



УДК 622.822.2: 622.271: 519.6

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ИНЖЕНЕРНЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

Сирота Д. Ю. Бабушкин М. А.

Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачёва

Аннотация.

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) являются одним из фундаментальных способов физико-математического моделирования в различных естественно-научных областях знания. Примерами могут служить второй закон Ньютона в механике, закон действия масс Гульдберга в химии, закон роста популяции Ферстера в экологии, закон охлаждения Ньютона в термодинамике. Результатом такого моделирования (решения прямой задачи) является функция, которая удовлетворяет как самому ОДУ, так и дополнительным начально-краевым условиям. На практике же требуется решать обратные задачи по определению различных элементов ОДУ при условии, что дискретные значения функции-решения этого ОДУ уже известны, как результат наблюдений или натуральных измерений. В представленной статье рассматриваются три обратные задачи восстановления начально-краевых условий для ОДУ по известным экспериментальным данным. Задача решается с помощью метода регуляризации А. Н. Тихонова, который заключается в поиске минимума модифицированного функционала невязки. Для поиска минимума используются два итерационных метода нулевого порядка: метод Хука-Дживса и вариант метода случайного поиска – метод «имитации отжига». Приводится их сравнительный анализ, как между собой, так и с точными аналитическими решениями поставленных задач. Использование методов нулевого порядка преследует две цели: позволяет избавиться от вспомогательной и зачастую не эффективной процедуры поиска градиента Фреше от функционала А.Н. Тихонова, а также позволяет более эффективно продвигаться по дну оврага поверхности функционала.

Информация о статье

Принята 26 августа 2018 г.

Ключевые

Дифференциальные уравнения, обратная начально-краевая задача, метод регуляризации А. Н. Тихонова, метод имитации отжига.

слова:

THE SOLVING OF SOME INVERSE PROBLEMS FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION IN ENGINEERING APPLICATIONS

Dmitry Yu. Sirota, Mark A. Babushkin

T.F. Gorbachev Kuzbass State Technical University

Abstract.

Ordinary differential equations (ODE) are one of the fundamental methods of physical and mathematical modeling for various engineering problems. For example: the Newton's second law in mechanics, the Guldberg's law of masses action in chemistry, the Förster's law of the population growth in ecology, the Newton's law of cooling in thermodynamics. The result of such modeling (solution a direct problem) is a function that satisfies both the ODE itself and additional initial-boundary conditions. In applied problems it is required to solve inverse problems on definition of various



Article info

Received August 26, 2018

Keywords: The differential equation, the inverse initial-boundary value problem, the A.N. Tikhonov regularization method, simulated annealing method.

elements for ODE provided that discrete values of the specified function are already known as result of observations and full-scale measurements. In this paper let us introduce three inverse problems of determination the initial and boundary values for ordinary differential equation by the known experimental values. This problem let us solve by the A.N. Tikhonov's regularization method which is to find the minimum of the modified residual functional. Let us find this minimum by two zero-order sub methods: the Hook-Jives pattern search method and «simulated annealing» method. We will compare these methods with each other and with the analytical exact solution. The aim of the using these methods are: don't calculate the Frechet gradient of the Tikhonov functional and effective movement on the ravine bottom.

1. Введение / Introduction

Как известно, дифференциальные уравнения вообще, и обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) в частности, являются одним из базовых методов математического моделирования в различных отраслях науки: физики, химии, экономики, биологии. Произошло это потому, что дифференциальные уравнения позволяют устанавливать взаимосвязи между изменяющимися характеристиками (во времени и пространстве) и скоростями и ускорениями изменений других характеристик во времени и пространстве.

Приведём несколько основных примеров дифференциальных уравнений.

Пример 1 (механика). Второй закон Ньютона (одна из возможных формулировок). В инерциальных системах отсчёта производная импульса (количества движения, величины $\bar{p} = m\bar{v}$, где m – масса, кг; p – импульс, кг·м·сек⁻¹; v – скорость, м·сек⁻¹) материальной точки по времени t , сек равна действующей на него силе – $\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F}$.

Пример 2 (химия). Закон действия масс Гульдберга. Скорость, с которой простые вещества превращаются в соединение, пропорциональна произведению количества тех веществ, которые ещё не соединились – $\frac{dx}{dt} = k(N - nx)(M - mx)$, где x – число молекул соединения, образовавшихся к моменту t ; k – коэффициент пропорциональности, N, M – стартовое количество молекул двух веществ в начале процесса соединения; n, m – количество молекул обоих веществ в одной молекуле соединения.

Пример 3 (Экология). Закон роста популяции Фёрстера. Скорость изменения численности особей P равна разности между количеством родившихся и количеством умерших особей – $\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$, где k – коэффициент роста; K – максимум популяции; P – текущий размер популяции.

Пример 4 (Термодинамика). Закон охлаждения Ньютона. Скорость теплопотерь тела прямо пропорциональна разнице температур между телом и его окружением при условии, что разность температур мала и характер излучающей поверхности остается прежним – $\frac{dT}{dt} = k(T_S - T)$, где T – температура тела, °К, T_S – температура окружающей среды, °К, k – коэффициент, который характеризует теплоёмкость, теплопередачу, площадь контакта, сек⁻¹.

Для получения окончательного решения дифференциального уравнения необходима дополнительная информация о поведении функции на границах интервала применимости уравнения. Поскольку далее мы будем рассматривать ОДУ не выше 2-го порядка, то приведём пример максимально общего вида граничных условий для ОДУ второго порядка:

$$\begin{cases} a x(t_0) + b v(t_0) = C \\ c x(t_f) + d v(t_f) = D \end{cases}, \text{ где } x(t) \text{ – неизвестная функция, } v(t) \text{ – производная этой функции, } [t_0; t_f]$$

– интервал изучения функции; a, b, c, d, C, D – коэффициенты. Если $b = c = d = D = 0$, то



получаем начальное условие Коши для ОДУ первого порядка; если $c = d = D = 0$, то получаем модификацию начального условия Коши для ОДУ второго порядка.

Определение вида дифференциального уравнения, поиск его решения в виде некоторой непрерывной или дискретной функции $x(t)$ составляет существо решения прямых задач математического моделирования изучаемых процессов [1].

На практике же иногда требуется определить значение функции и (или) её производной до момента наблюдения или спрогнозировать эти значения после момента окончания наблюдения за изучаемым процессом. Например, представим себе такую ситуацию. Сотрудник ДПС отслеживает радаром автомобиль, определяя на некотором промежутке времени положение и скорость автомобиля в некоторой системе координат. Однако ему требуется не эти данные о положении и скорости, а те, которые были за некоторый момент времени до начала наблюдений. Если известно аналитическое решение дифференциального уравнения движения тела в виде функции $x(t)$, то эта задача решается с помощью вычисления значения функции $x(t)$ в требуемый момент времени. Если же ОДУ не позволяет найти аналитическое решение, то возможны два варианта действий. 1) Экстраполировать имеющиеся данные о значениях функции $x(t)$ вперёд или назад и по ним определить значения скорости. 2) С помощью метода наименьших квадратов подобрать такое решение известного ОДУ, которое при новых краевых условиях совпадало бы с экспериментальными данными функции $x(t)$. Оба метода обладают достоинствами и недостатками. Достоинство первого метода заключается в том, что он не требует знания вида ОДУ и представляет собой, по сути, один из вариантов статистической обработки данных; недостаток же заключается в том, что этот метод позволяет восстанавливать или прогнозировать значения лишь на небольших промежутках времени. Достоинство второго метода в том, что он работает на произвольных промежутках времени, ограниченных только вычислительными способностями алгоритмов решения ОДУ; недостаток же заключается в том, что этот метод требует знания вида ОДУ и требует уметь решать задачу минимума функции многих переменных. Но, в то же время, он является наиболее универсальным методом решения обратных задач и позволяет решать задачи не только начально-краевого типа, но и коэффициентного либо смешанного типа. В представленной статье мы будем использовать модификацию второго метода, используя метод регуляризации А. Н. Тихонова [2, 3].

2. Прямые задачи для ОДУ / The direct problems for ODE

Рассмотрим постановку прямых задач для трёх видов обыкновенных дифференциальных уравнения (ОДУ) с соответствующими начальными или граничными условиями.

Задача 1. Требуется решить ОДУ первого порядка в форме задачи Коши

$$x^{(1)} = f(x, t), x(t_1) = x_1, t \in [t_1; t_f] \quad (1)$$

Задача 2. Требуется решить ОДУ второго порядка в форме задачи Коши

$$x^{(2)} = f(x, x^{(1)}, t), x(t_1) = x_1, x^{(1)}(t_1) = v_1, t \in [t_1; t_f] \quad (2)$$

Задача 3. Требуется решить линейное ОДУ второго порядка в форме граничной задачи Дирихле

$$x^{(2)} + p(t)x^{(1)} + q(t)x = f(t), x(t_1) = C, x(t_2) = D, t \in [t_1; t_2] \quad (3)$$

Решать все три задачи будем численно. Для этого перейдём от непрерывных переменных t и функции $x(t)$ к их дискретным аналогам: $\{t_k, x_k\}$. Для поиска значений $x_k = x(t_k)$ будем использовать метод Адамса – для задачи 1, метод Адамса-Штёрмера для задачи 2 и для них обоих метод Рунге-Кутты 4-го порядка для определения первых трёх значений x_k , а для задачи 3 – метод конечных разностей в сочетании с методом прогонки Томаса [4, 5].

Напомним, что расчётные формулы для метода Адамса 4-го порядка имеют вид:

$$x_{k+4} = x_{k+3} + hA, \quad (4)$$

для метода Адамса-Штёрмера 4-го порядка, соответственно

$$v_{k+4} = v_{k+3} + hA, \quad x_{k+4} = x_{k+3} + hv_{k+3} + h^2B, \quad (5)$$



где $A = \frac{1}{24}(55f_{k+3} - 59f_{k+2} + 37f_{k+1} - 9f_k)$, $B = \frac{1}{360}(323f_{k+3} - 264f_{k+2} + 159f_{k+1} - 38f_k)$,
расчётные формулы метода Рунгге-Кутты имеют вид

$$x_{k+1} = x_k + \frac{r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4}{6}, \quad v_{k+1} = v_k + \frac{q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4}{6} \quad (6)$$

где h – общий шаг методов с методами (4) и (5) соответственно, значения функций определяются как $f_k = f(x_k, t)$ для уравнения (1) и $f_k = f(x_k, v_k, t)$ для уравнения (2), слагаемые из (6) определяются как $r_1 = hf(x_k, t_k)$, $r_2 = hf(x_k + 0,5r_1, t_k + 0,5h)$, $r_3 = hf(x_k + 0,5r_2, t_k + 0,5h)$, $r_4 = hf(x_k + r_3, t_k + h)$ для уравнения (1) и $r_1 = hf(x_k, v_k, t_k)$, $q_1 = hg(x_k, v_k, t_k)$, $r_2 = hf(x_k + 0,5r_1, v_k + 0,5q_1, t_k + 0,5h)$, $q_2 = hg(x_k + 0,5r_1, v_k + 0,5q_1, t_k + 0,5h)$, $r_3 = hf(x_k + 0,5r_2, v_k + 0,5q_2, t_k + 0,5h)$, $q_3 = hg(x_k + 0,5r_2, v_k + 0,5q_2, t_k + 0,5h)$, $r_4 = hf(x_k + r_3, v_k + q_3, t_k + h)$, $q_4 = hg(x_k + r_3, v_k + q_3, t_k + h)$ – для уравнения (2).

Далее напомним, что конечно-разностный метод заключается в аппроксимации производных первого и второго порядка соответствующими разностными выражениями вида

$$x^{(2)} = \frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{h^2}, \quad x^{(1)} = \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2h} \quad (7)$$

После подстановки (7) в само ОДУ и граничные условия (3) и несложных преобразований получаем систему линейных уравнений вида

$$x_0 = C; \left(1 - \frac{h}{2}p_k\right)x_{k-1} - \left(2 - h^2q_k\right)x_k + \left(1 + \frac{h}{2}p_k\right)x_{k+1} = h^2f_k; x_n = D, \quad (8)$$

которую решаем методом прогонки Томаса.

Реализацию расчётных формул будем производить в системе компьютерной математики Scilab.

В качестве тестовых дифференциальных уравнений будем рассматривать следующие ОДУ:

Задача 1. а) $x^{(1)} = -xtg(t) + 1/\cos(t)$, $x(\pi) = 1$; **б)** $x^{(1)} = 0,5\left(1 + \left(\frac{x}{t}\right)^2\right)$, $x(1) = 0$.

Задача 2. а) $x^{(2)} + 0,5(x^2 - 1)x^{(1)} + x = 0$, $x(0) = 1$, $x^{(1)}(0) = 0$,

б) $x^{(2)} = \frac{x^{(1)}}{t} \ln\left(\frac{x^{(1)}}{t}\right)$, $x(1) = e$, $x^{(1)}(1) = e^2$.

Задача 3. а) $x^{(2)} + 2x^{(1)} + 2x = e^{-t} + \sin(2t)$, $x(0) = 1,6$, $x(4) = -0,1$,

б) $x^{(2)} + x^{(1)}/t + \left(1 - 0,25/t^2\right)x = \sin(2t)$, $x(1) = 1$, $x(6) = 0$.

Моделируя погрешности, которые будут появляться при экспериментальном определении величин $x = x(t)$ и $v = v(t)$, добавим к этим величинам случайную поправку согласно формулам

$$X(t) = x(t) + \delta(rand - 0,5), \quad V(t) = v(t) + \delta(rand - 0,5), \quad (9)$$

где δ – коэффициент погрешности, $rand$ – случайное число из интервала $[0; 1]$.

Величины, полученные по формулам (9), будем считать экспериментальными данными, на основе которых будут решаться соответствующие обратные задачи.

3. Формулировка обратных задачи/ Formulation of the inverse problems

Сформулируем обратные задачи к приведённым трём прямым [1].

Обратная задача 1 (ОЗ-1). Зная результаты измерения величины $x = x(t)$, начиная с некоторого момента времени $t_I \in [t_0; t_f]$, определить стартовое значение $x_0 = x(t_0)$.



Обратная задача 2 (ОЗ-2). Зная результаты измерения величины $x = x(t)$, начиная с некоторого момента времени $t_1 \in [t_0; t_f]$, определить стартовые значения $x_0 = x(t_0)$ и $v_0 = v(t_0)$

Обратная задача 3 (ОЗ-3). Зная результаты измерения величины $x = x(t)$ на некотором внутреннем интервале $[t_1; t_2] \in [t_0; t_f]$, определить граничные значения $x_0 = x(t_0)$ и $x_f = x(t_f)$.

Отметим следующее. Внутренние интервалы $[t_1; t_f]$ или $[t_1; t_2]$ будут известны заранее, поскольку именно на них производятся экспериментальные наблюдения, а интервал $[t_0; t_f]$ будет определяться исходя из пожеланий исследователя и возможностей вычислительных методик.

Решение поставленных обратных задач будем искать с помощью метода регуляризации А.Н. Тихонова [6 – 12], который состоит в поиске минимума сглаживающего функционала следующего вида

$$\Phi(u) = \mu(u, t) + \alpha \Omega(u), \quad (10)$$

где u – набор управляющих параметров (УП), оптимальные значения которых равны $u^* = x_0$ для ОЗ-1, $u^* = \{x_0, v_0\}$ для ОЗ-2 и $u^* = \{x_0, x_f\}$ для ОЗ-3; $\mu(u, t) = \sum_k [x(u, t_k) - X(t_k)]^2$ – мера погрешности определения величины $x(u, t)$ по сравнению с экспериментальными данными $X = X(t)$ при разных значениях УП на интервале $[t_0; t_f]$; α – параметр регуляризации; $\Omega(u)$ – стабилизатор, который представляет собой квадрат нормы в евклидовом пространстве управляющих параметров, то есть $\Omega(u) = u^2$ для ОЗ-1 и $\Omega(u) = u_1^2 + u_2^2$ для ОЗ-2 и ОЗ-3.

Поиск минимума функционала (10) будем производить с помощью двух методов: метода шаблонов Хука-Дживса [4, 5] и одного из вариантов метода случайного поиска – метода «имитации отжига» или «simulated annealing» [14–17]. Достоинство этих методов по сравнению со всеми вариантами градиентного спуска в том, что при этом не нужно вычислять производную Фреше функционала (10) [18, 19]. Кроме того, поскольку поверхность целевой функции будет представлять собой овражистую структуру, то методы градиентного спуска будут весьма неэффективны на дне оврага в особенности вблизи точки минимума. Преимущество же метода «имитации отжига» по сравнению с методом Хука-Дживса заключается в том, что он позволяет приблизиться с некоторой вероятностью к точке глобального минимума многоэкстремальной функции. Изложим принципиальный алгоритм этого метода, изложенный в работах [15, 16].

Шаг 1. Формирование стартового значения УП, температуры, коэффициента изменения УП – u_{start}, K_{start}, V . Определение величины функционала при таком значении УП – Φ_{start} .

Шаг 2. Формирование нового значения УП, расположенного вблизи u_{start} : $u_{new} = u_{start} + 0,25(2rand - 1)$. Определение величины функционала при новом значении УП – Φ_{new} . Вычисление разности $\Delta = u_{new} - u_{start}$.

Шаг 3. Если $\Delta < 0$, то переходим к новым значениям УП $u_{start} = u_{new}$ и $\Phi_{start} = \Phi_{new}$. Если $\Delta \geq 0$, то вычисляем вероятность перехода на худшую точку $P = \exp\left(-\frac{\Delta}{T}\right)$. Если выполняется неравенство $P > rand$, то переходим к худшим значениям УП $u_{start} = u_{new}$ и $\Phi_{start} = \Phi_{new}$ если же $P \leq rand$, то значения УП остаются прежними.

Шаг 4. Уменьшение температуры $K_{start} = 0,85 K_{start}$. Переход к шагу 2.

В качестве конкретной программной реализации будем использовать модификацию базового алгоритма, представленного в работах [15, 16].

4. Численная реализация / The numerical realization

Рассмотрим прямую и обратную задачи 1 а). Правая часть этого уравнения содержит особенность вида $\cos t = 0$ или $t = \frac{\pi}{2} + \pi m$. Представленное уравнение допускает аналитическое



решение вида $x = \sin(t) + C \cos(t)$, которое не накладывает никаких дополнительных ограничений на временную и пространственную переменные. Учитывая начальное условие Коши, получим частное решение вида $x = \sin(t) - \cos(t)$. Зная его, можно решить обратную задачу, то есть определить координату точки в любой другой момент времени, например, $x(0,75\pi) = \sin(0,75\pi) - \cos(0,75\pi) = 1,4142$. Рассмотрим численную реализацию решения прямой и обратной задачи. Заголовки и последовательность вызовов расчётных функций будут следующие:

- 1) [tr, xe] = ADAMS1 (t1, x1, h, tf); или [te, xe] = ADAMS1(%pi, 1.0, 0.49.*%pi./99.0, 1.49.*%pi); – решение прямой задачи, получение экспериментальных данных.
- 2) for k = 1:length(te) xen(k) = xe(k) + 0.5.*(rand() - 0.5); end; xen = xen'; – внесение случайных поправок, моделирующих погрешности эксперимента.
- 3) [x0, fn] = IJ1(t0, u, h, tf, xen, t1, alfa, hm, em); или [un, fn] = IJ1 (0.75.*%pi, 3.0, 0.49.*%pi./99.0, 1.49.*%pi, xen, %pi, 0.01, 0.01, 0.000001) – поиск минимума функционала (10) методом Хука-Дживса.

[x0, fn] = ISA1 (t0,u,h,tf,xen,t1,alfa); или [x0, fn] = ISA1 (0.75.*%pi, 3.0, 0.49.*%pi./99.0, 1.49.*%pi, xen, %pi, 0.01); – поиск минимума функционала (10) методом «имитации отжига».

Результат поиска для обоих методов будет следующий: $x_0 = 1,3974$, $\Phi(x_0) = 2,291$.

Уменьшая величину шага метода Хука-Дживса hm, получим более точное решение.

Рассмотрим прямую и обратную задачи 1 б). Правая часть дифференциального уравнения имеет особенность в точке $t = 0$, но так как мы будем производить вычисления при $t > 0$, то эта особенность оказывать влияния не будет. Представленное уравнение допускает общее аналитическое решение вида $x = t - \frac{t}{\ln(C\sqrt{t})}$, откуда получаем ограничения на условие Коши вида $x(t_0) < t_0$. Это условие необходимо будет учесть при программной реализации алгоритма.

Учитывая начальное условие Коши, получим частное решение вида $x = t - \frac{t}{1 + \ln(\sqrt{t})}$. Зная его,

решим обратную задачу, вычислив значение $x(0,5) = 0,5 - \frac{0,5}{1 + \ln(\sqrt{0,5})} = -0,265$. Как и выше,

рассмотрим численную реализацию прямой и обратной задачи. Приведём сразу примеры вызовов расчётных функций:

- 1) [te, xe] = ADAMS1(1.0, 0.0, 10.0./99.0, 11.0); – решение прямой задачи, получение экспериментальных данных;
- 2) for k = 1:length(te) xen(k) = xe(k) + 0.5.*(rand() - 0.5); end; xen = xen'; – внесение случайных поправок, моделирующих погрешности эксперимента.
- 3) [x0, fn] = IJ1 (0,5, -2.0, 10.0./99.0, 11.0, xen, 1.0, 0.01, 0.01, 0.000001) – поиск минимума функционала (10) методом Хука-Дживса.

[x0, fn] = ISA1 (0,5, -2.0, 10.0./99.0, 11.0, xen, 1.0, 0.01) – поиск минимума функционала (10) методом «имитации отжига».

Результат поиска для обоих методов будет следующий: $x_0 = -0,1911$, $\Phi(x_0) = 1,977$.

Поскольку функционал (10) в данном случае зависит только от одного переменного, то для наглядности можно привести его график для задач а) и б) (рис. 1, 2).

Рассмотрим прямую и обратную задачу 2 а). Аналитическое выражение для дифференциального уравнения не накладывает никаких ограничений как на переменную t , так и функцию $x(t)$. Поскольку в данном случае уравнение не допускает аналитическое решение, то возможные особенности общего решения придётся анализировать в процессе численного решения. Так же из-за отсутствия аналитического решения невозможно вычислить его значения в требуемый момент времени с тем, чтобы сравнить его с численным решением. Поэтому проверку точности найденных значений будем также производить численно.

Структура расчётных функций будет абсолютно такая же, что для задачи 1, но при этом все внутренние функции будут зависеть от двух управляющих переменных. Приведём вызовы расчётных функций.



1) [te, xe, ve] = ADAMS2 (0.0, 1.0, 0.0, 10.0./399.0, 10.0); – решение прямой задачи, получение экспериментальных данных.

2) for k = 1:length(te) xen(k) = xe(k) + 0.5.*(rand() - 0.5); ven(k) = ve(k) + 0.5.*(rand() - 0.5); end; – внесение случайных поправок, моделирующих погрешности эксперимента.

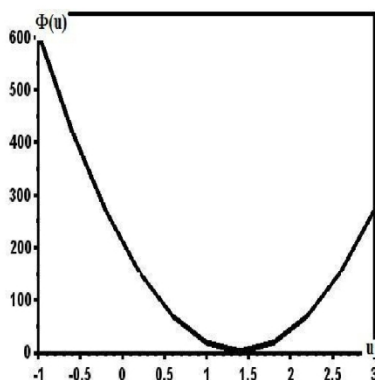


Рис. 1 Значения функционала (10) для ОЗ – 1 а)

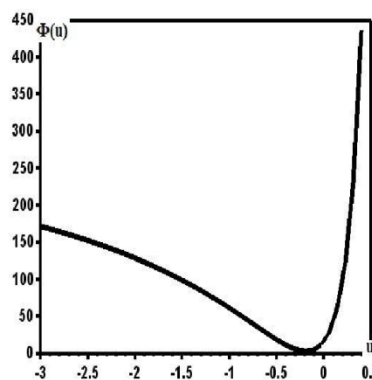


Рис. 2 Значения функционала (10) для ОЗ – 1 б)

3) [x0, v0, fm] = ИИЖ2(t0,c1,c2,ha,tf,xе,ve,t1,alfa, h,e) или [x0, v0, fm] = ИИЖ2 (-1.0, 1.0, 0.0, 10.0./399.0, 10.0, xen, ven, 0.0, 0.001, 0.01, 0.00001) – поиск минимума функционала (10) методом Хука-Дживса.

[x0, v0, fm] = ИСА2(t0,c1,c2,ha,tf,xе,ve,t1,alfa) или [x0, v0, fm] = ИСА2 (-1.0, 1.0, 0.0, 10.0./399.0, 10.0, xen, ven, 0.0, 0.001) – поиск минимума функционала (10) методом имитации отжига.

Результат поиска будет следующий: $x_0 = 0,6151$, $v_0 = 0,7723$, $\Phi_{min} = 8,255$ – для метода имитации отжига и $x_0 = 0,6147$, $v_0 = 0,8119$, $\Phi_{min} = 8,7865$ – для метода Хука-Дживса.

Для проверки точности найденных величин снова решим прямую задачу, но уже на интервале $[t_0; t_f]$ и найденными начальными условиями: [tn, xn, vn] = AS (-1.0, x0, v0, 11.0./399.0, 10.0). Вычисление погрешностей $\Delta = xn - xe$ на интервале $[t_1; t_f]$ показывает их примерную одинаковую величину для двух методов.

Рассмотрим прямую и обратную **задачу 2 б)**. Правая часть дифференциального уравнения содержит две особенности: $t \neq 0$ и $\frac{x^{(1)}}{t} > 0$. Второе неравенство означает, что числитель и знаменатель должны быть одного знака. Это ограничение необходимо учесть при программной реализации алгоритма. Данное дифференциальное уравнение допускает общее аналитическое решение вида $x = \frac{C_1 t - 1}{C_1^2} e^{1+C_1 t} + C_2$. Учитывая начальные условия Коши, получим частные

решения вида $x = (t - 1)e^{1+t} + e$ и $v = te^{1+t}$. Зная их, решим обратную задачу, вычислив значения координаты и скорости: $x(0,5) = (0,5 - 1)e^{1+0,5} + e = 0,4774$ и $v(0,5) = 0,5e^{1+0,5} = 2,2408$. Эти значения будем использовать для проверки точности расчётных алгоритмов.

Приведём вызовы расчётных функций.

1) [te, xe, ve] = ADAMS2 (1.0, %e, %e.^2.0, 2.0./99.0, 3.0); – решение прямой задачи, получение экспериментальных данных.

2) for k = 1:length(te) xen(k) = xe(k) + 0.5.*(rand() - 0.5); ven(k) = ve(k) + 0.5.*(rand() - 0.5); end; – внесение случайных поправок, моделирующих погрешности эксперимента.

3) [x0, v0, fm] = ИИЖ2 (0.50, %e, %e.*%e, 2.0./99.0, 3.0, xen, ven, 1.0,0.001,0.0001,0.00001); – поиск минимума функционала (10) методом Хука-Дживса.

[x0, v0, F] = ИСА2 (0.50, %e, %e.*%e, 2.0./99.0, 3.0, xen, ven, 1.0,0.001) – поиск минимума функционала (10) методом «имитации отжига».



Результат поиска будет следующий: $x_0 = 0,9896$, $v_0 = 2,2657$, $\Phi_{min} = 5,57$ – для метода Хука-Дживса и $x_0 = 1,0075$, $v_0 = 2,2653$, $\Phi_{min} = 3,44$ – для метода имитации отжига.

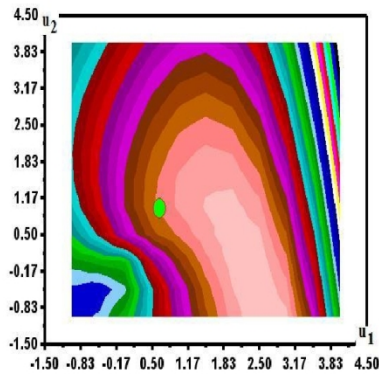


Рис. 3 Изолинии функционала (10) для ОЗ – 2 а)

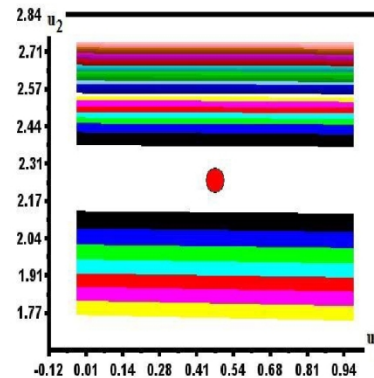


Рис. 4 Изолинии функционала (10) для ОЗ – 2 б)

Поскольку функционал (10) в данном случае зависит от двух переменных, то графически проиллюстрируем его значение в виде карты изолиний в плоскости Ou_1u_2 для задач а) и б) (рис. 3, 4).

Рассмотрим прямую и обратную задачу 3 а). Представленное дифференциальное уравнение допускает аналитическое решение $x = e^{-t}(C_1 \sin t + C_2 \cos t) + Ae^{-t} + B \cos(2t) + C \sin(2t)$, где $C_1 = 3,670227413$, $C_2 = -0,2$, $A = 1$, $B = -0,2$, $C = -0,1$. Решая обратную задачу, вычислим значения $x(-2) = -16,6$, $x(6) = -0,116$, которые будем использовать для проверки точности приближённых расчётов.

Приведём вызовы расчётных функций.

1) [tr, xe, ve] = KR (t0, tf, c1, c2, d1, d2, CC, DD, n) или [te, xe, ve] = KR (0.0, 4.0, 1.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.6, -0.1, 100); – решение прямой задачи, получение экспериментальных данных.

2) for k = 1:length(te) xen(k) = xe(k) + 0.5.*(rand() - 0.5); ven(k) = ve(k) + 0.5.*(rand() - 0.5); end; – внесение случайных поправок, моделирующих погрешности эксперимента.

3) [xs, xe, f]=ISA3 (0.0, 4.0, 1.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.6, -0.1, 100, xen, ven, -2.0, 6.0, 0.001) – поиск минимума функционала (10) методом «имитации отжига».

[xs, xe, f]=IHJ3 (0.0, 4.0, 1.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.6, -0.1, 100, xen, ven, -2.0, 6.0, 0.001, 0.01, 0.0001) – поиск минимума функционала (10) методом Хука-Дживса.

Результат поиска будет следующий: $x(-2) = -16,11$, $x(6) = -0,116$, $\Phi_{min} = 2,59$ – для метода имитации отжига и $x(-2) = -16,03$, $x(6) = -0,115$, $\Phi_{min} = 2,59$ – для метода Хука-Дживса.

Рассмотрим прямую и обратную задачу 3 б). Представленное дифференциальное уравнение также допускает аналитическое решение: $x(t) = \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} \left(C_1 - \frac{2 \sin^3 t}{3} \right) + \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \left(C_2 - \frac{2 \cos^3 t}{3} \right)$, где

$C_1 = 0,291384326$, $C_2 = 1,001299385$. В отличие от правой части исходного ОДУ, оно содержит более сильное ограничение на ОДЗ: $t > 0$. Решим обратную задачу, вычислив значения координаты в новых временных точках $x(0,5) = 0,644$, $x(7) = 0,207$.

Приведём вызовы расчётных функций.

1) [te, xe, ve] = KR (1.0, 6.0, 1.0, 0.0, 1.0, 0.0, 1.0, 0.0, 200); – решение прямой задачи, получение экспериментальных данных.

2) for k = 1:length(te) xen(k) = xe(k) + 0.5.*(rand() - 0.5); ven(k) = ve(k) + 0.5.*(rand() - 0.5); end; – внесение случайных поправок, моделирующих погрешности эксперимента.

3) [xs, xf, fn] = ISA3 (1.0, 6.0, 1.0, 0.0, 1.0, 0.0, 1.0, 0.0, 200, xen, ven, 0.5, 7.0, 0.001); – поиск минимума функционала (10) методом «имитации отжига».



$[x_s, x_f, f_n] = \text{ИИЗ}(1.0, 6.0, 1.0, 0.0, 1.0, 0.0, 1.0, 0.0, 200, x_{en}, v_{en}, 0.5, 7.0, 0.001, 0.01, 0.00001)$
– поиск минимума функционала (10) методом Хука-Дживса.

Результат поиска будет следующий: $x(0,5) = 0,746$, $x(7) = 0,089$, $\Phi_{min} = 4,163$ – для метода имитации отжига и $x(0,5) = 0,642$, $x(7) = 0,063$, $\Phi_{min} = 3,949$ – для метода Хука-Дживса.

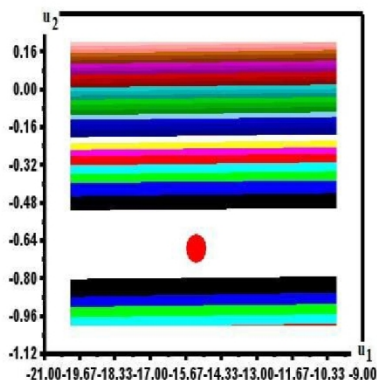


Рис. 5 Изолинии функционала (10) для
ОЗ – 3 а)

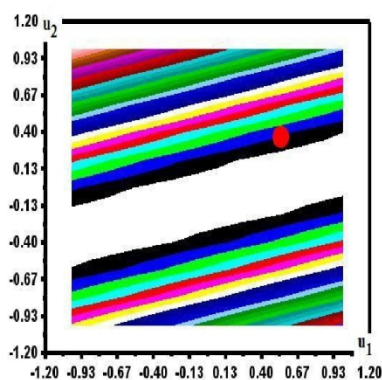


Рис. 6 Изолинии функционала (10) для
ОЗ – 3 б)

В данном случае функционал (10) также зависит только от двух переменных, поэтому графически его значения также можно проиллюстрировать в виде карты изолиний в плоскости $Оu_1u_2$ для задач а) и б) (рис. 5, 6).

5. Заключение./Conclusion

Анализируя результаты расчётов пункта 4 можно отметить следующее. В случае одномерной задачи минимизации метод Хука-Дживса закономерно оказывается эффективнее метода «имитации отжига», поскольку не тратит времени на переход в максимизирующие функционал (10) варианты переменной и выбирает направление движения более целенаправленно. В случае же двух переменных и протяжённого оврага продолжительность расчётов обоими методами остаётся примерно одинаковой. В работах [2, 3, 13] рекомендуется уменьшать итерационным способом параметр регуляризации α , однако проведённые расчёты показали, что результативность поиска минимума функции от этого не улучшается, а в некоторых случаях результат становится даже хуже, чем при постоянном значении α порядка 10^{-3} . Сравнение численных значений в новых начально-краевых точках с соответствующими аналитическими значениями не совсем корректно, поскольку последние не учитывают случайных поправок исходных данных по формулам (9).

Список источников/ References

1. S. I. Kabanikhin. Inverse and ill-posed problems [M]. Novosibirsk, Siberian scientific press, 2009.
2. A.N. Tikhonov, V.B. Glasko. Approximate solution of Fredholm integral equation of the first kind [J]. Journal of computational mathematics and mathematical physics, 1964, 4(3), 564 – 571.
3. A.N. Tikhonov, V.B. Glasko. Use of the regularization method in nonlinear problem [J]. Journal of computational mathematics and mathematical physics, 1965, 5(3), 463 – 473.
4. J. H. Mathews, K. D. Fink Numerical methods using MATLAB [M]. Upper Saddle River, Prentice Hall, 1999
5. J. Kiusalaas Numerical methods in engineering with MATLAB, Cambridge, Cambridge University Press, 2005.
6. V.A. Morozov. Regularization methods for ill-posed problems [M]. New York, CRC Press, 1993
7. F.D.M. Neto, A.J.S. Neto. An introduction to inverse problems with application [M]. Dordrecht, Springer, 2013
8. H.W. Engl, M. Hanke, A. Neubauer. Regularization of inverse problems [M]. London, Kluwer Academic Publishers, 1996
9. C.R. Vogel. Computational methods for inverse problems [M]. Montana, SIAM, 2002



10. Y. Wang, A.G. Yagola, C. Yang. Optimization and regularization for computational inverse problems and applications [M]. Dordrecht, Springer, 2011
11. R.C. Aster, B. Borchers, C.H. Thurber. Parameter estimation and inverse problems [M] Elsevier Academic Press, 2005
12. G. Chavent, Nonlinear least squares for inverse problems. [M]. Dordrecht, Springer, 2009
13. A.B. Bakushinsky, M.Yu. Kokurin, A. Smirnova. Iterative methods for ill-posed problems [M]. Berlin, Walter de Gruyter GmbH & Co., 2011
14. S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, and M. P. Vecchi. Optimization by simulated annealing [J]. Science, vol. 220, no. 4598, pp. 671–680, May 1983.
15. A. Corana, M. Marchesi, C. Martini, S. Ridella Minimizing multimodal functions of continuous variables with the «Simulated Annealing» algorithm. ACM transactions on mathematical software, 1987, 3(3) 262 – 280.
16. K.M. Mullen. Continuous Global Optimization in R [J]. Journal of Statistical Software, 2014, 60 (6) 1 – 45.
17. Yang Xiang, Sylvain Gubian et al. Generalized Simulated Annealing for global optimization: The GenSA Package [J]. The R Journal, 2013, 5(1), 13 –28.
18. E. Kurpinar, A.L. Karchevsky. Optimization inversion of seismic data from layered media: an algorithm for gradient [J], Geology and geophysics, 2005, 439 – 447.
19. D. S. Anikonov. A formula for the gradient of the transport equation solution [J]. Journal of inverse and ill-posed problems, 2009, 4(2), 85 – 100.

Авторы

Сирота Дмитрий Юрьевич - к.т.н., доцент кафедры теоретической и геотехнической механики ФГБОУ ВО КузГТУ им. Т.Ф. Горбачёва
Электронная почта: *dmsirota@yandex.ru*
Бабушкин Марк Андреевич - студент 6-го курса специальности «Физические процессы горного или нефтегазового производства»

Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева

Authors

Dmitry Yu Sirota, *Cand. Sc. (Tech.)*. Associate Professor of the Department of Theoretical and Geotechnical Mechanics

Mark A. Babushkin, student

T.F. Gorbachev Kuzbass State Technical University

Библиографическое описание статьи

Сирота. Д. Ю. Решение некоторых обратных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений в инженерных приложениях / Д. Ю. Сирота. М. А. Бабушкин // Техника и технология горного дела. – 2018. – № 2 (2). – С. 65-74.

Cite this article

Sirota D. Yu., Babushkin M. A. (2018) The solving of some inverse problems for ordinary differential equation in engineering applications. *Journal of mining and geotechnical engineering*, 2(2):65.