

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

УДК 621.791:620.179

С.Ю. Гооге, И.С. Таболин, Е.И. Ширяев, Л.Б. Шрон

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ

В строительной механике широко используется метод сечений для определения внутренних сил, возникающих в элементах конструкций под действием приложенных внешних нагрузок. Возможность его использования в задачах линейной механики разрушения (ЛМР), в части получения аналитических выражений, приближенно описываемых значениями коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) K_I по конфигурации детали с трещиной, по-видимому, впервые проиллюстрирована в работах Е.М. Морозова с соавторами [1]. Конечно, по точности получаемых значений, метод плоских сечений не конкурирует с такими мощными методами как МКЭ и МГИУ, но возможность получения аналитических выражений для расчетов значений КИН довольно простым способом делает этот метод привлекательным в инженерных приложениях. Ниже изложен подход, являющийся дополнительной иллюстрацией применения метода сечений в задачах ЛМР.

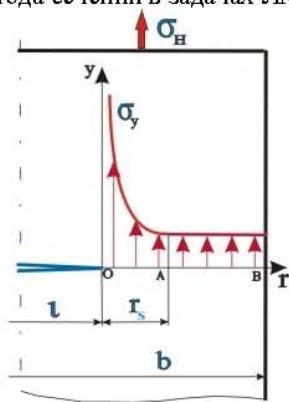


Рис. 1. Фрагмент пластины конечной ширины с внутренней трещиной нормального разрыва

Традиционно рассмотрим задачу о нахождении поправочной функции $f_1(\lambda)$, характеризующей влияние на величину K_I относительной длины $\lambda = l/b$ сквозной трещины нормального разрыва в пластине конечной ширины. Здесь мы применяем широко используемое в ЛМР представление

$$K_I = \sigma_n \cdot \sqrt{\pi \cdot l} \cdot f_1(\lambda), \quad (1)$$

где σ_n – номинальное напряжение в нетто-сечении пластины. Учитывая, что трещина нормального разрыва распространяется в своей плоскости, рас-

смотрим равновесие верхней части пластины (в силу «двойной» симметрии – только правой четверти) в направлении оси ОY (рис.1).

Примем, что эпюра напряжений σ_y на продолжении трещины состоит из двух частей: сингулярной (длиной r_s) и регулярной (длиной $b-l-r_s$) и имеет характер зависимости, представленной на рис.1. На части сечения длиной r_s распределение напряжений отвечает решению плоской задачи теории упругости для трещины с особенностью $r^{-1/2}$. Значение напряжений σ_y в сингулярной зоне определяется выражением:

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \varphi_o(\theta), \quad (2)$$

где $0 < r \leq r_s$ и $-\pi \leq \theta \leq \pi$ – полярные координаты; $\varphi_o(\theta)$ – ограниченная функция полярного угла θ . На остальной части сечения длиной $b-l-r_s$ регулярная составляющая напряжения σ_y распределена равномерно и в точке с координатами $r = r_s$, $\theta = \theta^*$ функция $\varphi_o(\theta=0) = 1$ в соответствии с (1) и (2)

$$\sigma_y = \frac{\sigma_n \cdot \sqrt{l}}{\sqrt{2r_s}} \cdot f_1(\lambda) \cdot$$

Величину полярного радиуса r_s определим из условия равенства нормальных усилий на площадках длиной l и r_s (единичной толщины)

$$\sigma_n \cdot l = \int_{r=0}^{r=r_s} \sigma_y(r, \theta=0) \cdot dr. \quad (3)$$

Отсюда

$$r_s = \frac{l}{2 \cdot f_1(\lambda)}. \quad (4)$$

Из условия равновесия верхней отсеченной четверти пластины вдоль оси ОY и с учетом (4)

$$f_1(\lambda) = \sqrt{\frac{2-\lambda}{2 \cdot (1-\lambda)}}. \quad (5)$$

Сопоставление значений $f_1(\lambda)$, рассчитанных по формуле (5) и [2]

$$f_1(\lambda) = \sqrt{\sec\left(\frac{\pi}{2} \cdot \lambda\right)},$$

дает вполне удовлетворительные результаты: в диапазоне $0 \leq \lambda \leq 0,8$ наибольшая погрешность составляет 4,05% (при $\lambda = 0,328$). В практических приложениях значения $\lambda \geq 0,8$ вряд ли интересны.

Приведенная процедура нахождения приближенного выражения для поправочных функций $f_I(\lambda)$ весьма проста и вполне возможно уже содержится в ранних работах по методу плоских сечений. К сожалению, авторам эти работы не известны. Поэтому ниже рассмотрим ряд примеров поиска $f_I(\lambda)$ с помощью данного подхода.

1. Пластина конечной ширины с внутренней наклонной трещиной под действием равномерно растягивающих усилий (фрагмент пластины с такой трещиной показан на рис.2).

КИН нормального отрыва и продольного сдвига представим в следующем виде:

$$K_I = \sigma_n \cdot \sqrt{\pi \cdot l} \cdot f_I(\lambda, \alpha), \quad (6.1)$$

$$K_{II} = \sigma_n \cdot \sqrt{\pi \cdot l} \cdot f_{II}(\lambda, \alpha). \quad (6.2)$$

В таком представлении подлежащие нахождению поправочные функции $f_I(\lambda, \alpha)$ и $f_{II}(\lambda, \alpha)$ зависят от параметра λ и угла α между плоскостью трещины и вектором внешней нагрузки. Приняты следующие допущения:

а) параметр $\xi = K_{II}/K_I = f_{II}(\lambda, \alpha)/f_I(\lambda, \alpha)$ не зависит от относительной ширины пластины λ и определяется только значением угла α , т.е. $\xi = \operatorname{ctg}(\alpha)$, согласуется с результатами работы [3];

б) трещина распространяется в двух плоскостях (единичной ширины): начальной и конечной. След трещины в виде ломаной линии см. на рис.2.

Положение и длина трещины страгивания (начальной трещины), исходящей из ее вершины, определяется сингулярным характером напряжений σ_θ . Угол страгивания γ , определяющий положение начальной плоскости распространения трещины, рассчитывается по критерию обобщенного нормального разрыва [2], длина трещины страгивания совпадает с длиной полярного радиуса r_s . Конечная плоскость распространения трещины перпендикулярна растягивающим напряжениям σ_n (рис.2).

Рассеченная по вертикальной оси и ломаной плоскости распространения трещины пластина

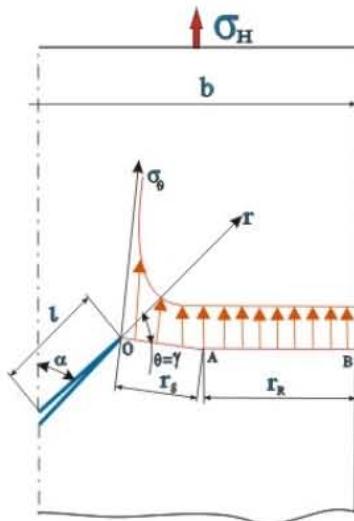


Рис. 2. Фрагмент растяжения пластины конечной ширины с внутренней наклонной трещиной

под действием внешних сил должна находиться в равновесии. В результате принятых допущений получено выражение для определения $f_I(\lambda, \alpha)$

$$f_I(\lambda, \alpha) = \frac{1}{2\varphi_\theta(\gamma) \cdot \sin(\beta)} \sqrt{\frac{\sin(\alpha) \cdot (2 - 2\lambda + \lambda \cdot \sin(\beta))}{1 - \lambda}}, \quad (6.3)$$

где $\varphi_\theta(\gamma) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[3\cos(\frac{\gamma}{2}) + \cos(\frac{3\gamma}{2}) - 3\xi \cdot \sin(\frac{\gamma}{2}) + \sin(\frac{3\gamma}{2}) \right]$
 $\lambda = l \cdot \sin(\alpha)/b; \quad \beta = \alpha + |\gamma|$.

С использованием полученной формулы и принятого допущения имеем $f_{II}(\lambda, \alpha) = f_I(\lambda, \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(\alpha)$. Легко видеть, что при $\alpha=\beta=\pi/2$ и $\gamma=0$ формула (6.3) переходит в формулу (5). Совпадение с численными данными работы [4] показывает удовлетворительное совпадение с результатами, подсчитанными по формуле (6.3). Так, при $\alpha=45^\circ$ и $0 \leq \lambda \leq 0,6$ расхождение составляет менее 6%.

2. Чистый изгиб пластины конечной ширины с краевой трещиной длины l . Фрагмент модели и эпюра напряжений σ_y показаны на рис.3.

За номинальное напряжение принято максимальное растягивающее напряжение в сечении, не содержащем трещины. Можно принять, что регулярная составляющая напряжения σ_y распределена по линейному закону. Однако в этом случае нельзя получить в явном виде зависимость для нахождения значений $f_I(\lambda, \alpha)$. Чтобы получить искомую зависимость в явном виде, принято более грубое предположение о характере распределения напряжений в регулярной части эпюры σ_y (пунктирные линии на рис.3.). При таком предположении о распределении напряжений в сечении с трещиной, появляется дополнительный неизвестный параметр r_A , подлежащий определению. В качестве дополнительного условия для нахождения r_A принято отсутствие вращения отсеченной части пластины относительно точки «A». В ре-

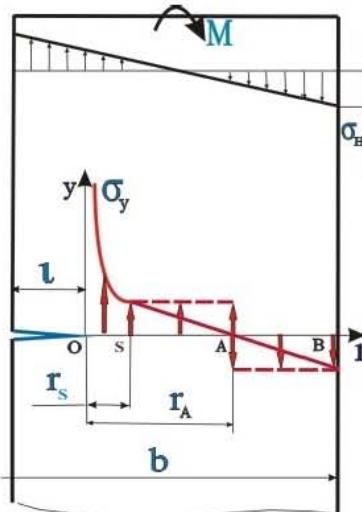


Рис. 3. Фрагмент чистого изгиба пластины конечной ширины с краевой трещиной

зультате получено выражение $f_I(\lambda, \alpha)$ в виде

$$f_I(\lambda, \alpha) = \sqrt{\frac{2 - 3\lambda(1 - \lambda)^2 + 2\sqrt{1 - 3\lambda(1 - \lambda)^2} + 15\lambda^2(1 - \lambda)^4}{3(1 - \lambda)}} \quad (7)$$

Значения $f_I(\lambda, \alpha)$, рассчитанные по формуле (7), сопоставляли с аналогичными значениями из работы [4]. Несмотря на весьма грубое допущение о характере распределения напряжения σ_y в регулярной части, их можно считать вполне приемлемыми для инженерных приложений.

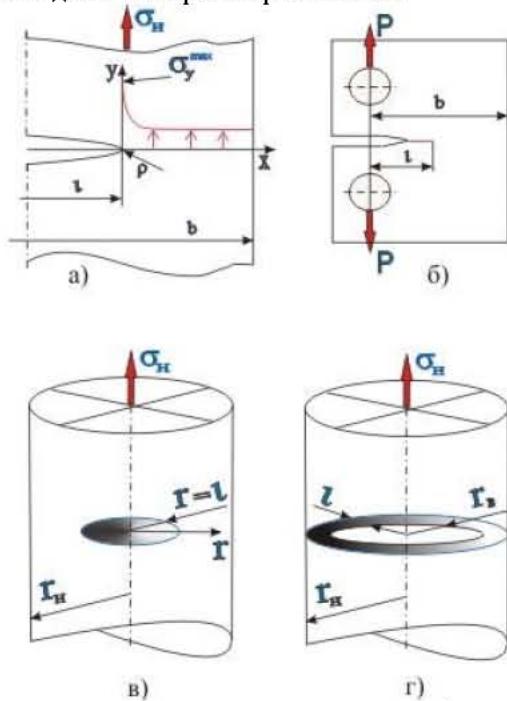


Рис. 4. Пластина с внутренней параболической плоскостью, а - ограниченной шириной с узкой центральной полостью; б - компактный образец; в - цилиндр с внутренней дискообразной трещиной; г - цилиндр с наружной кольцевой трещиной

3. Растворение пластины ограниченной ширины с узкой центральной полостью (рис.4,а). Концевая часть полости имеет радиус закругления ρ и представляет собой параболический цилиндр. В [2] приведены комплексные потенциалы, позволяющие получить распределение напряжений в непосредственной окрестности края полости.

Следуя [2], представим выражение для напряжения σ_y вблизи вершины полости в виде

$$\sigma_y = \frac{\sigma_i \cdot \sqrt{\ell}}{\sqrt{\rho + 2r}} \cdot f_I(\lambda, \eta), \quad (8)$$

где $\eta = \rho/\ell$. Здесь поправочная функция $f_I(\lambda, \eta)$ характеризует влияние безразмерных параметров λ и η на концентрацию напряжений в вершине полости. В этом случае выражение для поправочной функции имеет вид:

$$f_I(\lambda, \eta) = \frac{2 - \lambda}{\sqrt{2 \cdot (2 - \lambda) \cdot (1 - \lambda) + \eta} - \sqrt{\eta}}. \quad (9)$$

При $\eta=0$ (9) переходит в (5) для пластины с трещиной нормального отрыва. Формулы (8) и (9) позволяют найти выражение для оценки коэффициента концентрации напряжений α_{σ} на краю выреза (вдоль горизонтальной оси симметрии):

$$\alpha_{\sigma} = \frac{2 - \lambda}{\sqrt{2 \cdot (2 - \lambda) \cdot (1 - \lambda) \cdot \eta + \eta^2} - \eta}. \quad (9.1)$$

Следует иметь в виду, что в силу асимптотического характера выражения (8), формулы (9) и (9.1) справедливы при $\eta < 1$.

4. Растворение «компактного» образца, служащего для экспериментального определения критического значения K_{IC} (рис.4,б). Опуская промежуточные вычисления, имеем

$$f_I(\lambda) = 3 \sqrt{\frac{b_1(\lambda)}{2b_2(\lambda)} + \frac{\sqrt{b_1(\lambda)^2 + 4b_2(\lambda)b_0(\lambda)}}{2b_2(\lambda)}}, \quad (10)$$

$$\text{где } b_0(\lambda) = \lambda^2 \cdot (4 - 3\lambda)^2 + 1,5 \cdot a(\lambda)^2;$$

$$b_1(\lambda) = 24 \cdot \lambda \cdot (4 - 3\lambda) + 6 \cdot (1 - \lambda) \cdot a(\lambda);$$

$$b_2(\lambda) = 6 \cdot (1 - \lambda)^2;$$

$$a(\lambda) = (4 - 3\lambda)(2 - \lambda(4 - 3\lambda)).$$

В диапазоне значений $0,2 \leq \lambda \leq 0,7$ формула (10) дает вполне приемлемые результаты по сравнению с известными данными [2].

Проиллюстрированный подход позволяет распространить развитый формализм на некоторые осесимметричные задачи ЛМР. Справедливости ради надо отметить, что при этом происходит естественная потеря точности получаемых значений КИН из-за желания располагать аналитическими выражениями.

5. Растворение цилиндрического стержня с внутренней дискообразной трещиной (рис.4,в). Начало системы координат совмещено с центром дисковой трещины, ось ординат совпадает с продольной осью симметрии цилиндра. Формально сохранена структура представления напряжений σ_y вблизи вершины трещины:

$$\sigma_y = \frac{\sigma_H \cdot \sqrt{\ell}}{\sqrt{r - \ell}} \cdot A \cdot f_I(\lambda), \quad (11)$$

где $\ell < r \leq r_H$ – интервал значений текущего радиуса r ; ℓ – «наружный» радиус дискообразной трещины; r_H – наружный радиус цилиндра; $\lambda = \ell/r_H$. Коэффициент « A » определяется из граничного условия $A f_I(0) = 1$ (тело бесконечных размеров с дискообразной трещиной нормального отрыва) и

$$f_I(\lambda) = \frac{3}{2A(r_0 + 3\lambda)\sqrt{r_0}}, \quad (12)$$

где величина безразмерного радиуса

$$r_0 = \frac{-3 + \sqrt{9 + 3(1 - \lambda^2)(2 + \lambda^2)}}{2 + \lambda^2},$$

коэффициент $A = \left(1 + \sqrt{\frac{5}{3}}\right)^{-0.5}$. Следуя [2], коэффи-

циент $A = 2/\pi$, что дает расхождение 3,8% со значением, полученным в данной работе. Сопоставление с табличными данными [2] и рассчитанными по формуле (12) в интервале значений $0 \leq \lambda \leq 0,65$ дает вполне приемлемые результаты для инженерных приложений.

6. Растижение цилиндрического стержня с наружной осесимметричной кольцевой трещиной (рис.4,г). Аналогично предыдущему примеру, окончательное выражение поправочной функции

$$f_I(\lambda) = \frac{(1-\lambda)^2 \sqrt{2 \cdot r_o}}{A(1-\lambda-\lambda r_o)^2}, \quad (13)$$

где

$$r_0 = \frac{3(1+a^2) - 2a^2 \sqrt{3(2+a^2)}}{(1-a)(1+a^2)},$$

$a=I-\lambda$. Коэффициент « A » определен из граничного условия $A f_I(\lambda) = 1.12$ (тело бесконечных размеров с краевой трещиной нормального отрыва) и равен $25/28$. Для практических приложений (13) A принимает одно из двух значений: $A = 25/28$ при $0 \leq \lambda \leq 0,15$ и $A = 1$ при $0,15 \leq \lambda \leq 0,9$. Сопоставление значений $f_I(\lambda)$ с данными [5] дает вполне приемлемые результаты: в интервале значений $0 \leq \lambda \leq 0,9$ расхождение не превышает 7%.

7. Тонкостенная труба с внутренней кольцевой трещиной под действием внутреннего давления P (рис.5, изгиб стенки отсутствует, $M = 0$). Использование предлагаемого подхода приводит к формуле (5), т.е. дает одинаковые значения при расчете значений $f_I(\lambda)$ как и для случая растяжения пластины с внутренней трещиной. Однако при расчете K_I по формуле (1) следует использовать выражение для номинального напряжения в виде $\sigma_n = P(\beta + 1)/(4(\beta - I))$, где P – внутреннее давление, $\beta = r_h/r_e$, r_h и r_e – наружный и внутренний радиусы трубы соответственно. Относительная длина трещины $\lambda = l/(r_h - r_e)$.

8. Тонкостенная труба с внутренней кольцевой трещиной под действием внутреннего давле-

ния P и граничных условий, приводящих к чистому изгибу стенки трубы (рис.5, $M \neq 0$).

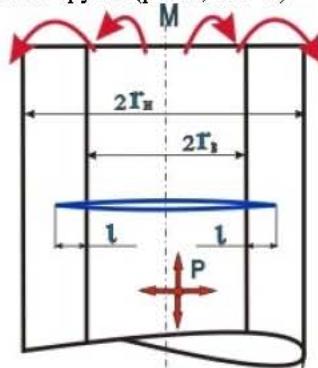


Рис. 5. Фрагмент тонкостенной трубы с внутренней кольцевой трещиной

Такой вид нагружения может испытывать стенка трубы вблизи жесткой заделки, например, если тонкостенная труба заглушена с торца массивным донышком. Используя данный подход и положения теории пластин и оболочек, имеем $f_I(\lambda, \beta) =$

$$= \frac{\sqrt{[12\chi^2(1-\delta)-18\alpha+6\sqrt{(2\chi^2(1-\delta)-3\alpha)^2+\alpha+24\cdot\alpha^2}]} \cdot (1-\delta)\cdot(1-\lambda)}{(1-\delta)\cdot(1-\lambda)}. \quad (14)$$

Здесь $\chi = (3(1-\nu^2))^{-0.5}$; ν – коэффициент

Пуассона; $\delta = 1/\beta$; $\alpha = \lambda\chi^2(1-\delta)(1-\lambda)^2$.

Таким образом, полученные результаты показывают, что предложенный подход к вычислению КИН вполне приемлем для инженерных оценок трещиностойкости элементов конструкций с дефектами типа трещин. По мнению авторов, разработанный подход особенно эффективен в сочетании с такой мощной вычислительной оболочкой, какой является Mathcad 13.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Парトン, В.З., Морозов, Е.А. Механика упругопластического разрушения. - М.: Наука, 1974. - 416с.
2. Черепанов, Г.П. Механика хрупкого разрушения. - М.: Наука, 1974. - 640с.
3. Бакиши, О.А., Зайцев, Н.Л., Гооге, С.Ю. Определение коэффициентов интенсивности напряжений K_I и K_{II} методом фотоупругости. – Заводская лаборатория, 1981, т.47, №4, с.73-76.
4. Петерсон, Р. Коэффициенты концентрации напряжений. - М.: Мир, 1977. -320с.
5. Хеллан, К. Введение в механику разрушения Пер. с англ. - М.: Мир, 1988. - 364с.

□Авторы статьи:

Гооге

Сергей Юрьевич,
канд. техн. наук, директор
Челябинского филиала
ОАО СК «БАСК»,
тел. 8-351-233-44-65

Таболин

Илья Сергеевич,
исполнительный директор
ЗАО «Челябинские инте-
рактивные кабельные
сети»,
тел. 8-351-263-24-76

Ширяев

Евгений Иосифович,
канд. техн. наук, доцент
каф. «Технология машино-
строения» КузГТУ,
тел. (384-2)39-69-54

Шрон

Леонид Борисович,
канд. техн. наук, доц. каф.
«Технология машино-
строения» (Севастополь-
ский национальный техни-
ческий университет), тел.
8-10-380-69-2-48-88-64