

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 514.76

Е.В. Кусова, Е.В. Прокопенко

КОНФОРМНО-Ф-ПАРАКОНТАКТНЫЕ СЛАБО КОСИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Контактные и почти контактные структуры составляют один из наиболее содержательных примеров дифференциально-геометрических структур. Их теория является естественным обобщением, так называемой контактной геометрии, имеющей существенные приложения в классической и квантовой механике. Почти контактные метрические структуры являются нечетномерным аналогом почти эрмитовых структур, и между этими классами структур существует ряд важных взаимосвязей. Одним из главных аспектов аппарата обобщенной эрмитовой геометрии является метод присоединенных G -структур.

Слабо косимплектические структуры впервые, по-видимому, были рассмотрены Проппе [8], а затем систематически изучались сначала Блэром [7], а затем Блэром и Шоуэрсом [9], которые впервые ввели также понятие точнейше косимплектической структуры. Понятие слабо косимплектической структуры является одним из наиболее интересных обобщений понятия косимплектической структуры и является контактным аналогом понятия приближенно келеровой структуры в эрмитовой геометрии.

Пусть M – гладкое многообразие размерности $(2n+1)$ свыше трех, $C^\infty(M)$ – алгебра гладких функций на M , $X(M)$ – модуль гладких векторных полей на M , d – оператор внешнего дифференцирования алгебры Грассмана $\Lambda(M)$ гладкого многообразия M , ∇ – риманова связность. Все многообразия, тензорные поля и т.п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞ . Напомним [2], что почти контактной метрической (короче, AC -) структурой на многообразии M называется четверка тензорных полей (η, ξ, Φ, g) , где ξ – векторное поле на M , называемое *характеристическим*, η – дифференциальная 1-форма на M , называемая *контактной формой*, Φ – тензор типа $(1,1)$ на M , называемый *структурным эндоморфизмом*, g – метрический тензор. При этом выполняются равенства:

- 1) $\eta(\xi) = 1$, 2) $\Phi(\xi) = 0$,
- 3) $\eta \circ \Phi = 0$, 4) $\Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi$,
- 5) $\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X) \cdot \eta(Y)$,

где $X, Y \in X(M)$.

Такие структуры естественно возникают на ги-

перповерхностях почти эрмитовых многообразий [2], на пространствах главных T^1 -расслоений над симплектическими многообразиями с целочисленной фундаментальной формой (расслоения Бутбина [2]) и, более обще, над почти эрмитовыми многообразиями [3] и являются естественными обобщениями так называемых контактных метрических структур, возникающих на нечетномерных многообразиях с фиксированной 1-формой максимального ранга (контактной структурой).

Важным классом AC -структур слабо косимплектические структуры. AC -структура называется *слабо косимплектической*, если выполняется условие:

$$\nabla_x(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = 0, \text{ где } X, Y \in X(M).$$

AC -структура называется *косимплектической*, если выполняется условие $\nabla_X(\Phi)Y = 0$.

На пространстве присоединенной G -структуры имеют место структурные уравнения:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + \frac{3}{2}C^{ab}\omega_b \wedge \omega; \\ d\omega_a &= \omega_a^b \wedge \omega_b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + \frac{3}{2}C_{ab}\omega^b \wedge \omega; \\ d\omega &= C^{bc}\omega_b \wedge \omega_c + C_{bc}\omega^b \wedge \omega^c; \\ d\omega_b^a &= \omega_c^a \wedge \omega_b^c + [A_{bc}^{ad} - 2B^{ad}B_{hbc} + \\ &\quad + \frac{3}{2}C^{ad}C_{bc}] \omega^c \wedge \omega_d \end{aligned}$$

где $\{B^{abc}\}$, $\{B_{abc}\}$, $\{C^{ab}\}$, $\{C_{ab}\}$ – системы функций, заданные на пространстве присоединенной G -структуры следующим образом:

$$\begin{aligned} B^{abc} &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a{}_{\hat{b},\hat{c}}, \quad C^{ab} = \sqrt{-1}\Phi^a{}_{0,\hat{b}}; \\ B_{abc} &= -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}{}_{b,c}, \quad C_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}{}_{b,0}. \end{aligned}$$

Эти системы функций определяют тензоры B и C , называемые *первым и вторым структурными тензорами Кириченко*. Из определения слабо косимплектических структур следует, что $\{B^{abc}\}$, $\{B_{abc}\}$, $\{C^{ab}\}$, $\{C_{ab}\}$ – кососимметричны. $A = \{A_{bc}^{ad}\}$ – тензор называется *структурным тензором третьего*.

го рода или тензором голоморфной секционной кривизны. Хорошо известно, что на любом римановом многообразии размерности большей двух внутренним образом определен тензор конформной кривизны или тензор Вейля.

Определение: Слабо косимплектическое многообразие называется *конформно-Ф-параконтактным*, если тензор Вейля удовлетворяет равенству:

$$\begin{aligned} & \langle W(\Phi X, \Phi Y) \Phi Z, \Phi U \rangle \\ & = \langle W(\Phi^2 X, \Phi^2 Y) \Phi Z, \Phi U \rangle \end{aligned}$$

Теорема: Конформно-Ф-параконтактное многообразие является многообразием постоянной неотрицательной скалярной кривизны, при этом его скалярная кривизна равна нулю тогда и только тогда, когда многообразие будет косимплектическим.

Доказательство: Компоненты тензора Вейля на пространстве присоединенной G-структуры для слабо косимплектического многообразия имеют вид:

$$\begin{aligned} W_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}} &= -2B^{abg}B_{gcd} - C^{ab}C_{cd} + \\ &+ \frac{1}{2n-1}(r_{ac}\delta_d^b + r_{bd}\delta_c^a - r_{ad}\delta_c^b - r_{bc}\delta_d^a) + \\ &+ \frac{\kappa}{2n(2n-1)}(\delta_c^a\delta_d^b - \delta_d^a\delta_c^b) \end{aligned}$$

Рассмотрим равенство $W_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = 0$. Применяя процедуру восстановления тождества [3], получим равенство

$$\begin{aligned} & \langle W(\Phi X, \Phi Y) \Phi Z, \Phi U \rangle = \\ & = \langle W(\Phi^2 X, \Phi^2 Y) \Phi Z, \Phi U \rangle \end{aligned}$$

Равенство нулю компоненты $W_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}}$ равносильно конформно-Ф-параконтактности слабо косимплектического многообразия.

С другой стороны, равенство нулю компоненты $W_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}}$ равносильно равенству:

$$\begin{aligned} B^{abg}B_{gcd} &= -\frac{1}{2}C^{ab}C_{cd} + \\ &+ \frac{1}{2(2n-1)}(r_{ac}\delta_d^b + r_{bd}\delta_c^a - r_{ad}\delta_c^b - r_{bc}\delta_d^a) + \\ &+ \frac{k}{4n(2n-1)}(\delta_c^a\delta_d^b - \delta_d^a\delta_c^b) \end{aligned}$$

Свернем это равенство сначала по индексам (b,d), а затем по (a,c). Получим:

$$B + C\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{k3(n-1)}{4(2n-1)},$$

где $B = B^{abg}B_{abg}$, $C = C^{ab}C_{ab}$ и k – скалярная кривизна. При этом B и C неотрицательны, следовательно, выражение справа неотрицательно. Для того, чтобы равенство было верным, необходимо и достаточно, чтобы скалярная кривизна была неотрицательной. Более того, скалярная кривизна будет равна нулю в том и только том случае, если B и C равны нулю. Согласно [8], первый и второй структурный тензоры Кириченко равны нулю в том и только том случае, если слабо косимплектическое многообразие является косимплектическим. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Blair, D.E. Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds. Birkhauser / D.E. Blair. Boston, Basel, Berlin, 2001.
2. Кириченко, В.Ф. Дифференциальная геометрия главных тороидальных расслоений / В.Ф. Кириченко // Фундам. и прикл. матем. 2000. Т. 6. № 4. С. 1095-1120.
3. Кириченко, В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / В.Ф. Кириченко. М.: МПГУ, 2003. 495 с.
4. Кириченко, В.Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий. -М.: ВИНИТИ, 1986.-Т. 18 – С. 25-71
5. Blair, D.E. Almost contact manifolds with Killing structure tensors, Pacific J. Math/ 39, №2 (1971), 285-292.
6. Proppe H. Thesis, Mc Gill University, 1969.
7. Blair D.E., Showers D.K. Almost contact manifolds with Killing structure tensors, // J.Different Geom. - 1974 - V.9.-P.577-582.
8. Кусова Е.В. Классы CR1, CR2 и CR3 слабо косимплектических многообразий/ в сб. "Лобачевские чтения-2007 Труды Математического центра имени Н.И.Лобачевского". - Казанское математическое общество, Казань. 2007. С. 136-137

□Авторы статьи:

Кусова
Елена Валерьевна
аспирант каф. геометрии МПГУ.
Email: sofuslee@mail.ru

Прокопенко
Евгения Викторовна
канд. физ.-мат. наук доцент каф. при-
кладных информационных техноло-
гий КузГТУ,
Email: pev-05@mail.ru