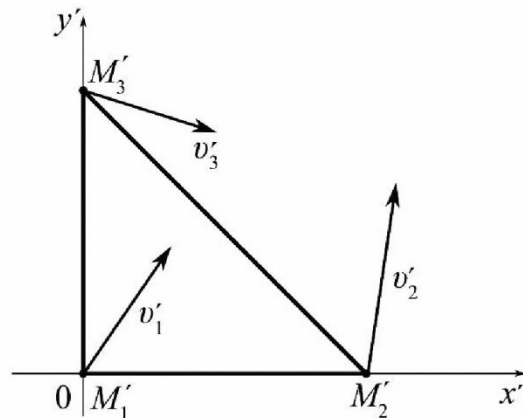
$$v_3' = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/6 \end{pmatrix} \tag{22}$$

Результат преобразования проиллюстрирован рисунком 5. Единицы масштаба на иллюстрациях 5(a) и 5(b) разные.

Пусть теперь  $P$  — это прямая призма высоты



(a) Треугольник  $T$



(b) Симплекс  $S$

Рис.5 Переход от данных на треугольнике  $T$  к данным на симплексе  $S$

$h$ , построенная на треугольнике  $T$ , и пусть  $\sigma_{1,2,3}$  — ее боковые грани, построенные на сторонах  $M_1M_2$ ,  $M_2M_3$  и  $M_3M_1$ , а  $\sigma_4$  — ее верхняя грань. Пусть на входящих гранях  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  плотность загрязняющей аэрозольной субстанции постоянна и равна  $\rho$  на  $\sigma_1$  и  $2\rho$  на  $\sigma_3$ , а на верхней грани  $\sigma_4$  плотность нулевая.

Пусть  $P'$  — прямая призма, построенная на симплексе  $S$ . При имеющихся данных рассчитаем среднюю объемную плотность  $\rho_{P'}$ . Для вычисления объемов потоков  $\Omega'_i$ , воспользуемся формулами, полученными в [14]:

$$\Omega'_1 = \frac{b'_1 + b'_2}{2} h, \quad (23)$$

$$\Omega'_2 = -\left(\frac{a'_2 + a'_3}{2} + \frac{b'_2 + b'_3}{2}\right) h, \quad (24)$$

$$\Omega'_3 = \frac{a'_1 + a'_3}{2} h, \quad (25)$$

$$\Omega'_4 = -\left(\frac{a'_1 - a'_2}{2} + \frac{b'_1 + b'_3}{2}\right) h, \quad (26)$$

здесь  $\Omega'_i$  — объем, проходящий через грань  $\sigma'_i$ , а  $(a'_i, b'_i)$  — координаты вектора  $v'_i$ . Получим:

$$\Omega'_1 = \frac{21}{36} h, \quad \Omega'_2 = -\frac{22}{36} h, \quad \Omega'_3 = \frac{15}{36} h, \quad (27)$$

$$\Omega'_4 = -\frac{14}{36} h.$$

Применим формулы (9):

$$\rho_{P'} = \frac{\Omega'_1 \rho + \Omega'_3 2\rho}{\Omega'_1 + \Omega'_3} = \frac{41}{36} \rho. \quad (28)$$

Согласно теореме 2, средняя объемная плотность внутри призмы является аффинным инвариантом. Поэтому  $\rho_P$  имеет то же значение:

$$\rho_P = \frac{41}{36} \rho. \quad (29)$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, П. С. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры / П. С. Александров. — М.: Наука, 1968. — 912 с.
2. Белихов, А. Б. Современные компьютерные модели распространения загрязняющих веществ в атмосфере / А. В. Белихов, Д. Л. Леготин, А. К. Сухов // Вестник КГУ. — 2013. — № 1. — С. 14–19.
3. Берлянд, М. Е. Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы / М. Е. Берлянд. — Л.: Гидрометеоздат, 1975. — 448 с.
4. Берлянд, М. Е. Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы / М. Е. Берлянд. — Л.: Гидрометеоздат, 1985. — 271 с.
5. Власова Е. А., Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. Приближенные методы математической физики: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. - 700 с
6. Ибрагимов, Н.Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Классические и новые методы. Нелинейные математические модели. Симметрия и принципы инвариантности: учебник. — М.: Физматлит, 2012. — 330 с.
7. Калиткин, Н. Н. Численные методы: учеб. пособие / Н. Н. Калиткин. — 2-е изд., исправленное. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 586 с.: ил. — (Учебная литература для вузов).
8. Марчук, Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Г. И. Марчук. — М.: Наука, 1982. — 320 с.
9. Мартинсон, Л. К., Малов, Ю. И. Дифференциальные уравнения математической физики / Л. К. Мартинсон, Ю. И. Малов. — М.: Изд-во МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2006. — 367 с.
10. Ольшанский, М. А. Анализ многосеточного метода для уравнений конвекции-диффузии с крайевыми условиями Дирихле / М. А. Ольшанский // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2004. — Т. 44, № 8. — С. 1450–1479.
11. Постников М.М. Лекции по геометрии. Часть 1, Учебное пособие, — М.: Наука, 1979. — 336 с.
12. Тарко, А. М. Антропогенные изменения глобальных биосферных процессов. Математическое моделирование: Учебник / А.М. Тарко – 2005. – 232 с.
13. Черемухина, Е. Е., Линии тока линейно интерполированного векторного поля / Е. Е. Черемухина, В. Г. Мосин // Научное обозрение. — 2015. — № 20. — С. 162–165.
14. Черемухина, Е. Е. Линейно интерполированное векторное поле и выполнение условий солёности / Е. Е. Черемухина, В. Г. Мосин // Международный научно-исследовательский журнал. — 2015. — № 11(42), часть 3. — С. 38–43.
15. Черемухина, Е. Е. Средняя объемная плотность аэрозольной субстанции в задаче конвективного переноса / Е. Е. Черемухина, В. Г. Мосин // Международный научно-исследовательский журнал. — 2016. — № 4(46), часть 6. — С. 137–142.

## REFERENCES

1. Aleksandrov, P. S. Lekcii po analiticheskoj geometrii, popolnennye neobho-dimymi svedenijami iz algebr [Lectures on analytical geometry, supplemented by essential materials from algebra]— M.: Nauka, 1968. — 912 p.
2. Belihov, A. B. Sovremennye komp'juternye modeli rasprostraneniya zagrjaznja-jushhijh veshhestv v atmosfere [Modern computer models of the spread of pollutants in the atmosphere] Vestnik KGU. — 2013. — № 1. — P. 14–19.
3. Berljand, M. E. Sovremennye problemy atmosfernoj diffuzii i zagrjaznenija atmosfery [Modern problems of atmospheric diffusion and air pollution]. — L.: Gidrometeoizdat, 1975. — 448 p.
4. Berljand, M. E. Prognoz i regulirovanie zagrjaznenija atmosfery [Prediction and control of atmospheric pollution] —L.: Gidrometeoizdat, 1985. — 271 p.
5. Vlasova E. A., Zarubin V. S., Kuvyrkin G. N. Priblizhennye metody matematicheskoj fiziki: Ucheb. dlja vuzov / [Approximate methods of mathematical physics]. — M.: Izd-vo MGTU im. N.Je. Bauman, 2001. - 700 p.
6. Ibragimov, N.H. Prakticheskij kurs differencial'nyh uravnenij i matema-ticheskogo modelirovanija. Klassicheskie i novye metody. Nelinejnye matema-ticheskie modeli. Simmetrija i principy invariantnosti: uchebnik [Practical Course of differential equations and mathematical modeling. Classic and new methods. Non-linear mathematical model. Symmetry and invariance principles].— M. : Fizmatlit, 2012. — 330 p.
7. Kalitkin, N. N. Chislennye metody: ucheb. posobie / N. N. Kalitkin. — 2-e izd., ispravlennoe [Numerical methods]. — SPb.: BHV-Peterburg, 2011. — 586 p.
8. Marchuk, G. I. Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhajushhej sredy [Mathematical modeling in environmental problem] — M.: Nauka, 1982. — 320 p.
9. Martinson, L. K., Malov, Ju. I. Differencial'nye uravnenija matematicheskoj fiziki / L. K. Martinson, Ju. I. Malov. — M.: Izd-vo MGTU imeni N. Je. Bau-mana, 2006. — 367 p.
10. Ol'shanskij, M. A. Analiz mnogosetochnogo metoda dlja uravnenij konvekcii-diffuzii s kraevymi uslovi-jami Dirihle [An analysis of the multigrid method for convection-diffusion equation with boundary conditions of the Dirichlet]. — 2004. — T. 44, № 8. — P. 1450–1479
11. Postnikov M.M. Lekcii po geometrii. Chast' 1, Uchebnoe posobie, [Lectures on Geometry] — M.: Nauka, 1979. — 336 p.
12. Tarko A. M. Antropogennye izmeneniya global'nyh bio-sfernyh processov : Matematicheskoe modelirovanie: Uchebnik [Anthropogenic changes of global biospheric processes] / A.M. Tarko – 2005. – 232 p.
13. Cheryomuhina, E. E., Mosin V. G. [Current lines of a linearly interpolated vector field] Linii toka linejno interpolirovannogo vektornogo polja, E. E. Cheryomuhina, V. G. Mosin, Nauchnoe obozrenie. — 2015. — № 20. — S. 162–165.
14. Cheryomuhina E. E., Mosin V. G. [Linear interpolation of the vector field and the condition solenoidality] Linejno interpolirovannoe vektornoe pole i vypolnenie uslovija solenoidal'nosti E. E. Cheryomuhina, V. G. Mosin, Mezhdunarodnyj nauchno-issledovatel'skij zhurnal. – 2015. – № 11. – pp. 38–43.
15. Cheryomuhina E. E., Mosin V. G. [Average bulk density of the aerosol substance in the problem of convective diffusion] Srednjaja ob#emnaja plotnost' ajerozol'noj substancii v zadache konvektivnogo perenosa , E. E. Cheryomuhina, V. G. Mosin, Mezhdunarodnyj nauchno-issledovatel'skij zhurnal. – 2016. – № 4. – pp. 137–142.

Поступило в редакцию 26.03.2016

Received 26 April 2016