

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

УДК 622.822.2: 622.271: 519.6

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФОРМЫ СЕЧЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА ТОКА КАК РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГЕОЭЛЕКТРИКИ

RESTORE THE SHAPE OF THE CROSS SECTION OF THE CYLINDRICAL CURRENT SOURCE AS THE SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM OF GEOFISICS

Сирота Дмитрий Юрьевич,
кандидат техн. наук, доцент, e-mail: dmsirota@yandex.ru
Dmitriy Yu. Sirota, C. Sc. (Engineering), Associate Professor

Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева, 650000, Россия,
г. Кемерово, ул. Весенняя, 28

T.F. Gorbachev Kuzbass State Technical University, 28 street Vesennaya, Kemerovo, 650000, Russian Federation

Аннотация

Актуальность работы. Одной из многочисленных целей интерпретации геофизических данных является восстановление формы источника естественного (электрического, теплового, магнитного, гравитационного) поля участка земли. Как известно, эта задача может быть сведена к решению интегрального уравнения Урысона 1-го рода. В отличии от линейных (fredholmовых) интегральных уравнений 1-го рода (на базе метода регуляризации А.Н. Тихонова) в настоящее время пока что не существует завершённой теории решения такого сорта уравнений. Поэтому рассмотрение различных численных вариантов и попыток применения метода А.Н. Тихонова к таким интегральным уравнениям несомненно является интересным и актуальным.

Цель работы. Разработка численного алгоритма и его программной реализации для решения обратной задачи восстановления формы сечения цилиндрического источника электрического поля по измеренным значениям потенциала на дневной поверхности.

Методы исследования. Методы математической физики – для формулировки задачи восстановления формы источника, как некорректной задачи решения интегрального уравнения 1-го рода.

Методы математического программирования – для формирования численной расчётовой схемы приближённого последовательного восстановления формы источника поля.

Результаты. Произведён расчёт величины потенциала электрического поля, порождённого тестовой областью цилиндрической формы с эллиптическим сечением, расположенным в трёхслойной среде. Используя полученные значения, решена обратная некорректная задача восстановления формы сечения источника электрического поля, как решение интегрального уравнения Фредгольма – Урысона 1-го рода. Проведён сравнительный анализ формы и результатов расчёта прямой задачи от точно заданной и приближённо найденной области.

Abstract

The urgency of the discussed issue. One of the many purposes of the interpretation of geophysical data is the recovery of the natural source (electrical, thermal, magnetic, gravitational) fields of land. As is known, this problem can be reduced to solution of integral equations of Uryson 1-St kind. Unlike linear (fredholmian) integral equations of the 1st kind (based on the method of regularization A. N. Tikhonov) at present there is no complete theory for solving this kind of equations. Therefore, a review of various numerical options and attempts of application of the method A. N. Tikhonov such integral equations is undoubtedly interesting and relevant.

The main aim of study. Development of numerical algorithm and its software implementation to solve the inverse problem of restoring the shape of the cross section of the cylindrical source of the electric field on the measured values of the potential on the surface.

The methods used in the study Methods of mathematical physics for the formulation of the problem of restoring the shape of the source as ill-posed problems solutions of integral equations of the 1st kind.

Methods of mathematical programming – to generate the numerical calculation scheme of approximate se-

quential restoration of the shape of the field source.

The results. The calculation of the magnitude of the electric field potential generated by the test area of cylindrical shape with an elliptical cross section, suggested in a three-layer environment. Using the obtained values, the reverse is not solved-posed problems of restoring the shape of the cross section of the source electric field as the solution of integral equations of Fredholm – Uryson 1-St kind. Conducted a comparative analysis of the form and results of the calculation of the direct problem from precisely specified and blajenno found region.

Ключевые слова. Нелинейная некорректная обратная задача, интегральное уравнение Урысона 1-го рода, метод регуляризации А.Н. Тихонова, интерпретация геофизических данных.

Key words. Ill-posed nonlinear inverse problem, integral equation of Uryson-1 of the first kind, the method of regularization A. N. Tikhonov, interpretation of geophysical data

Введение. Определение формы и размеров источников полей различной природы (электрической, гравитационной, тепловой, магнитной или другой) является актуальной для задач сейсмики, электро-, магнито- и гравиразведки [1 – 3].

С точки зрения прикладной математики все эти задачи являются обратными и некорректными [4 – 7]. Большинство существующих теоретических методов и численных алгоритмов посвящены в основном решению линейных обратных задач, то есть таких, где неизвестная функция является сомножителем какого-то известного выражения, характеризующего среду [8 – 13]. Разработке и тестированию алгоритмов решения нелинейных обратных задач посвящено гораздо меньше работ [14, 15].

Как известно задача по определению формы источника поля сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма – Урысона первого рода [15, 16]. В работах [17, 18] автором рассматривалась более простая задача восстановления формы и угла наклона плоского источника. В предложено статье рассматривается более сложная в смысле вычислений задача определения сечения конечного цилиндра. Отметим, что подобная задача рассматривалась в работе [19 и др.], где происходило восстановление сечения бесконечного цилиндра.

1. Постановка и решения прямой задачи.

Пусть электрическое поле естественной природы (ЕЭП) порождается горизонтальным цилиндрическим источником тока с произвольным, но постоянным сечением.

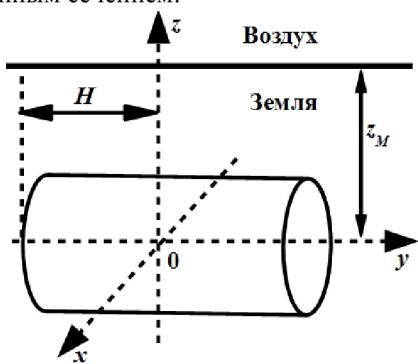


Рис 1. Схема вмещающего пространства и цилиндрического источника поля.

Пусть также известна длина этого источника и глубина залегания в нижнем слое двухслойного однородного изотропного пространства с плоско-параллельными границами. (рис. 1).

В этом случае потенциал точечного источника будет определяться известной формулой [20, 21]

$$U_M = \frac{C}{[x_M^2 + y_M^2 + z_M^2]^{1/2}}, \quad (1)$$

где C – коэффициент, характеризующий силу электрического тока источника; M – точка измерения потенциала поля на земной поверхности.

Для получения расчётной формулы величины потенциала цилиндра проинтегрируем выражение (1) по объёму цилиндра V_P :

$$U_M = C \int_{V_P} \frac{dV_P}{[(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2 + (z_P - z_M)^2]^{1/2}}, \quad (2)$$

где P – точка, расположенная в объёме цилиндра.

Перейдём в интегrale (2) к безразмерным переменным по общей формуле $w \cdot z_M^{-1} = \bar{w}$, где под w подразумеваются координаты точки измерения поля M и переменные интегрирования цилиндра P . Тогда (2) примет вид

$$\begin{aligned} U_M &= C \cdot z_M^2 \times \\ &\int \frac{d\bar{V}_P}{\bar{V}_P [(\bar{x}_P - \bar{x}_M)^2 + (\bar{y}_P - \bar{y}_M)^2 + (\bar{z}_P - 1)^2]^{1/2}} \\ &= C \cdot z_M^2 \cdot \bar{U}_M \end{aligned} \quad (3)$$

Далее для упрощения вида формул горизонтальную черту у безразмерных величин писать не будем. Проинтегрируем (3) по интервалу $y_P \in [-H; H]$:

$$\begin{aligned} U_M &= \iint_{S_p} \left[\int_{-H}^H \frac{dy_P}{[(y_P - y_M)^2 + D]^{1/2}} \right] dS_p = \\ &= \iint_{S_p} F(M, P) dS_p, \end{aligned} \quad (4)$$

где $F(M, P) = \ln(Q_1) - \ln(Q_2)$,

$$Q_1 = H - y_M + \sqrt{(H - y_M)^2 + D},$$

$$Q_2 = -H - y_M + \sqrt{(H + y_M)^2 + D},$$

$$D = (x_P - x_M)^2 + (z_P - 1)^2.$$

Для вычисления двойного интеграла определим границу области в виде функции $\rho(\phi)$ в полярной системе координат. Переход к последней производится стандартным способом: $x_P = r \cos \phi$, $y_P = r \sin \phi$, где $\phi \in [0; 2\pi]$ и $r \in [0; \rho(\phi)]$, где $\rho(\phi)$ – периодическая функция.

Тогда (4) примет вид

$$U_M = \iint_{S_P} F(M, P) dS_P = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\rho(\phi)} F(M, \phi, r) \cdot r dr \right] d\phi$$

Таким образом, задача определения формы источника поля по измерениям потенциала на дневной поверхности свелась к интегральному уравнению Фредгольма – Урысона 1-го рода (далее ИУ) относительно неизвестной функции $\rho(\phi)$:

$$\int_0^{2\pi} R(M, \rho(\phi)) d\phi = U^*, \quad (5)$$

где $R = \int_0^{\rho(\phi)} F(M, \phi, r) \cdot r dr$ – ядро нелинейного

вида; U^* – измеренные на дневной поверхности значения потенциала ЕЭП.

Формула (5) позволяет вычислить величину потенциала ЕЭП цилиндра в любой точке на поверхности земли. Далее для решения обратной задачи восстановления формы сечения цилиндра будем использовать только центральную ось симметрии $y_M = 0$.

2. Решение обратной задачи.

Для определения функции $\rho(\phi)$ рассмотрим задачу поиска минимума регуляризованного функционала А.Н. Тихонова [8, 14].

$$\begin{aligned} \Phi(\rho) &= W(x_M, \rho) + \alpha \cdot \Omega(\rho) = \\ &= \int_c^d [A(x_M, \rho) - U^*(x_M)]^2 dx_M +, \end{aligned} \quad (6)$$

$$+ \alpha \cdot \Omega(\rho) \rightarrow \min$$

где $A(x_M, \rho) = \int_0^{2\pi} R(x_M, \rho) d\phi$ – нелинейный интегральный оператор прямого моделирования (4);

$$\Omega(\rho) = \int_0^{2\pi} [\rho^2 + (\rho'_\phi)^2] d\phi \quad \text{– стабилизирующий}$$

функционал 2-го порядка; $U^*(x_M)$ – правая часть ИУ, которая на практике задаётся экспериментально, а для тестовых задач определяется путём решения прямой задачи по формулам (4) с добавлением случайной поправки, моделирующей погрешности натурных измерений; α – параметр регуляризации.

Минимум функционала (6) будем искать методом сопряжённых градиентов [22, 23], общая итерационная схема которого имеет вид

$$\rho^{(q+1)} = \rho^{(q)} + k^{(q)} \cdot I^{(q)}, \quad (7)$$

где $I^{(q)} = -\Phi_{\bar{p}}^/ + \gamma^{(q)} \cdot I^{(q-1)}$, q – номер итерации; k – шаг минимизации; I – линейная комбинация производных (градиентов) на предыдущих шагах; коэффициент $\gamma^{(q)}$ определяется по одной из формул [22], $\Phi_{\bar{p}}^/$ – производная Фреше функционала (6).

Рассмотрим некоторые аспекты численной реализации формул (5 – 7).

Подынтегральное выражение ядра R представляет собой гладкую монотонно возрастающую функцию на интервале $[0; \rho(\phi)]$, где $\phi \in [0; 2\pi]$ и $\rho(\phi)$ – фиксированные согласованные значения. Для вычисления интеграла в (5) будем использовать 5-точечную формулу Гаусса.

Для вычисления интегралов и производной в (6) зададим сетку с шагом по переменной ϕ , равным $h_1 = \frac{2\pi}{n}$, по переменной x_M – $h_2 = \frac{d - c}{m}$.

Все интегралы в (6) будем вычислять по формуле Симпсона.

В работе [16] в случае линейного ИУ производную ρ'_ϕ аппроксимировали правой разностной формулой. Численные эксперименты показали, что при относительно небольшом количестве узлов $\phi[j]$ (порядка 100), точность такой аппроксимации оказывается низкой ($\approx 0,06$) и в случае нелинейного ИУ получаемые погрешности оказываются существенное влияние на вычислительный процесс. Поэтому будем аппроксимировать производную ρ'_ϕ центральным разностным отношением второго порядка точности

$$\rho'_\phi(\phi) = \frac{\rho(\phi + h_1) - \rho(\phi - h_1)}{2h_1}.$$

В силу периодичности функции $\rho(\phi)$ эту аппроксимацию можно использовать и для граничных точек. В самом деле, пусть функция определена на отрезке $[0; \Lambda]$, где Λ – период функции $\rho(\phi)$: $\rho(\phi + \Lambda) = \rho(\phi)$; тогда будет верно равенство $\rho'_\phi(0) = \rho'_\phi(\Lambda)$, где

$$\rho'_\varphi(0) = \frac{\rho(h_1) - \rho(-h_1)}{2h_1} = \frac{\rho(h_1) - \rho(\Lambda - h_1)}{2h_1}$$

. Таким образом, на границах сетки

$$\rho'_\varphi(0) = \rho'_\varphi(2\pi) = \frac{\rho[2] - \rho[K-1]}{2h_1},$$

где в квадратных скобках указан номер массива значений $\rho[j]$; K – количество элементов в сетке по переменной φ . Отметим, что если область обладает симметрией относительно оси Ox , то эта производная будет равна нулю.

Учитывая всё выше сказанное, получим дискретный аналог выражения (6) вида

$$\begin{aligned} \Phi(\rho) = & \sum_{i=1}^N \sigma[i] \cdot \left[\sum_{j=1}^K \mu[j] R(x_M[i], \rho[j]) - \right. \\ & \quad \left. - U^*(x_M[i]) \right]^2 + \\ & + \alpha \sum_{j=1}^K \mu[j] \cdot [\rho^2[j] + T^2[j]] \rightarrow \min \end{aligned} \quad (8)$$

где $T = \rho'_\varphi$ – разностная схема, указанная выше; σ, μ – коэффициенты формулы Симпсона.

Для реализации схемы (7) вычислим производную от (8) по переменной $\rho[t]$, $t \in [1; K]$:

$$\begin{aligned} \Phi'_{\rho[t]} = & 2\mu[t] \times \\ & \times \left(\sum_{i=1}^N \left(\begin{array}{c} \sigma[i] \cdot R'_{\rho[t]}(x_M[i], \rho[t]) \times \\ \times \left[\sum_{j=1}^K \mu[j] \cdot R(x_M[i], \rho[j]) - \right. \\ \left. - U^*(x_M[i]) \right] \end{array} \right) + \right. \\ & \left. + \alpha[\rho[t] + TT[t]] \right) \end{aligned}$$

где производная $R'_{\rho[t]} = F(x_M[i], t, \rho[t])$, а выражения $TT[t]$ реализуются следующим образом:

$$TT[t] = \frac{2\rho[t] - \rho[t-2] - \rho[t+2]}{4h_1^2}$$

для $t \in [3, \dots, K-2]$; для остальных четырёх значений используются выражения:

$$TT[1] = \frac{\rho[1] - \rho[3]}{4h_1^2};$$

$$TT[2] = \frac{2\rho[2] - \rho[K-1] - \rho[4]}{4h_1^2};$$

$$TT[K-1] = \frac{2\rho[K-1] - \rho[K-3] - \rho[2]}{4h_1^2};$$

$$TT[K] = \frac{\rho[K] - \rho[K-2]}{4h_1^2}.$$

Для поиска шага минимизации k будем использовать метод «золотого сечения» для целевой функции $\Phi(\rho + k \cdot I)$.

Численные эксперименты показали, что указанная функция является унимодальной на интервале $k \geq 0$. Так как заранее определить интервал, на котором содержится точка минимума, невозможно, то будет придерживаться следующего алгоритма.

Алгоритм.

Шаг 1. Зададим стартовый интервал изменения k : $a = 0; b = \varepsilon \ll 1$ и погрешность метода «золотого сечения» $\varepsilon_1 \ll \varepsilon$.

Шаг 2. Методом «золотого сечения» определим точку минимума целевой функции – k_{\min} . Вычислим вспомогательную величину

$$\Delta = \frac{b}{k_{\min}} - 1 > 0.$$

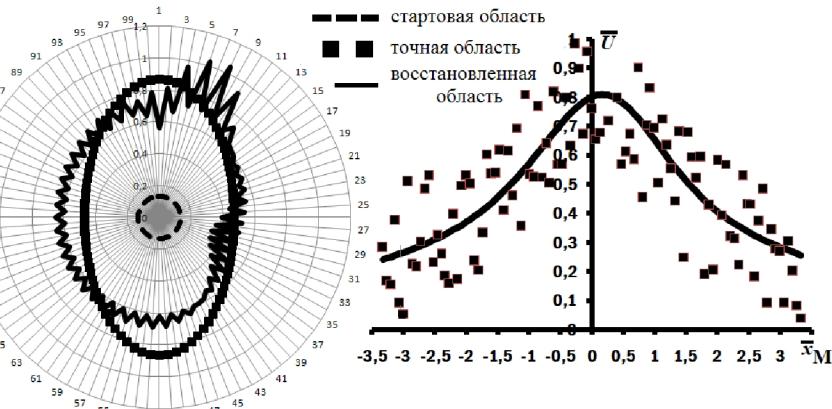
Шаг 3. Проверяем истинность неравенства $\Delta < 0,1$. Если «да», то увеличиваем правую границу интервала поиска минимума $b = b + 1$ и переходим к шагу 2. Если «нет», то величина k_{\min} и будет требуемым минимумом целевой функции.

Параметр регуляризации α будем, следуя работам [4, 12, 24], определять итеративным образом: $\alpha^{(q)} = f(\alpha^{(q-1)}, q)$, при этом на первом шаге метода сопряжённых градиентов положим $\alpha^{(0)} = 0$, а на втором – $\alpha^{(1)} = \frac{W(x_M; \rho^{(1)})}{\Omega(\rho^{(1)})}$.

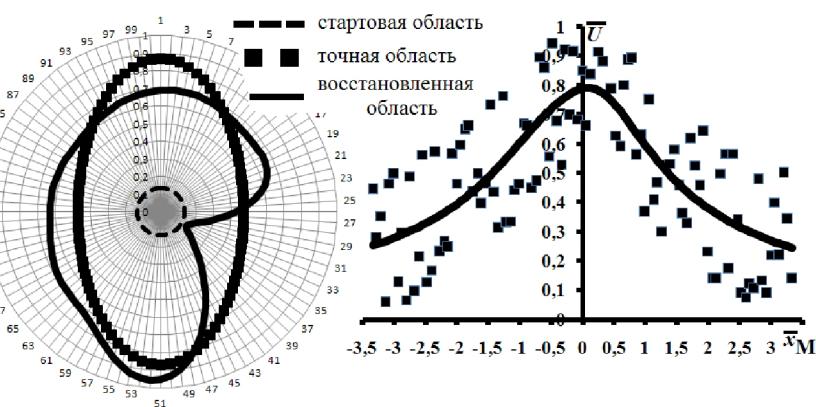
В работах [8, 14, 16] отмечается появление пилообразного эффекта «разбалтывания» приближенного решения в зависимости от выбора параметра регуляризации α . В случае линейного ИУ, как показывают эти работы, можно подобрать такое постоянное значение параметра $\alpha^{(q)} = const$, что указанное пилообразование не будет заметным. В случае нелинейного ИУ такое значение параметра α подобрать не удалось, поэтому для нейтрализации «разбалтывания» после каждого шага метода сопряжённых градиентов производилось сглаживание значений с помощью среднего арифметического двух соседних значений $\rho[j]$.

3. Реализация численного алгоритма.

Рассматривая выше приведенный метод решения, можно отметить, что он зависит от выбора стартовых значений и закономерностей изменения следующих параметров $\gamma^{(q)}, \alpha^{(q)}, \varepsilon, \varepsilon_1, \rho^{(0)}$. Численные эксперименты показали, что выбор конкретной реализации каждого из них оказывает



– Рисунок 2. Результат восстановления области и значения потенциала после 200 итераций и сглаживания только после первой итерации метода «сопряжённых градиентов»



– Рисунок 3. Результат восстановления области и значения потенциала после 200 итераций и сглаживания после каждой итерации метода «сопряжённых градиентов»

существенное влияние на результативность решения обратной задачи.

Приведём пример реализации численного алгоритма. Рассмотрим тестовую область в виде цилиндра длиной 100,0 м и сечением в виде эллипса, безразмерное уравнение которого в полярной системе координат имеет вид

$$\rho(\varphi) = \frac{ab}{z_M \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}, \quad (9)$$

где положим $z_M = 150,0$; $a = 130,0$; $b = 70,0$ м.

Для моделирования погрешностей при натурных измерениях будем добавлять случайную поправку к рассчитанным по формуле (2) значениям потенциала: $U^* = U^{ex} + 0,5 \cdot (rand - 0,5)$, где $rand$

– равномерно распределённые числа на отрезке $[0; 1]$, U^{ex} – точные расчётные значения потенциала по формуле (4).

Выбор указанных параметров:

$$\begin{aligned} \rho^{(0)} &= 20,0 / z_M; \quad \varepsilon = 10^{-2}; \quad \varepsilon_1 = 10^{-6}; \\ \gamma^{(q)} &= \frac{(\Delta g - 2 \cdot \Delta \rho; G^{(q)})}{(\Delta g; I^{(q-1)})}, \quad \Delta g = G^{(q)} - G^{(q-1)}, \\ G &= \Phi'_\rho, \end{aligned}$$

$$\Delta \rho = \rho^{(q)} - \rho^{(q-1)}; \quad \alpha^{(q)} = \alpha^{(q-1)} \cdot 0,85^q.$$

Графический результат восстановления формы сечения цилиндра после 200 итераций приведём на рис. 2, 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дахнов, В.Н. Интерпретация результатов геофизических исследований разрезов скважин/ В. Н. Дахнов // –М.: Недра, – 1982 г., – 448 с.
2. Дащевский, Ю. А. Обратные задачи электрических зондирований в сейсмоактивных зонах / Ю.А. Дащевский, А. А. Мартынов // – Новосибирск: НГУ, – 2002, – 52 с.
3. Дащевский, Ю. А. Прямые и обратные задачи геоэлектрики в неразрушающих методах контроля свайных фундаментов / Ю. А. Дащевский, И. В. Суродина, О. Ю. Дащевский, В. П. Соколов // Сиб. журн. индустр. матем., 8.2 –2005, – с. 57–69.

- 4. Жданов, М. С.** Теория обратных задач и регуляризация в геофизике/ М. С. Жданов // –М.: Научный мир, – 2007, – 710 с.
- 5. Кабанихин, С.И.** Обратные и некорректные задачи/ С.И. Кабанихин// – Новосибирск, Сибирское научное издательство, – 2009, – 458 с.
- 6. Tarantola, A.** Inverse problem theory and methods for model parameter estimation / A. Tarantola // – SIAM, – 2005, – 358 р
- 7. Neto, F.D.M.** An introduction to inverse problems with applications/ F.D.M. Neto, A.J.S. Neto// – Springer, – 2013, – 243 р.
- 8. Тихонов, А. Н.** О приближённом решении интегральных уравнений Фредгольма 1 рода/ А.Н. Тихонов, В.Б.Гласко// Ж. вычисл. матем. и матем. физ., –1964, т.4, № 3, – 564 – 571 с.
- 9. Morozov, V.A.** Regularization methods for ill-posed problems / V.A. Morozov // CRC Press, – 1993, – 273 р.
- 10. Engl, H.W.** Regularization of inverse problems / H.W. Engl et all./ – Kluwer academic publishers, – 1996, – 329 р.
- 11. Vogel, C.R.** Computational methods for inverse problems / C.R. Vogel // – SIAM, – 2002, –200 р.
- 12. Bakushinsky A.B.** Iterative methods for ill-posed problems / A.B. Bakushinsky, M. Yu. Kokurin, A. Smirnova // – De Gruyter, –2011, – 150 р.
- 13. Wang, Y.** Optimization and regularization for computational inverse problems and applications// Y. Wang, A.G. Yagola, C. Yang// – Springer, – 2011, – 350 р.
- 14. Тихонов А. Н.** Применение метода регуляризации в нелинейных задачах/ А.Н. Тихонов, В.Б.Гласко// Ж. вычисл. матем. и матем. физ., –1965, т.5, № 3, – 463 – 473 с.
- 15. Верлань, А. Ф.** Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков // –Киев: Наукова думка, –1986, – 544 с.
- 16. Васильева, А. Б.** Интегральные уравнения / А. Б. Васильева, Н. А. Тихонов // –М.: ФИЗМАТЛИТ, –2002. – 160 с.
- 17. Сирота, Д.Ю.** Восстановление формы источника электрического поля, как решение обратной задача геоэлектрики/Д.Ю. Сирота // Вестник КузГТУ – 2015, №6, – с. 97 – 103.
- 18. Сирота, Д.Ю.** Определение угла наклона и формы плоского источника электромагнитного поля по измерениям потенциала на земной поверхности / Д.Ю. Сирота, В.В. Иванов// Известия вузов. Горный журнал – 2016, № 3, – с. 89 – 96.
- 19. Трушникова, Н. В.** Обратная задача локации очага самовозгорания угля по измерениям потенциала термоэлектрического поля на поверхности угольного разреза/ Н. В. Трушникова //Вестник КузГТУ, 2010, № 3 . –с. 3 – 6.
- 20. Бурсиан, В.Р.** Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке / В.Р. Бурсиан // – Л. Недра, – 1972, – 308 с.
- 21. Иванов, В. В.** Возмущение естественного электрического поля в атмосфере перед крупными горно-тектоническими ударами и техногенными землетрясениями // В. В. Иванов, В. А. Хямляйнен, Д. Ю. Сирота – Изв. вузов. Горный журнал. 2013, № 7, С. 113 – 123.
- 22. Пантелеев, А. В.** Методы оптимизации в примерах и задачах / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова // – М.: Высшая школа, –2005 год. – 544 с.
- 23. Hager, W. W.** A survey of nonlinear conjugate gradient methods/ W.W. Hager, H. Zhang // Pacific J. Optim. – 2006. – № 2, – р. 35 – 58.
- 24. Zhdanov M.S.** Large-scale 3d inversion of marine magnetotelluric data: Case study from the Gemini prospect, Gulf of Mexico/ M.S. Zhdanov et all./Geophysics, –2011, vol. 76, № 1, p. F77 – F87.

REFERENCES

- 1. Dakhnov, V. N.** Interpretation of results of geophysical research.-call wells/ V. N. Dhnow // –М.: Nedra, 1982 г., – 448 р
- 2. Dashevsky, Y. A.** the Inverse problem of electrical sounding in seismic alternative areas / Yu. a. Dashevsky, A. A. Martynov // – Novosibirsk: NSU – 2002 – 52.
- 3. Dashevsky, Y. A.** Direct and inverse problems of geoelectrics in non-destructive control methods of pile foundations / Yu. a. Dashevsky, I. V. Surodina, O. Y. Dashevsky, V. P. Sokolov // Sib. Sib. industr. mod., 8.2 - 2005, – p. 57-69.
- 4. Zhdanov, M. S.** Theory of inverse problems and regularization in Geophysics/ M. S. Zhdanov // –М.: Scientific world, 2007, 710.
- 5. Kabanikhin, S. I.** Inverse and ill-posed problems/ S. I. Kabanikhin// Novo Sibirsk, Siberian scientific publishing house, – 2009, 458 р
- 6. A. Tarantola,** The theory of Inverse problem and methods for estimation of model parameters / A. Tarantola // – Siam, – 2005, – pp. 358

- 7. Neto, F. D. M.** Introduction to inverse problems with applications/ D. F. M. Neto, A. J. S. Neto// Springer, – 2013, – 243 p.
- 8. Tikhonov, A. N.** On the approximate solution of integral equations Fredholm-mA 1 race/ A. N. Tikhonov, V. B. Glaskoff// Zh. Vychisl. mod. V. I. Phys., -1964, vol. 4, No. 3, 564 – 571 p.
- 9. Morozov, V.A.** Regularization methods for ill-posed problems / V. A. Morozov // CRC trousers, – 1993, – p. 273
- 10. Engle, N. V.** Regularization of inverse problems / N. eng V. et al.// – PMA by Kluwer academic publishers – 1996, – p. 329
- 11. Fogel, R.** Computational methods for inverse problems / C. R. Vogel // – Siam – 2002, -200 C.
- 12. A. B. Bakushinskii** Iterative methods for ill-posed problems / A. B. Bakushinskii and M. Y. Kokurin, A. Smirnova // de Gruyter, -2011, – p. 150
- 13. Wang, Y.** Optimization and regularization computational inverse problems and applications Wang Y., Yagola A. G., Yang C.// Springer, – 2011, – 350 C.
- 14. Tikhonov A. N.** Application of the regularization method in nonlinear problems/ A. N. Tikhonov, V. B. Glaskoff// Zh. Vychisl. mod. V. I. Fiz, – 1965, vol. 5, No. 3, 463 – 473 p
- 15. Verlan A. F.** Integral equations: methods, algorithms, and applications / A. F. Verlan, V. S. Sizikov // – Kyiv: Naukova Dumka, -1986, – 544 p.
- 16. Vasil'eva, A. B.,** Integral equations / A. B. Vasil'eva, N. A. Tikhonov // –M.: FIZMATLIT, – 2002. – 160 p.
- 17. Sirota, D. Y.** The recovery of the source electric field as the solution to the inverse problem of geoelectrics /dy Orphan // Vestnik KuzGTU – 2015, №6, – pp. 97 – 103.
- 18. Sirota, D. Y.** Determination of angle and form a flat source of the elec-electromagnetic field by measuring the potential on the surface of the earth / D. J. Sirota, V. V. Ivanov// proceedings of the universities. Mining journal – 2016, No. 3, pp. 89 – 96.
- 19. Trushnikova, N. V.** The Inverse problem of the location of foci of spontaneous combustion of coal on measure - ments of the potential of the thermoelectric field on the surface coal mine/ N. Trushnikov V. //Vestnik KuzGTU, 2010, № 3 . –p. 3 – 6.
- 20. Bursian, V. R.** Theory of electromagnetic fields applied in electrolaz-wedge / V. R. Bursian // L–. the Bowels, – 1972, – p. 308
- 21. Ivanov, V. V.** Disturbance of the natural electric field in the atmosphere before major mining and tectonic shocks and man-made earthquakes // V. V. Ivanov, V. A. hämäläinen, V. Orphan, Izv. universities. Mining journal. 2013, no. 7, Pp. 113 – 123.
- 22. Panteleyev, A. V.,** Optimization Methods in examples and problems / A.V. Pantele-s, Letova T. A. // – M.: Higher school, year -2005. – 544 p.
- 23. Hager, V. V.** Study of nonlinear conjugate gradient methods/ V. V. Hager, H. Zhang // Pacific J. Optim. – 2006. – № 2, – pp. 35 – 58.
- 24. Zhdanov, M. S.** Large-scale 3D inversion of marine magnetotelluric data: case study from Gemini prospect, Mexico/ M. S. Zhdanov Bay et al.//Geophysics, -2011, - vol. 76, No. 1, pp. F77 – F87.

Поступило в редакцию 07.09.2016
Received 7 September 2016