

DOI: 10.26730/1999-4125-2018-2-53-60

УДК 622.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УПАКОВКИ ЧАСТИЦ РАЗДРОБЛЕННЫХ ГОРНЫХ ПОРОД

THEORETICAL FOUNDATIONS OF THE MATHEMATICAL MODEL OF CRUSHED ROCK FINES PACKAGING

Шабаяев Сергей Николаевич,

кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой, e-mail: shabaev81@rambler.ru
Sergey N. Shabaev, C.Sc., Associate Professor, Head of Department

Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева, 650000, Россия,
г. Кемерово, ул. Весенняя, 28
T.F. Gorbachev Kuzbass State Technical University, 28 Vesennyaya street, Kemerovo, 650000, Russian Federation

Аннотация: При строительстве автомобильных дорог угольных разрезов Кузбасса используют, преимущественно, попутно добываемые вскрышные и (или) углевлещающие раздробленные горные породы, которые под действием воды размягчаются, из-за чего происходит быстрое разрушение полотна. Для того чтобы можно было эффективно их применять для устройства дорожных одежд автомобильных дорог открытых горных разработок, необходимо, чтобы они имели минимальную водопроницаемость, а это можно обеспечить за счет регулирования гранулометрического состава. Чтобы разработать математическую модель, позволяющую прогнозировать объемную массу раздробленных горных пород заданного гранулометрического состава, необходимо иметь методику, позволяющую адекватно и достоверно оценивать возможность упаковки частиц различного размера. Существующие математические модели плотности упаковки разработаны, преимущественно, для одномерных элементов, равномерно распределенных в пространстве. Раздробленные горные породы состоят из частиц различного размера, отличающихся в несколько десятков тысяч раз, следовательно, имеющиеся теории и модели к ним не применимы, так как не учитывают указанные особенности. В статье на основе анализа методов и подходов, применяемых в теории упаковки, предложена гипотеза об упаковочном объеме шарообразных частиц, теоретически и экспериментально доказана ее адекватность, достаточная для практических целей точность и возможность использования применительно к раздробленным горным породам. Установлено, что упаковочный объем частицы раздробленной горной породы прямо пропорционален фактическому объему аналогичного по размеру шара и обратно пропорционален степенной функции от плотности упаковки частиц, составляющей от 0,56 до 0,62.

Abstract: In construction of motor roads at Kuzbass open-cast coal mines, the associated overburden and / or coal-bearing crushed rocks are mainly used, which become soft under the action of water resulting in rapid destruction of the road bed. In order to effectively use this rock for the construction of open-cast mine motor road surfacing, it needs to have minimum water permeability, and this can be achieved by regulating the particle size distribution. To develop a mathematical model that allows predicting the bulk mass of crushed rock of a given granulometric composition, it is necessary to have a technique that allows to adequately and reliably estimate the possibility of packing the particles of different sizes. Existing mathematical models of packing density are developed, mainly, for single-dimensional elements, evenly distributed in space. The crushed rocks consist of particles of different sizes, differing in several tens of thousands times, hence, the available theories and models are not applicable to them, since they do not take into account these features. The hypothesis on the packing volume of globular particles, based on the analysis of methods and approaches used in the theory of packaging, has been proposed in the article; its adequacy, sufficient for practical purposes, accuracy and the possibility of using it for crushed rocks have been theoretically and experimentally proven. It has been established that the packaging volume of any crushed rock particle is directly proportional to the actual volume of a ball having a diameter similar to that of a particle and is inversely proportional to the power function of the particle packing density, ranging from 0.56 to 0.62..

Ключевые слова: раздробленные горные породы, упаковка, частицы, открытые горные разработки, шар, дорога.

Key words: *crushed rocks, packing, particles, open-cast mining, ball, road.*

Несмотря на то, что проектные организации при разработке проектов строительства автомобильных дорог открытых горных разработок в качестве покрытий и оснований дорожных одежд предусматривают, преимущественно, слои из нерудных строительных материалов, в реальности на угольных разрезах Кузбасса в большей степени применяют вскрышные или углевмещающие горные породы. Однако основная проблема их использования заключается в размягчаемости горных пород, что приводит к потере прочности и, в итоге, быстрому разрушению дорожной одежды [1-5].

Для того чтобы снизить негативное воздействие воды на несущую способность дорожных одежд, необходимо обеспечить минимальную водопроницаемость слоев из раздробленных горных пород, а это можно достигнуть путем регулирования гранулометрического состава. В связи с этим требуется разработка математической модели, дающей возможность на основе известного гранулометрического состава прогнозировать объемную массу раздробленных горных пород, от которой зависит их водопроницаемость. Однако для этого требуется методика, позволяющая адекватно и достоверно оценивать возможность упаковки частиц различного размера.

На сегодняшний день достаточно много различных математических моделей, посвященных упаковке частиц. Это задачи, решаемые Берналом [6] и Скоттом [7] в условиях неограниченного пространства, те же задачи, но с учетом пристенного эффекта, рассмотренные в работах [8-11], фундаментальные и прикладные аспекты теории перколяции [12-16], а также множество других работ [17-25 и др.].

При моделировании плотности упаковок, большинство теорий и методов основываются на том, что все частицы (или другие рассматриваемые элементы) имеют форму шара, причем одинакового размера. В раздробленной горной породе частицы форму шара не имеют, а их размер колеблется в пределах от близкого к нулю до 100...200 мм и более, то есть соотношение между наибольшим и наименьшим размером может достигать 10 тысяч раз и более. Таким образом, для прогнозирования объемной массы раздробленных горных пород необходима математическая модель, которая учитывала бы эти особенности.

Кроме шара, существующие математические модели также рассматривают элементы (конфигурации) в виде простого, гранцентрированного и объемно-центрированного куба, тетраэдра, октаэдра и других. Несмотря на то, что данные формы уже имеют острые грани, также как и обломки раздробленной горной породы, все же в реальности форма частиц побочного продукта открытых горных работ настолько разнообразна и не повто-

ряема, что вероятность образования частиц любой другой правильной формы настолько же мала, насколько она мала и для формы шара. Поэтому для дальнейшей разработки математической модели упаковки частиц раздробленной горной породы целесообразно принять допущение, что все частицы имеют форму шара.

Для того чтобы учесть различия в размерах частиц предлагается следующий алгоритм. Сначала в центральную часть единичного пространства, представляющего собой простой куб (микроструктурный подход), вписывается самый крупный шар. Далее в оставшуюся свободную часть пространства вписывается шар меньшего размера исходя из гипотезы, что шар может быть вписан, если его упаковочный объем \bar{V} равен:

$$\bar{V} = \frac{V}{C_{up}^{(16-20 \cdot C_{up})}}$$

где V – фактический объем шара;

C_{up} – плотность упаковки шаров.

За плотность упаковки принимается плотность упаковки одномерных шаров в гравитационном поле пространства. Из работ [6, 7] известно, что плотность упаковки, установленная экспериментальным путем, составляет от 0,60 для наименее плотного состояния до 0,64 для наиболее плотного состояния. При этом предельная плотность упаковки одномерных шаров, полученная математическим расчетом либо путем математического моделирования, по данным Дж. Берримана составляет $0,64 \pm 0,02$ [21], П. Джалали и М. Ли – 0,6394 [23], В. Г. Бондарева – 0,63964 [19]. Б.С. Радовский [17, 18] теоретически установил, что наиболее вероятная и средняя плотность упаковки одномерных шаров в гравитационном поле составляет 0,613 и 0,628 соответственно.

Таким образом, можно сделать вывод, что плотность упаковки одномерных шаров в гравитационном поле может находиться в интервале от 0,60 до 0,64. Примем, что плотность упаковки всех шаров составляет 0,63.

Докажем адекватность и достаточную для практических целей точность выдвинутой гипотезы. Пусть имеется единичный объем (пространство), в центральную часть которого вписан шар с диаметром $D_1=1$. Принимая допущение, что все шары равномерно распределены в пространстве, единичный объем составляет:

$$V_{ed} = \frac{\pi \cdot D_1^3}{6 \cdot C_{up}} = 0,831$$

Так как единичный объем меньше 1, то длина стороны единичного объема составит 0,940. Рассчитаем фактический объем шара с диаметром D_1 ,

размещаемый в пределах центральной части единичной области:

$$V_1 = \frac{\pi \cdot D_1^3}{6} - 6 \cdot \pi \cdot \left(\frac{a-a_1}{2}\right)^2 \cdot \left[\frac{D_1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a-a_1}{2}\right)\right] = 0,515$$

где a – длина стороны единичного объема $1 \times 1 \times 1$, равная 1,0;

a_1 – длина стороны уточненного единичного объема, равная 0,940.

Объем свободного пространства, оставшегося после упаковки частицы с диаметром D_1 , составляет:

$$[V] = V_{ed} - V_1 = 0,316$$

Упаковочный объем шара с диаметром D_2 составляет:

$$\bar{V}_2 = \frac{\pi \cdot D_2^3}{6 \cdot C_{up}^{3,4}} = 0,315$$

Тогда количество частиц с диаметром D_2 , которые можно разместить в оставшемся свободном пространстве, равно:

$$N_2 = \frac{[V]}{\bar{V}_2} = 1,003$$

Следовательно, одну частицу упаковать можно.

Проверим полученный результат посредством геометрических построений и расчетов. Из работы [26] известно, что плотность упаковки одноразмерных шарообразных частиц можно определить из зависимости:

$$C_{up} = \frac{\pi}{6 \cdot k_x \cdot k_y \cdot k_z} \quad (1)$$

где k_x, k_y, k_z – коэффициенты, учитывающие расстояние между частицами соответственно по осям x, y и z , причем они равны 1, когда расстояние между центрами двух шаров равно диаметру шара D_1 .

Так как плотность упаковки шаров с диаметром D_1 составляет 0,63, то имеем:

$$k_x \cdot k_y \cdot k_z = 0,831$$

Если принять, что $k_x \cdot k_y = 1$, то значение коэффициента $k_z = 0,831$. Это соответствует схеме упаковки, представленной на рисунке 1. Если центр шара с диаметром $D_2 = 0,5D_1$ разместить в точке O , то она там пометиться не сможет,

так как расстояние $A_1 A_2 = 0,414D_1$. Таким образом, для того, чтобы поместить шар с диаметром D_2 , его необходимо либо поднять (опустить), либо раздвинуть наиболее крупные шары по осям x и y . Расчеты показывают, что поднять (опустить) шар

возможно максимально на величину $0,126D_1$, однако это все равно не достаточно, так как без раздвижки более крупных шаров упаковать более мелкий шар не возможно.

Рассмотрим вариант, при котором раздвигаем крупные шары по осям x и y . Для того чтобы шар с диаметром D_2 смог разместиться между точками A_1' и A_2 необходимо, чтобы расстояние между данными точками составляло $0,5D_1$. Тогда расстояние между точками O_1' и O_2 должно составлять $1,5D_1$, следовательно $O_1 O_1' = 1,061D_1$, то есть $k_x = k_y = 1,061$ (рисунок 2).

Предположим, что шар с центром в точке O_3 касается двух шаров с центрами в точках O_1' и O_2' (в условиях гравитационного поля точки контакта должны быть обязательными). В этом случае имеем:

$$k_z = O_3 C = \sqrt{D_1^2 - \left(\frac{1,061 \cdot D_1}{2}\right)^2} = 0,848$$

Проверим плотность упаковки крупных шаров:

$$C_{up} = \frac{\pi}{6 \cdot 1,061 \cdot 1,061 \cdot 0,848} = 0,550$$

Расчеты показывают, что плотность упаковки крупных шаров не соответствует условию задачи, значит необходимо осуществить вращение шара с центром в точке O_3 относительно шаров с центрами в точках O_1' и O_2' . Уравнение окружности будет иметь вид (рисунок 3):

$$(dx)^2 + z^2 = (0,848 \cdot D_1)^2$$

По формуле (1) рассчитываем величину k_z для того, чтобы плотность упаковки шаров соответствовала условию задачи. В нашем случае $k_z = 0,740$. Тогда имеем:

$$dx = \sqrt{(0,848 \cdot D_1)^2 - (0,740 \cdot D_1)^2} = 0,414 \cdot D_1$$

Рассчитаем расстояние OO_3' :

$$OO_3' = \sqrt{(0,74 \cdot D_1)^2 + (0,116 \cdot D_1)^2} = 0,749 \cdot D_1$$

Так как $OO_3' \approx D_1/2 + D_2/2 = 0,75D_1$, то можно утверждать, что при плотности упаковки шаров несколько меньше 0,63, поместить шар с диаметром D_2 в оставшееся свободное пространство возможно, то есть гипотеза подтверждена геометрическими построениями и расчетами.

Для экспериментальной проверки выдвинутой гипотезы был поставлен лабораторный эксперимент, заключающийся в определении плотности упаковки частиц раздробленной горной породы заданных фракций при двух методах уплотняющего воздействия – статическом и вибрационном. При статическом методе уплотняющего воздействия раздробленная горная порода уплотнялась на прессе под давлением 2,5 МПа, а при вибрационном – путем уплотнения на виброплощадке при

амплитуде колебаний $0,40 \pm 0,05$ мм и частоте колебаний – 48 ± 3 Гц с постоянным пригрузом, обеспечивающим давление 4 кПа. Уплотнение производилось при оптимальной влажности.

Так как сразу надежно спрогнозировать объемную массу, а, следовательно, и плотность упаковки однофракционных частиц раздробленной горной породы не представлялось возможным, то эксперимент был проведен в два этапа. На первом этапе плотность упаковки частиц определялась

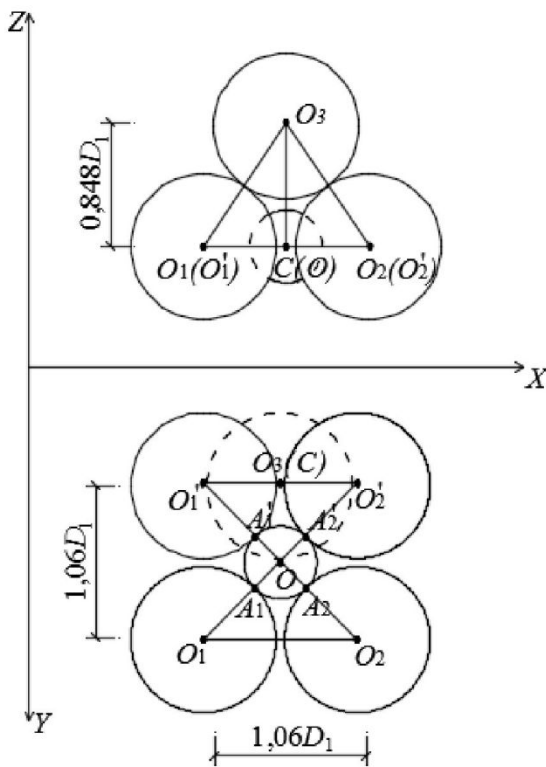


Рис. 1. Схема упаковки без раздвижки с диаметром D_1 .

Fig. 1. Scheme of packaging without moving apart the balls with diameter D_1

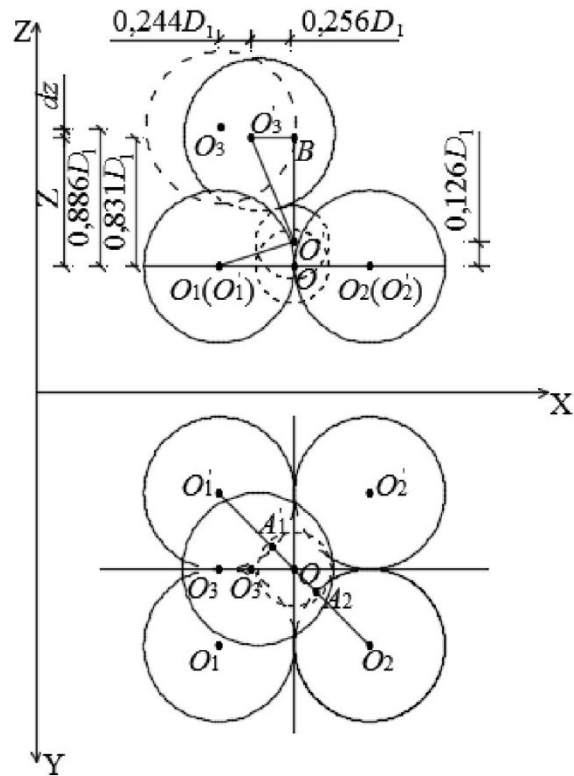


Рис. 2. Схема упаковки с раздвижкой шаров с диаметром D_1

Fig. 2. Scheme of packaging with moving apart the balls with diameter D_1

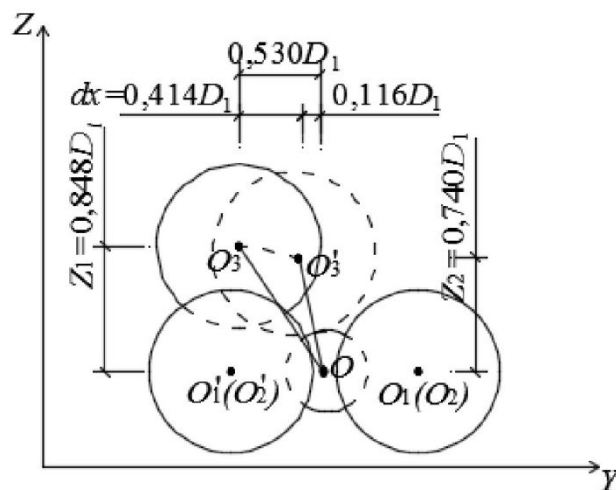


Рис. 3. Схема переупаковки шаров

Fig. 3. Scheme of balls repackaging

Таблица 1. Результаты эксперимента по оценке плотности упаковки частиц раздробленной горной породы при статическом методе уплотняющего воздействия
 Table 1. The results of the experiment on the evaluation of the packing density of crushed rock particles under the static compaction method

№ п/п	Размер частиц, мм (доля частиц, % по массе)	Плотность частиц, кг/м ³	Оптимальная влажность, %	Объемная масса, кг/м ³	Объемная масса без учета влажности, кг/м ³	Плотность упаковки частиц
1	10-20 (100)	2760	5	1700	1620	0,587
2	5-10 (100)			1740	1660	0,601
3	2,5-5 (100)			1720	1640	0,594
4	1,25-2,5 (100)			1820	1730	0,623
5	10-20 (92) 5-10 (8)			1870	1780	0,645
6	5-10 (92) 2,5-5 (8)			1900	1810	0,656
7	2,5-5 (92) 1,25-2,5 (8)			1880	1790	0,649

Таблица 2. Результаты эксперимента по оценке плотности упаковки частиц раздробленной горной породы при вибрационном методе уплотняющего воздействия
 Table 2. Results of the experiment on the evaluation of the packing density of crushed rock particles under the vibrating compaction method

№ п/п	Размер частиц, мм (доля частиц, % по массе)	Плотность частиц, кг/м ³	Оптимальная влажность, %	Объемная масса, кг/м ³	Объемная масса без учета влажности, кг/м ³	Плотность упаковки частиц
1	10-20 (100)	2760	4	1680	1620	0,587
2	5-10 (100)			1780	1710	0,620
3	2,5-5 (100)			1740	1670	0,605
4	1,25-2,5 (100)			1720	1650	0,598
5	10-20 (92) 5-10 (8)			1840	1770	0,641
6	5-10 (92) 2,5-5 (8)			1870	1800	0,652
7	2,5-5 (92) 1,25-2,5 (8)			1890	1820	0,659

для одной фракции раздробленной горной породы, а на втором этапе – для смеси двух соседних фракций. При этом содержание частиц второй фракции было определено из зависимости:

$$v_2 = \frac{C_{up}^{(16-20 \cdot C_{up})} \cdot \left(\frac{1}{C_{up}} - 1 \right)}{1 + C_{up}^{(16-20 \cdot C_{up})} \cdot \left(\frac{1}{C_{up}} - 1 \right)}$$

где C_{up} – плотность упаковки однофракционных частиц, полученная по результатам первого этапа эксперимента.

Результаты проведенного эксперимента представлены в таблицах 1, 2. В связи с тем, что среднее значение плотности упаковки частиц разных фракций не зависимо от метода уплотняющего воздействия приблизительно одинаковая и состав-

ляет 0,601...0,602, то содержание частиц более крупной фракции принято 92 %, а частиц менее крупной фракции – 8 %.

Анализ полученных экспериментальных данных позволил выявить следующее:

1. Плотность упаковки однофракционных частиц (частицы в пределах одной фракции условно приняты однофракционными) раздробленной горной породы незначительно отличается от плотности упаковки однофракционных шарообразных частиц в условиях гравитационного поля, следовательно, сделанное допущение о том, что все частицы раздробленной горной породы условно имеют форму шара, приемлемо.

2. Фактическая плотность упаковки однофракционных частиц раздробленной горной породы после уплотнения составляет от 0,587 до 0,623, что приблизительно на 0,02-0,04 (3-7 %) меньше, чем для однофракционных шаров в условиях гравитационного поля. Следовательно, если рассматри-

вать раздробленную горную породу в виде совокупности шарообразных частиц различного размера, то плотность упаковки этих частиц должна составлять от 0,56 до 0,62.

3. Фактическая плотность упаковки смеси двухразмерных частиц (частиц из двух соседних фракций) раздробленной горной породы при условии, что крупных частиц содержится 92 %, а мелких частиц 8 % по массе, составляет от 0,641 до 0,659, при этом по данным теоретических исследований при плотности упаковки шарообразных частиц 0,6015 единичный объем составляет 0,8705, условный фактический объем частицы с

диаметром $D_1 = 0,5189$, условный фактический объем частицы с диаметром $D_2 = 0,0451$, а общая плотность упаковки частиц – 0,648, следовательно, выдвинутая гипотеза подтверждается экспериментальными данными.

На основе выполненных теоретических исследований, подтвержденных экспериментальным путем, можно сделать вывод, что упаковочный объем частицы раздробленной горной породы прямо пропорционален фактическому объему аналогичного по размеру шара и обратно пропорционален степенной функции от плотности упаковки частиц, составляющей от 0,56 до 0,62.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chernobai V. I. Development and characterization of formulation of dust-suppressant used for stope road in open-pit mines // *Journal of Coal Science and Engineering (China)*. 2013 (June), vol. 19, is. 2, pp. 219-225.
2. Moldovan D. V. The rock pile quality control during the blasting operations at the construction materials open-cast mines // *Journal of Industrial Pollution Control*. 2017, vol. 33, is. 1, pp. 1007-1012.
3. Solovyev G. V. Improving of Performance Characteristics During Mechanical Stabilization of Quarry Haul Roads with Stiff Polymeric Tensar Triax Hexagonal Geogrid / G. V.Solovyev K. I.Vatchnadze // *Procedia Engineering*. 2017, vol. 189, pp. 666-672.
4. Sara L. Jackson. Dusty roads and disconnections: Perceptions of dust from unpaved mining roads in Mongolia's South Gobi province // *Geoforum*. 2015, vol. 66, pp. 94-105.
5. Barry Kinga, Marcos Goycoolea, A. Newman. Optimizing the open pit-to-underground mining transition // *European Journal of Operational Research*. 2017, vol. 257, pp. 297-309.
6. Bernal J. D. The structure of liquids. *Proc. Royal Soc. London // Ser A*. 1964, vol. 280, no. 1382, pp. 299-322.
7. Scott G. P. Packing of spheres. *Nature*. 1960, vol. 188, no. 4754, pp. 2571-2607.
8. Mueller G. E. Radial porosity in packed beds of spheres // *Powder Technology*. 2010, no. 203, pp. 626-633.
9. Roozbahani M. M. Effect of rectangular container's sides on porosity for equal-sized sphere packing / M. M. Roozbahani, B. B. K. Huat, A. Asadi // *Powder Technology*. 2012, no. 224, pp. 46-50.
10. Wensrich C. M. Boundary structure in dense random packing of monosize spherical particles // *Powder Technology*. 2012, no. 219, pp. 118-127.
11. Бондарев В. Г. Математическое моделирование пристенного эффекта в случайных упаковках систем частиц // *Современные тенденции развития науки и технологий*. – 2015. – № 2-1. – С. 12-15
12. Kesten H. *Percolation theory for mathematicians*. Birkhauser. Boston, 1982, 392 p.
13. Scher H., Zallen R. Critical density in percolation processes // *Journ. Chem. Phys.* 1970, vol. 53, pp. 3759-3760.
14. Fitzpatrick J. P., Malt R. B., Spaepen F. Percolation theory and the conductivity of random close packed mixtures of hard spheres // *Phys. Lettes*, pp. 207-211.
15. Новиков В. В. К определению упругих модулей перколяционных систем // *Инженерно-физический журнал*. – 1989. – Т. 57. - № 3. – С. 485-490.
16. Шкловский Б. И., Эфрос, А. Л. Электронные свойства легированных полупроводников. – М. : Наука, 1979. – 416 с.
17. Радовский Б. С. Плотность беспорядочной упаковки твердых частиц сферической формы // *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. – 1972. - № 4. – С. 193-198.
18. Radovskiy B., Heckendorf H. Besonderheiten der deformation granulierter Medien. – 5. Tagung über. Probleme und Methoden der Mathematischen Physik. H.I. Wissenschaftliche Schriftenreihe der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt. 1975, pp. 171-178.
19. Бондарев В. Г. Предельная плотность случайной упаковки // *Современные тенденции развития науки и технологий*. – 2015. – № 2-1. – С. 15-18.
20. Мигаль Л. В. Стохастическая упаковка систем сферических моночастиц на плоскости / Л. В. Мигаль, В. Г. Бондарев // *Региональный вестник молодых ученых*. – 2005. – № 3/4(6). – С. 5-7.
21. Berryman J. G. Random close packing of hard spheres and disks // *Phys. Rev. A*. 1983, vol. 27, no. 2, pp. 1053-1061.

22. Лесин, Ю.В. Влияние граничного эффекта на физико-структурные характеристики раздельнозернистой среды / Ю.В. Лесин, С.О. Марков, М.А. Тюленев // Горный информационно-технический бюллетень. - №9. - 2002. - С. 213.
23. Марков, С.О. Структурное моделирование насыпных отвальных массивов на разрезах Кузбасса / С.О. Марков // Дис. ... канд. техн. наук. - Кемерово, 2003. - 127 с.
24. Кандауров И. И. Механика зернистых сред и ее применение в строительстве. – 2-е изд., испр. и перераб. – Л.: Стройиздат, Ленингр. отд-ние, 1988. – 280 с.
25. Китайгородский А. И. Порядок и беспорядок в мире атомов. – М.: Наука, 1984. – 162 с.
26. Шабаев С. Н. Некоторые вопросы решения задачи о проектировании смеси оптимального зернового состава // Вестник КузГТУ. – Кемерово, 2005. – № 4. – С. 82-84.

REFERENCES

1. Chernobai V. I. Development and characterization of formulation of dust-suppressant used for stope road in open-pit mines // Journal of Coal Science and Engineering (China). 2013 (June), vol. 19, is. 2, pp. 219-225.
2. Moldovan D. V. The rock pile quality control during the blasting operations at the construction materials open-cast mines // Journal of Industrial Pollution Control. 2017, vol. 33, is. 1, pp. 1007-1012.
3. Solovyev G. V. Improving of Performance Characteristics During Mechanical Stabilization of Quarry Haul Roads with Stiff Polymeric Tensar Triax Hexagonal Geogrid / G. V.Solovyev K. I.Vatchnadze // Procedia Engineering. 2017, vol. 189, pp. 666-672.
4. Sara L. Jackson. Dusty roads and disconnections: Perceptions of dust from unpaved mining roads in Mongolia's South Gobi province // Geoforum. 2015, vol. 66, pp. 94-105.
5. Barry Kinga, Marcos Goycoolea, A. Newman. Optimizing the open pit-to-underground mining transition // European Journal of Operational Research. 2017, vol. 257, pp. 297-309.
6. Bernal J. D. The structure of liquids. Proc. Royal Soc. London // Ser A. 1964, vol. 280, no. 1382, pp. 299-322.
7. Scott G. P. Packing of spheres. Nature. 1960, vol. 188, no. 4754, pp. 2571-2607.
8. Muelle, G. E. Radial porosity in packed beds of spheres // Powder Technology. 2010, no. 203, pp. 626-633.
9. Roozbahani M. M. Effect of rectangular container's sides on porosity for equal-sized sphere packing / M. M. Roozbahani B. B. K. Huat, A. Asadi // Powder Technology. 2012, no. 224, pp. 46-50.
10. Wensrich C. M. Boundary structure in dense random packing of monosize spherical particles // Powder Technology. 2012, no. 219, pp. 118-127.
11. Bondarev V. G. Matematicheskoe modelirovanie pristennogo ehffekta v slu-chajnyh upakovkah sistem chastits // Sovremennye tendentsii razvitiya nauki i tekhnologij. – 2015. – № 2-1. – S. 12-15. (rus)
12. Kesten H. Percolation theory for mathematicians. Birkhauser. Boston, 1982, 392 p.
13. Scher H., Zallen R. Critical density in percolation processes // Journ. Chem. Phys. 1970, vol. 53, pp. 3759-3760.
14. Fitzpatrick J. P., Malt R. B., Spaepen F. Percolation theory and the conductivity of random close packed mixtures of hard spheres // Phys. Lettes, pp. 207-211.
15. Novikov V. V. K opredeleniyu uprugih modulej perkolyatsionnyh sistem // Inzhenerno-fizicheskij zhurnal. – 1989. – T. 57. - № 3. – S. 485-490. (rus)
16. Shklovskij B. I., Ehfros, A. L. Ehlektronnye svoystva legirovannyh polu-provodnikov. – M. : Nauka, 1979. – 416 p. (rus)
17. Radovskij B. S. Plotnost' besporyadochnoj upakovki tverdyh chastits sfericheskoy formy // Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela. – 1972. - № 4. – S. 193-198. (rus)
18. Radovskiy B., Heckendorf H. Besonderheiten der deformation granulierter Medien. – 5. Tagung über. Probleme und Methoden der Mathematischen Physik. H.I. Wissenschaftliche Schriftenreihe der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt. 1975, pp. 171-178.
19. Bondarev V. G. Predel'naya plotnost' sluchajnoj upakovki // Sovremennye tendentsii razvitiya nauki i tekhnologij. – 2015. – № 2-1. – S. 15-18. (rus)
20. Migal' L. V. Stohasticheskaya upakovka sistem sfericheskikh monochastits na ploskosti / L. V. Migal', V. G. Bondarev // Regional'nyj vestnik molodyh uchenyh. – 2005. – № 3/4(6). – S. 5-7. (rus)
21. Berryman J. G. Random close packing of hard spheres and disks // Phys. Rev. A. 1983, vol. 27, no. 2, pp. 1053-1061.
22. Lesin, YU.V. Vliyaniye granichnogo effekta na fiziko-strukturnyye kharakteristiki razdel'nozer-nistoy sredy / YU.V. Lesin, S.O. Markov, M.A. Tyulenev // Gornyy informatsionno-tekhnicheskij byulle-ten'. - №9. - 2002. - S. 213.

23. Markov, S.O. Strukturnoye modelirovaniye nasypnykh otval'nykh massivov na razrezakh Kuzbassa / S.O. Markov // Dis. ... kand. tekhn. nauk. - Kemerovo, 2003. - 127 s.
24. Kandaurov I. I. Mekhanika zernistykh sred i ee primeneniye v stroitel'stve. – 2-e izd., ispr. i pererab. – L.: Strojizdat, Leningr. otd-nie, 1988. – 280 p. (rus)
25. Kitajgorodskij A. I. Poryadok i besporyadok v mire atomov. – M.: Nauka, 1984. – 162 p. (rus)
26. Shabaev S. N. Nekotorye voprosy resheniya zadachi o proektirovanii smesi optimal'nogo zernovogo sostava // Vestnik KuzGTU. – Kemerovo, 2005. – № 4. – S. 82-84. (rus)

Поступило в редакцию 24.04.2018

Received 24.04.2018