УДК 517.54

А.С.Сорокин

УРАВНЕНИЕ ЛЕВНЕРА С УПРАВЛЯЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ КУФАРЕВА

В теории однолистных отображений были получены многочисленные результаты методом, восходящим к основополагающей работе К.Левнера[1], получившим название метода продолжения по параметру или метода параметрических представлений. Различные подходы к обоснованию указанного метода и его применению изложены в статьях и монографиях П.П. Куфарева, Г.М.Голузина, И.А.Александрова и автора [2-11].

Уравнение Левнера [1-11] является важным частным случаем уравнения Левнера -Куфарева

$$\frac{d\varsigma}{d\tau} = -\varsigma\, p(\varsigma, \tau), \quad 0 < \tau < \tau^0, \qquad 0 < \tau^0 \le \infty. \qquad (1)$$

Здесь $p(\varsigma, \tau)$ – заданная в $E \times (0, \tau)$ функция непрерывная по совокупности переменных в $E \times T_j$ и принадлежащая классу Каратеодори [2] при каждом фиксированном $\tau \in T$. Решение $\varsigma = \varsigma(\tau, t, z)$ уравнения (1),обращается в ноль при $\tau = t,\ 0 < t < \tau^0$.

Отметим, что в случае для конечносвязной круговой области решение было получено методом функциональных поправок [4, 5]. Обычным образом установлена единственность решения.

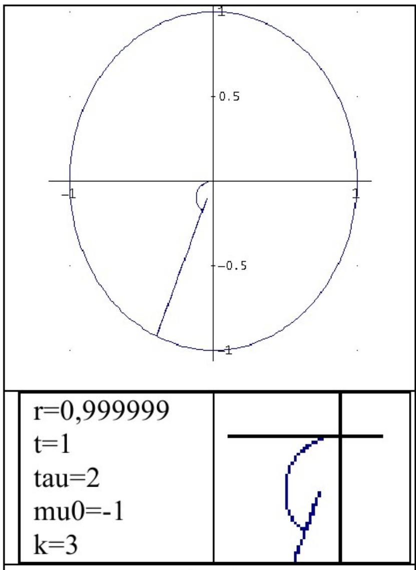

Рис. 1.

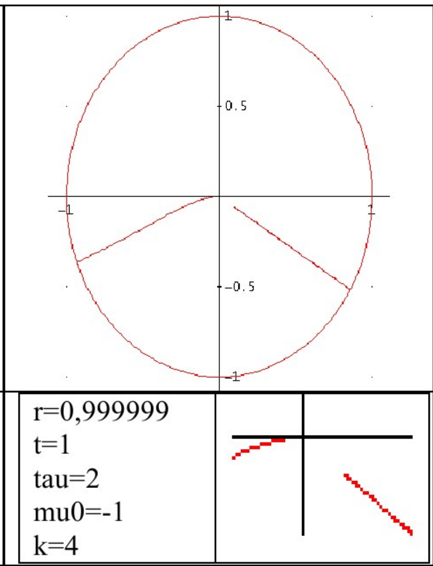

Рис.2.

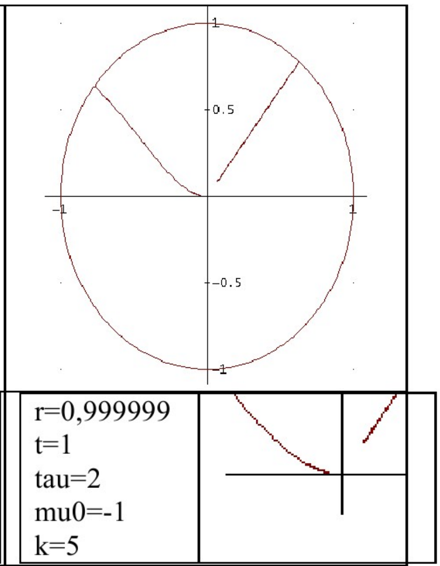

Рис.3.

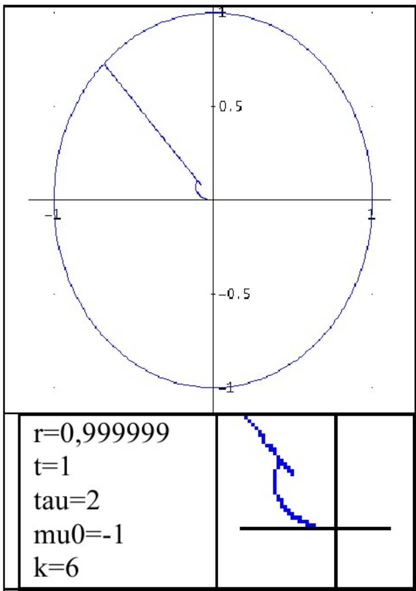

Рис.4.

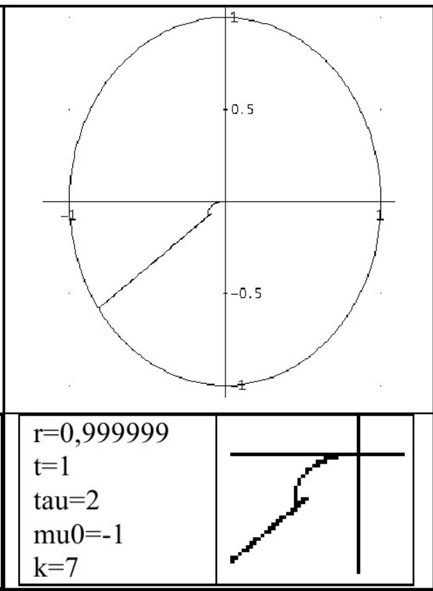

Рис.5.

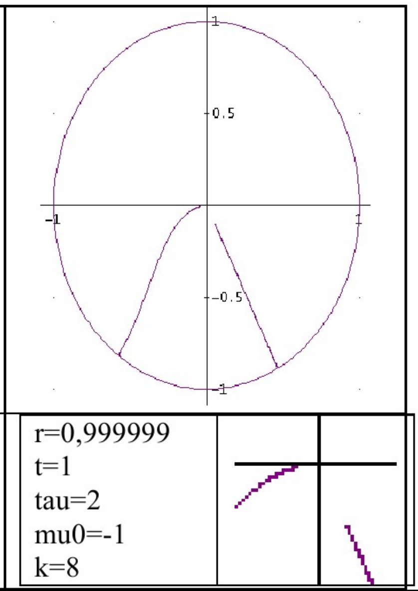

Рис.6.

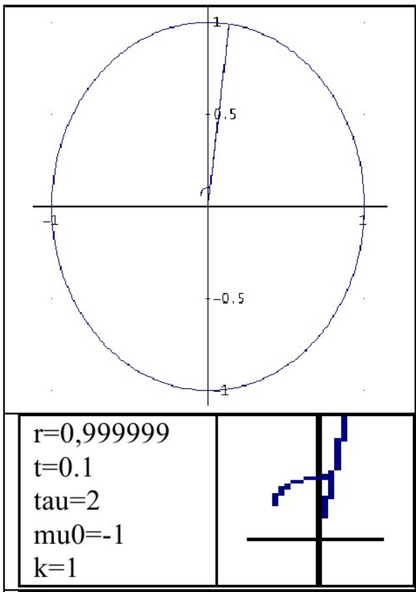

Рис.7.

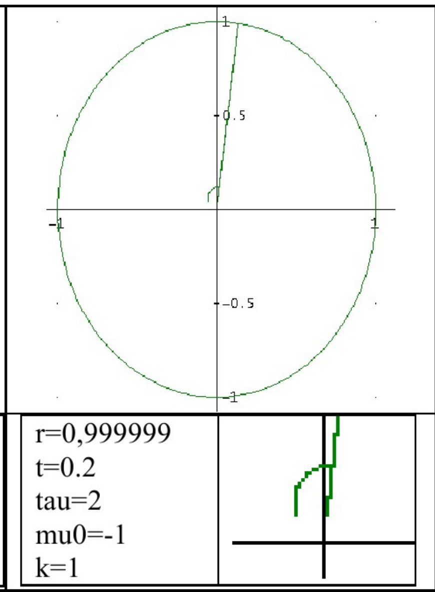

Рис.8.

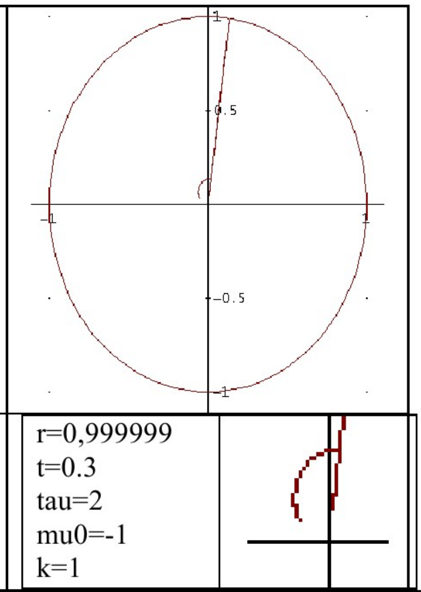

Рис.9.

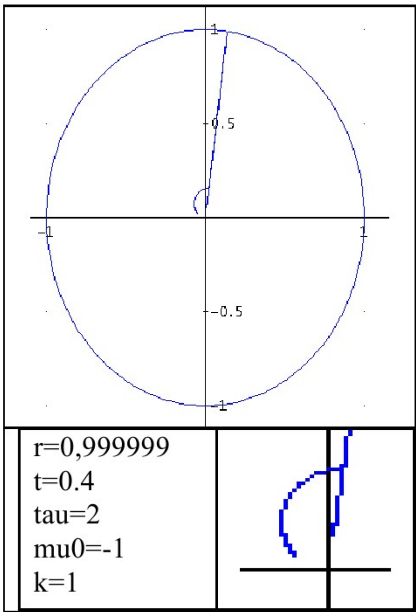

Рис.10.

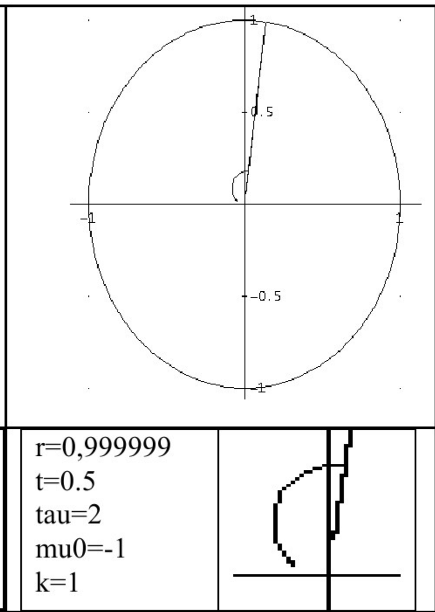

Рис.11.

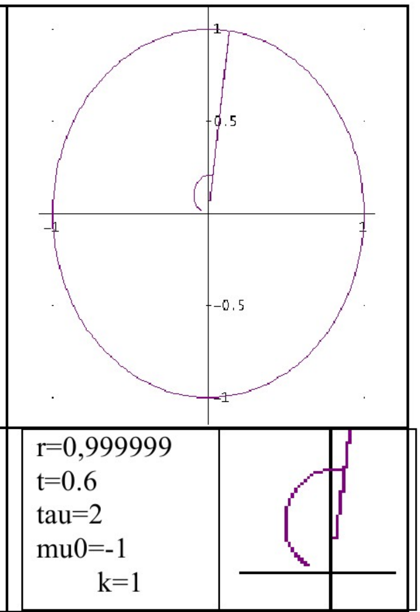

Рис.12.

Представляет особый интерес поведение траекторий решений уравнения Левнера – Куфарева, начинающихся в точках граничных компонент. Траектории $\varsigma(\tau,t,z)$ дифференциального уравнения (1), начинающиеся в точках z сечения цилиндра $E\times T$ плоскостью $\tau=t$ образуют в пространстве (z,τ) стационарный поток в форме струи, располагающейся в $E\times T$.

Для того, чтобы решение $\varsigma=\varsigma(\tau,t,z)$ уравнения Левнера

$$\frac{d\varsigma}{d\tau}=-\varsigma\frac{e^{i\alpha(\tau)}+\varsigma}{e^{i\alpha(\tau)}-\varsigma},\quad 0<\tau\le\infty,\quad \varsigma(0,t,z)=z,$$

отображало единичный круг E на единичный круг с разрезом по жордановой дуге достаточно, чтобы вещественнозначная функция $\alpha(\tau)$ имела ограниченную производную.

Функции $\mu(\tau,k)$, входящие в решения уравнения (1), будем называть управляющими функциями Куфарева [2].

П.П.Куфаревым получено и подробно изучено уравнение Лёвнера-Куфарева (1), где $p(\varsigma,\tau)$– голоморфная относительно ς функция с положительной вещественной частью в единичном круге.

Выяснены геометрические свойства отображения в зависимости от свойств функции $p(\varsigma,\tau)$.

П.П.Куфарев первым увидел возможность использования метода параметрических представлений для полного решения задач о дополнительных областях, поставленных М.А.Лаврентьевым.

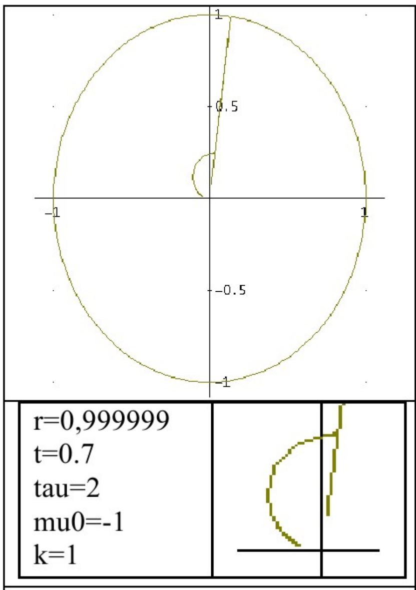

Рис.13.

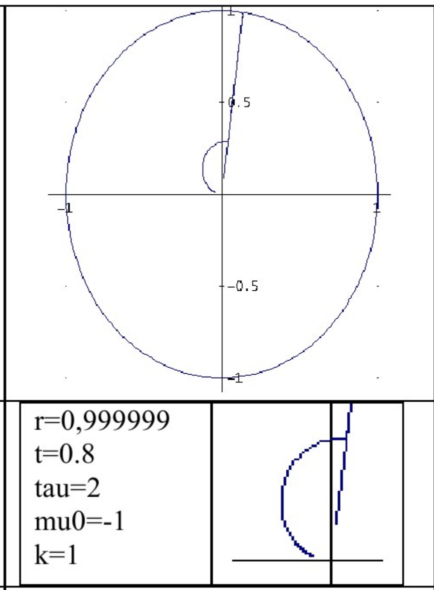

Рис.14.

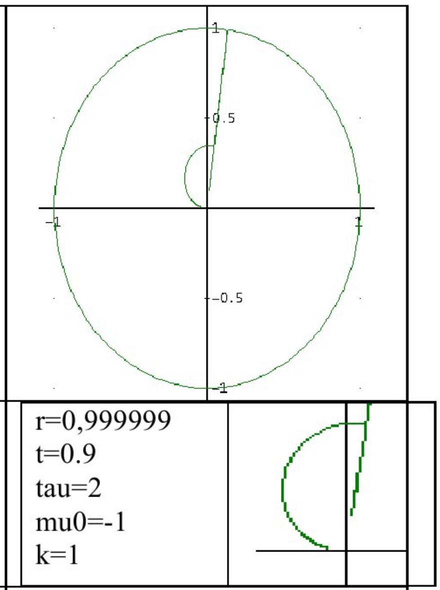

Рис.15.

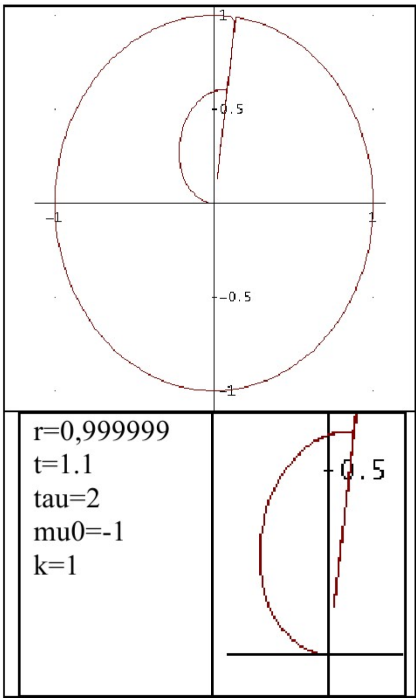

Рис.16.

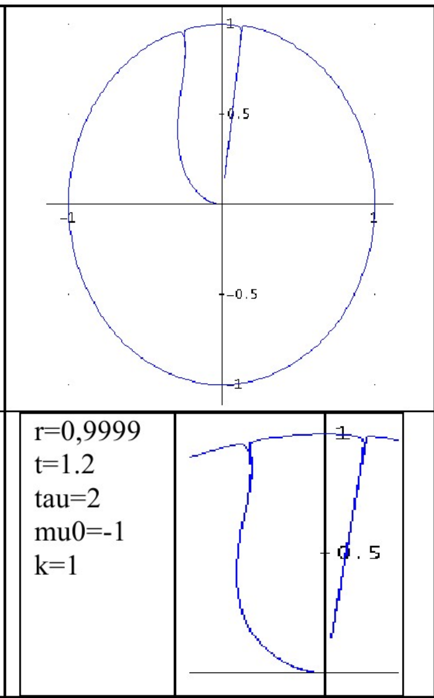

Рис.17.

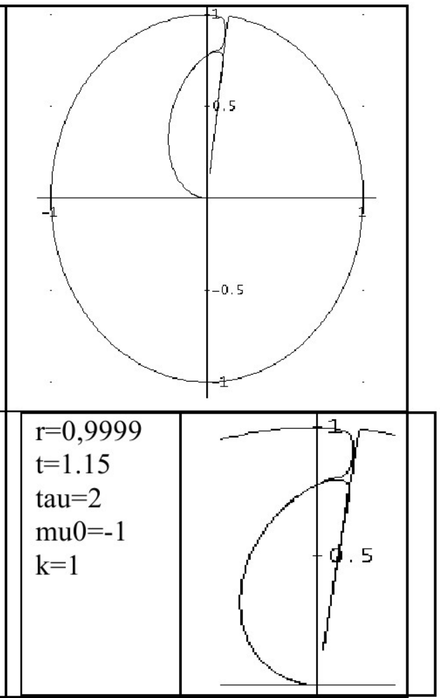

Рис.18.

П.П. Куфарева глубоко интересовала задача о точной оценке коэффициентов на классе голоморфных однолистных в единичном круге функций, известной как проблема Бибербаха о коэффициентах.

П.П. Куфарев [3] развивает свой вариационно-параметрический метод на примерах решения трёх экстремальных задач.

Многие другие экстремальные задачи на различных классах функций решены этим методом учениками П.П. Куфарева.

Распространению уравнения Лёвнера на многосвязные области посвящена статья [2], а на функции, однолистные в полуплоскости,- статья «Об одном методе исследования экстремальных задач для функций, однолистных в полуплоскости» [3].

Теорема. *Функция*

$$\varsigma(z,\tau,t)=\frac{\left(1-\sqrt{1-4a(z,\tau,t)\mu(\tau,k)\exp(-\tau)}\right)^2}{4a(z,\tau,t)\exp(-\tau)} \tag{2}$$

отображает единичный круг на круг с разрезом, имеющим ветвление по жордановым дугам, где

$$a(z,\tau,t)=\frac{z(\xi(z,t)+\mu_0)^2}{(z+\mu_0)^2(\xi(z,t)+\mu(\tau,k))^2},$$

причем

$$\xi(z,t)=\frac{\left(1-\sqrt{1-4\omega(z)\mu_0\exp(-t)}\right)^2}{4\omega(z)\exp(-t)}.$$

Кроме того,

$$\omega(z)=\frac{z}{(z+\mu_0)^2},\quad |\mu(\tau,k)|=1,\ |\mu_0|=1.$$

Разрез начинается от точки μ_0 *до*

$$\mu_0\exp(\tau_1)\left(1-\sqrt{1-\frac{\mu(\tau,k)}{\mu_0}\exp(-t-\tau_1)}\right)^2,$$

где

$$\tau_1=\tau+2\ln\left(\frac{\mu(\tau,k)+\varsigma(\vartheta\tau)}{\mu_0+\varsigma(\vartheta\tau)}\right),\ 0<\vartheta<1.$$

Следствие. *Если в формуле* (2) *положить управляющую функцию постоянной, то получаем известную формулу И.А.Александрова*[5].

Результаты, полученные при применении приведённых в теореме формул, представлены на рис. 1-24 (вычисления произведены в математическом пакете DERIVE), по ним построены отображения единичной окружности на единичные окружности с разрезами по жордановым дугам при заданных параметрах, по ним построены отображения единичной окружности на единичные окружности с разрезами по жордановым дугампри заданных параметрахr, t, tau, mu0, k.

На каждом рисунке приведён фрагмент поведения концов разреза в зависимости от заданных параметров.

На рис. 1, 4, 5, 7-16, 20 приведены результаты расчётов отображения единичного круга наединичный круг с одним разрезом, имеющим ветвление. Каждый конец разветвленного разреза стремится к началу координат.

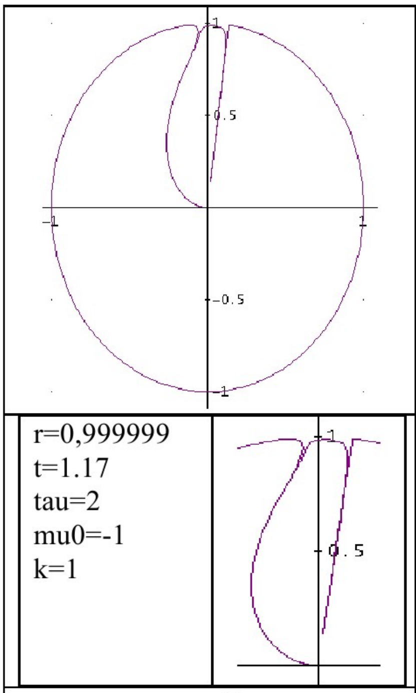

Рис.19.

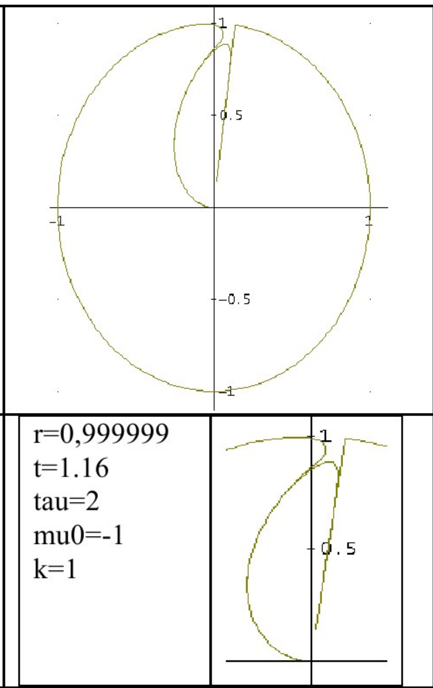

Рис.20.

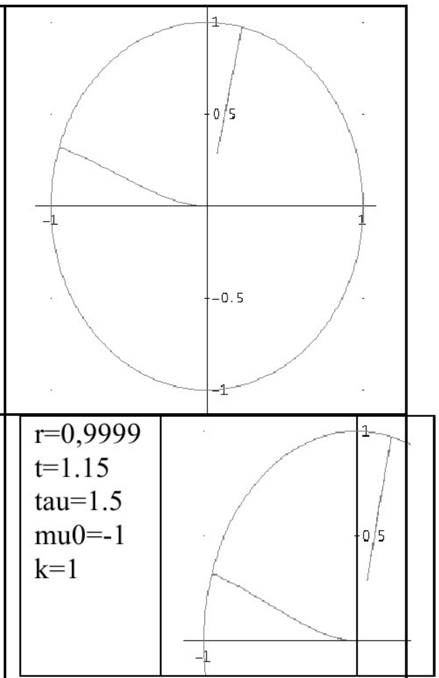

Рис.21.

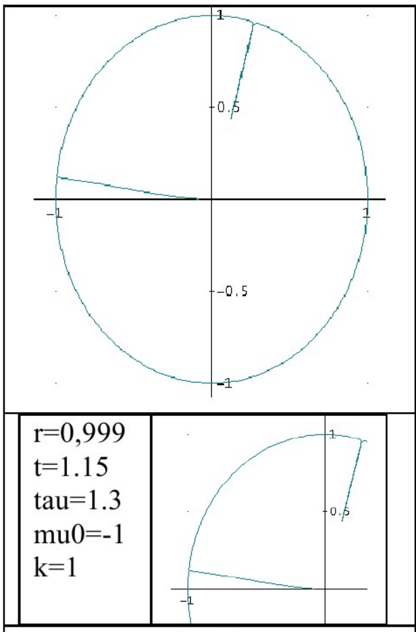

Рис.22.

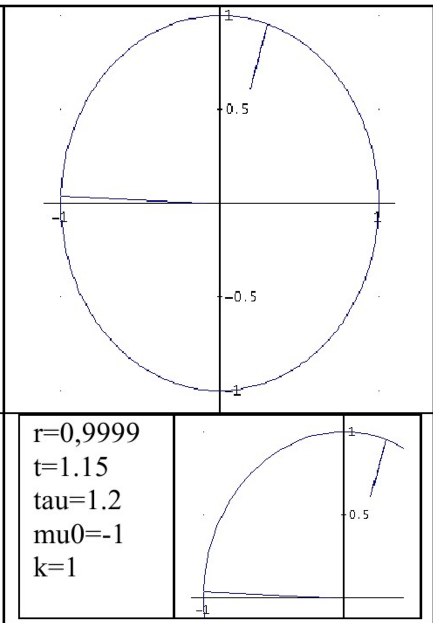

Рис.23.

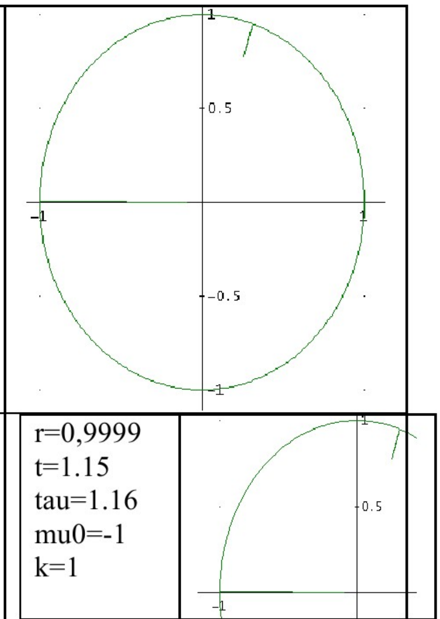

Рис.24.

На рис. 4, 7-16,20 разрез стремится сверху, а на рис. 5 – снизу. Отображения на два криволинейных разреза без ветвления показаны на рис. 2, 3, 6, 17, 19, 21-24. Сравнения рис. 18-20 показывает, что если точка ветвления разреза приближается к единичной окружности, то ветвление исчезает и появляются два криволинейных разреза без ветвления.

Если в формулах (2) для функции $\varsigma(z,\tau,t)$ перед квадратным корнем сменить знак с минуса на плюс, то получаем отображения единичного круга на единичный круг с разрезом, имеющим ветвления по жордановым дугам, и разрез будет находиться вне единичного круга. Если в указанных функциях $\varsigma(z,\tau,t)$, $a(z,\tau,t)$ ввести дополнительный параметр λ, то разрез будет иметь ветвления с тремя окончаниями. Если в выражениях для функций $\varsigma(z,\tau,t)$ и $\xi(z,t)$ перед квадратным корнем комбинировать знаки плюс и минус, то получаем многообразие отображающих функций.

СПИСОКЛИТЕРАТУРЫ

1. *LöwnerK.* Untersuchungen über shlichte onforme Abbildung des Einheitskreises. I, // Math. nn., 1923, Bd.89, 2, S.103-121.
2. *Куваев М.Р., Куфарев П.П.* Об уравнении типа Левнера для многосвязных областей.// Ученые зап. Томского ун-та, Т. 25, 1955. - Томск: ТГУ, С. 19-34.
3. *Куфарев П.П.* Труды П.П. Куфарева. К 100-летию со дня рождения. -Томск: ТГУ, 2009. 366 с.
4. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. Москва. 1952. 540 с.
5. *Александров И.А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: ТГУ, 2001, 219 с.
6. *Сорокин А.С.* Задача М.В.Келдыша - Л.И.Седова для многосвязных круговых областей.//Доклады Академии Наук СССР, Т.293, №1, 1987.С. 41-44.
7. *Сорокин А.С.* Задача М.В.Келдыша - Л.И.Седова для многосвязных круговых областей.//Доклады Академии Наук СССР, Т.296, №4, 1987. С. 801-804.
8. *Сорокин А.С* Вариационный метод Г.М. Голузина-П.П. Куфарева и формула М.В. Келдыша-Л.И.Седова..//Доклады Академии Наук СССР, Т.308, №2, 1989.С. 273-277.
9. *Сорокин А.С.* Параметрическое представление функций в конечносвязных областях .//Сиб. матем. журн., Т.38, №5, 1997.С. 1163-1178.
10. *Сорокин А.С.* Краевые задачи в многосвязных областях и их приложения. -Новокузнецк: СибГИУ, 1998. 415 с.
11. *Сорокин А.С.* Уравнение Левнера-Голузина-Комацу для конечносвязной области // Дифференциальные уравнения и топология. -Москва: МГУ, 2008. С. 198.

Автор статьи:

Сорокин
Андрей Семенович
- канд. физ.-мат.наук, доцент, ст.н.с.
(филиал КузГТУ, г. Новокузнецк).
тел.: 8(3843) 772459

УДК 51(09)

М.А.Тынкевич

ПАВЕЛ ПАРФЕНЬЕВИЧ КУФАРЕВ (ПАМЯТИ ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО УЧЕНОГО, ПЕДАГОГА И ЧЕЛОВЕКА)

В 1953 году в Кемеровскую среднюю школу № 24 пришел пакет из Томского государственного университета им. В.В. Куйбышева с условиями Второй Сибирской математической олимпиады по математике и предложением учащимся принять участие в ней. Хотя предлагаемые задачи не выходили за пределы школьной программы по математике, пришлось поломать голову и набраться смелости отправить полученные решения в Томск. Спустя некоторое время пришло извещение о занятом призовом месте и приглашение поступать на механико-мвтематический факультет ТГУ, которое и определило мою дальнейшую судьбу. Под приглашением стояла подпись декана мехмата Павла Парфеньевича Куфарева.

Павел Парфеньевич родился в Томске 18 марта 1909 года. Его отец Парфений Фёдорович (1860–1914) был родом из крестьян Вологодской губернии, служил кондуктором на железной дороге, а затем делопроизводителем квартирного отдела Томской городской управы. Мать, Александра Семёновна (1870–1922), занималась воспитанием пятерых детей. Павел был самым младшим и с тринадцатилетнего возраста обязанности по его воспитанию взял на себя старший брат Леонид, инженер-химик, выпускник Томского технологического института. Как утверждают авторы [5, 6],