УДК 528.236

ПОЛУЧЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СВЯЗИ МЕЖДУ СИСТЕМАМИ КООРДИНАТ КОСВЕННЫМ МЕТОДОМ

RECEIVING CONNECTION PARAMETERS BETWEEN THE COORDINATE SYSTEMS WITH THE HELP OF THE INDIRECT METHOD

Суханов Сергей Иванович[1],
кандидат техн. наук, e-mail: sukhanov-s@mail.ru
Sukhanov Segey I., C. Sc.
Прокопенко Евгения Викторовна[2],
кандидат физ-мат. наук, доцент, e-mail: pev-05@mail.ru
Prokopenko Evgenia V., C. Sc., Associate Professor

[1]Алтайский государственный университет, 656000, Россия, г. Барнаул, пр. Ленина, 61
Altai State University, 656049, Russia, Barnaul, pr. Lenina 61
[2]Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева, 650000, Россия, г. Кемерово, ул. Весенняя, 28
T.F. Gorbachev Kuzbass State Technical University, 28 streetVesennyaya, Kemerovo, 650000, Russian Federation

Аннотация. *При выполнении геодезических работ возникает задача перевода координат из одной системы координат в другую. Преобразования координат в зависимости от задач бывают как двумерные так и трехмерные. Двухмерный метод применяется для преобразования координат из одной декартовой системы в другую. Трехмерный метод применяется для преобразования пространственных прямоугольных координат. Оба преобразования изначально не являются взаимно однозначными преобразованиями. В статье описываются способы получение формул взаимно согласованных преобразований как двухмерных, так и трехмерных координат.*

Abstract. *Carrying out geodesic tasks faces a problem of appropriate conversion of map data from one coordinate system into another. Depending on the tasks conversion of coordinates can be both two-dimensional and three-dimensional. The two-dimensional technique is used to convert coordinates from one Cartesian system to another. The three-dimensional method is used to convert Cartesian three-dimensional coordinates. Both conversion techniques are initially not one-to-one transformations. The article focuses on the methods of obtaining one-to-one transformation formulas for both two-dimensional and three-dimensional coordinates.*

Ключевые слова: *система координат, коэффициенты преобразований, балансировка, погрешность координат, пространственные прямоугольные координаты*

Keywords*: coordinate system, conversion coefficients, balancing adjustment, coordinate error, Cartesian three-dimensional coordinates*

При выполнении геодезических работ с использованием спутниковых технологий, возникает задача преобразования координат пунктов государственной геодезической сети из одной местной системы в систему координат того административного округа, где выполняются данные работы. При этом могут возникать серьезные затруднения, так как зачастую существующие «ключи» перехода к этим системам из государственной системы координат не дают нужной точности.

Проводя данный вид работ на территории городов и сельских территорий, возникает необходимость совместного использования карт выполненных в разных системах координат, что приводит к необходимости преобразования координат из одной системы координат в другую.[1].

Методы преобразования координат бывают как двумерные, так и трехмерные. Двухмерный метод применяется для преобразования одной плоской координатной системы в другую подобную систему. В каждом регионе нашей страны для ведения кадастра применяется своя система координат. В Алтайском крае принята СК-22, полученная из СК-63 линейным сдвигом. Архитектура же, в свою очередь, работает с планшетами, выпущенными еще в советское время, когда на территориях городов и сельских поселений Алтая существовали свои местные системах координат.

Алгоритм перехода из одной местной системы координат в другую близок к аффиннову преобразованию, которое представляется в виде поворота осей и сдвига начала координат, при которых используются четыре параметра [2]:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_b = m\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_a + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \qquad (1)$$

где α — угол разворота осей координат, m — масштабирующий множитель, a и b — системы координат.

Построение данных преобразований традиционно производится с использованием таблицы опорных точек. Для определения этих параметров необходимо иметь два совмещенных пункта, координаты которых известны в обеих системах координат.

Применение GPS-приемников при геодезических измерениях повысило точность геодезических измерений, что привело к необходимости более точного пересчета координат из СК-22 в мировую систему WGS-84.[3]. Корректный переход между системами достигается при использовании математически строгих преобразований, например, решением уравнения Крюгера. На практике часто применяется способ, описанный Гельбертом.

Данный метод относится к трехмерным способам преобразования координат, неотъемлемой частью которого является задача пересчета координат из одной прямоугольной пространственной системы в другую.

Преобразование пространственных прямоугольных координат выполняется по формуле:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_b = m\begin{pmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_a + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \qquad (2)$$

где Δx, Δy, Δz - линейные элементы, ω_x, ω_y ω_z - угловые элементы, m — масштабирующий множитель, a и b — системы координат.

В данном способе используются семь параметров: три параметра взаимно-однозначного ориентирования, три углового взаимного ориентирования и один масштабирующий множитель.

Порядок вычислений таков: по геодезическим координатам системы a рассчитываются прямоугольные пространственные координаты x_a, y_a, z_a. Используя параметры преобразования (2) координаты x_a, y_a, z_a преобразуются в прямоугольные координаты: x_b, y_b, z_b. Затем координаты x_b, y_b, z_b преобразуются в геодезические координаты системы b.

Применяя описанные методики для двумерно трехмерного случаев, можно самостоятельно решить проблему поиска параметров перехода от одной системы координат к другой, но данные преобразования будут несогласованными. Несогласованность в данном случае означает, что, производя преобразование из системы a в b, а затем из b в a, начальные и конечные значения не совпадут.

Для получения согласованных данных в двумерном случае запишем преобразование координат из системы a в b в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_b = m_a\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_a + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}_a, \qquad (3)$$

а обратное :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_a = m_b\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_b + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}_b, \qquad (4)$$

где

$a_1 = \cos\alpha_a$; $b_1 = \sin\alpha_a$; $a_2 = \cos\alpha_b$; $b_2 = \sin\alpha_b$.

Правую часть формулы (3) подставим в формулу (4):

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}_a = m_b m_a\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_a + $$

$$+ m_b\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}_a + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}_b$$

Правую часть формулы (4) подставим в формулу (3):

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}_b = m_a m_b\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_b + $$

$$+ m_a\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}_b + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}_a$$

Для того, чтобы преобразования (3) и (4) были согласованны, то есть

$$\begin{pmatrix} x \\ \bar{y} \end{pmatrix}_a = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}_a \text{ и } \begin{pmatrix} x \\ \bar{y} \end{pmatrix}_b = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}_b,$$

необходимо выполнение следующих условий:

$$m_b m_a\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_a m_b\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_b\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}_{MCK} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}_{WGS-84} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$m_a\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}_{WGS-84} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}_{MCK} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Аналогично плоскому случаю,общий вид трехмерного преобразования из системы координат a в b можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_b = m_1 \begin{pmatrix} 1 & a_1 & -b_1 \\ -a_1 & 1 & c_1 \\ b_1 & -c_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_a + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}_a. \quad (5)$$

а обратное:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_a = m_2 \begin{pmatrix} 1 & a_2 & -b_2 \\ -a_2 & 1 & c_2 \\ b_2 & -c_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_b + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}_b \quad (6)$$

Запишем преобразование из a в b и обратно:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_a \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_b \to \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix}_a,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_b \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_a \to \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix}_b$$

Несогласованность в трехмерном случае означает, что:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_a - \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix}_a \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_b - \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix}_b \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Выведем условия согласованности для трехмерного случая. Правую часть формулы (5) подставим в формулу (6):

$$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix}_a = m_b m_a \begin{pmatrix} 1 & a_2 & -b_2 \\ -a_2 & 1 & c_2 \\ b_2 & -c_2 & 1 \end{pmatrix} \circ$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & -b_1 \\ -a_1 & 1 & c_1 \\ b_1 & -c_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_a +$$

$$+ m_b \begin{pmatrix} 1 & a_2 & -b_2 \\ -a_2 & 1 & c_2 \\ b_2 & -c_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}_a + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}_b$$

Подставим правую часть формулы (6) в формулу (5), получим выражение:

$$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix}_b = m_a m_b \begin{pmatrix} 1 & a_1 & -b_1 \\ -a_1 & 1 & c_1 \\ b_1 & -c_1 & 1 \end{pmatrix} \circ$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_2 & -b_2 \\ -a_2 & 1 & c_2 \\ b_2 & -c_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_b +$$

$$+ m_a \begin{pmatrix} 1 & a_1 & -b_1 \\ -a_1 & 1 & c_1 \\ b_1 & -c_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}_b + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}_a$$

Отсюда следует, что условиями согласованности являются следующие выражения:

$$m_b m_a \begin{pmatrix} 1 & a_2 & -b_2 \\ -a_2 & 1 & c_2 \\ b_2 & -c_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_1 & -b_1 \\ -a_1 & 1 & c_1 \\ b_1 & -c_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_a m_b \begin{pmatrix} 1 & a_1 & -b_1 \\ -a_1 & 1 & c_1 \\ b_1 & -c_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_2 & -b_2 \\ -a_2 & 1 & c_2 \\ b_2 & -c_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_b \begin{pmatrix} 1 & a_2 & -b_2 \\ -a_2 & 1 & c_2 \\ b_2 & -c_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}_a + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$m_a \begin{pmatrix} 1 & a_1 & -b_1 \\ -a_1 & 1 & c_1 \\ b_1 & -c_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}_b + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

При пересчете из одной системы в другую накапливаются ошибки не только из-за неточных формул преобразований координат, но и из-за ошибок округления при вычислениях. В результате использования при расчетах согласованных преобразований, как двумерном, так и в трехмерном случаях можно нивелировать суммарные погрешности вычислений. Согласованные преобразования пространственных координат из одной системы в другую помогает получать параметры связи точнее, чем в «ключах».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руководство пользователя по выполнению работ в системе координат 1995 года (СК–95). ГКИНП (ГНТА)-06-278-04. – М.: ЦНИИГАиК, 2004. – 89 с.

2. Поклад, Г.Г., Гриднев С.П. Геодезия. Учебное пособие для вузов.– М.: Академический Проект, 2007. – 592 с.

3. Руководство по обновлению цифровых топографических карт и планов на ЦФС по материалам аэрокосмических съемок. Проект. – М.: ЦНИИГАиК, 2007.

4. Оскорбин Н.М., Суханов С.И. Оценка параметров формул прямого и обратного преобразования

пространственных координат // Геодезия и картография. – 2011. №6. – С. 26-29

5. Подшивалов В.П. Оценка параметров преобразования координат на плоскости методом наименьших квадратов // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – М., 2010. – № 4(39). – С. 69–72.

REFERENCES

1. Rukovodstvo polzovatelya po vypolneniyu rabot v sisteme koordinat 1995 goda (SK-95). GKINP (GNTA) -06-278-04. – M.: TSNIIGA AiK, 2004. – 89 s.

2. Poklad G.G., Gridnev S.P. Goedezia. Uchebnoe posobie dlya vuzov [Geodesy. Textbook for high schools]– M.: Akademicheskiy Proekt, 2007. – 592 s.

3. Rukovodstvo po obnovleniyu tsifrovykh topograficheskikh kart i planov ha TSFS po materialam aero-kosmicheskikh syemok. Proekt. – M.: TSNIIGA AiK, 2007.

4. Oskorbin N.M., Sukhanov S. I. Otsenka parametrov formul pryamogo i obratnogo preobrazovaniya prostranstvennykh koordinat [Parameter Estimation of Reciprocal Conversion Formulas of Spatial Coordinates]//Geodesy and Cartography. – 2011 №6. – S. 26-29

5. Podshivalov V.P. Otsenka parametrov preobrazovaniya koordinat na ploskosti metodom naimenshikh kvadratov [Evaluation of Coordinate Transformation Parameters on the Plane Using the Method of Least-squares]// Avtomatizirovannye tekhnologii izyskaniy i proektirovaniya – M., 2010. – № 4(39). – S. 69–72.

Поступило в редакцию 30.01.2017
Received 30.01.2017