

УДК 621.87

Барановская Лариса Вакифовна, канд. техн. наук, Чернова Наталья Михайловна, доктор техн. наук

Балаковский инженерно-технологический институт (филиал) НИЯУ МИФИ,
413853, Россия, Саратовская область, г. Балаково, ул. Чапаева, 140

E-mail: baranovskaial@mail.ru

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ КОМПОНЕНТОВ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КРАНОВЫХ МЕТАЛЛОКОНСТРУКЦИЙ КОРОбЧАТОГО СЕЧЕНИЯ ГРАДИЕНТНЫМИ МЕТОДАМИ

Аннотация: Статья посвящена расчету металлоконструкций тяжелых козловых кранов коробчатого сечения. Для обеспечения долговечности и надежности работы крана необходима проверка условий на прочность, местную устойчивость, статическую жесткость. В статье представлены формулы для вычисления эквивалентных напряжений, запасов местной устойчивости, вертикальных прогибов в стенках и поясах элементов металлоконструкции. Их экстремальные значения сравниваются с допустимыми значениями. Представлены оптимизационные задачи поиска экстремальных значений. По виду целевых функций и ограничений сделаны выводы о том, что они являются нелинейными задачами условной оптимизации. Предложены градиентные методы их решения - метод Франка-Вульфа и модифицированный метод Ньютона. Рассмотрены основные шаги и схемы применения этих методов.

Ключевые слова: козловой кран, металлоконструкция козлового крана, коробчатое сечение, компоненты напряженно-деформированного состояния, оптимизационные задачи, градиентные методы оптимизации.

Информация о статье: принята 01 октября 2019 г.
DOI: 10.26730/1816-4528-2019-5-3-7

Введение

При изготовлении металлоконструкций тяжелых козловых кранов широко применяются элементы коробчатого сечения (рис.1), которые обладают такими конструктивными преимуществами [1, 2], как

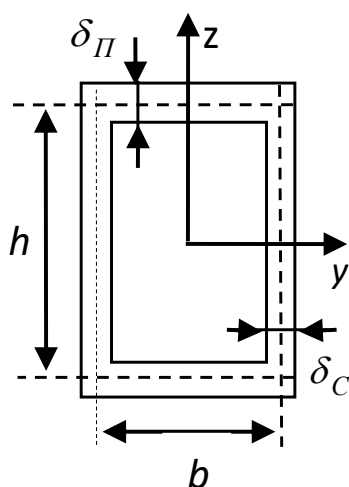


Рис.1. Коробчатое сечение
Fig.1. Box section

большая жесткость на кручение, меньший удельный расход металла и др. Для обеспечения долговечности и надежности работы крана производят расчет его металлоконструкции на прочность, местную устойчивость и жесткость. В статье представлены оптимизационные задачи определения экстремальных значений компонентов напряженно-деформированного состояния (НДС) в элементах металлоконструкции, необходимых при расчете, и градиентные методы их решения.

Условия на прочность, местную устойчивость, статическую жесткость

При расчетах металлоконструкций коробчатого сечения проверяют выполнение следующих условий [3]:

1. Условия на прочность выражаются следующими неравенствами:

$$\sigma_{\text{верх.л}} \leq [\sigma], \sigma_{\text{ниж.л}} \leq [\sigma], \sigma_{\text{лев.с}} \leq [\sigma], \sigma_{\text{пр.с}} \leq [\sigma], \quad (1)$$

где $\sigma_{\text{верх.л}}$, $\sigma_{\text{ниж.л}}$, $\sigma_{\text{лев.с}}$, $\sigma_{\text{пр.с}}$ - эквивалентные напряжения в верхних и нижних поясах, левых и правых стенках элемента металлоконструкции; $[\sigma]$ - допустимое напряжение;

2. Условия на местную устойчивость выражаются неравенствами

$$n_{\text{верх.л}} \geq n, n_{\text{ниж.л}} \geq n, n_{\text{лев.с}} \geq n, n_{\text{пр.с}} \geq n, \quad (2)$$

$n_{\text{верх.л}}, n_{\text{ниж.л}}, n_{\text{лев.с}}, n_{\text{пр.с}}$ - запасы местной устойчивости в верхних и нижних поясах, в левых и правых стенках; n - запас местной устойчивости;

3. Условие на статическую жесткость в главной балке

$$u \leq [u], \quad (3)$$

где u - вертикальный прогиб главной балки; $[u]$ - допустимый прогиб.

Эквивалентные напряжения в неравенствах (1) определяются следующим образом [4]

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{верх.л}} &= \sqrt{\sigma_{\text{верх.л}}^2 + 3\tau_{\text{верх.л}}^2}, & \sigma_{\text{ниж.л}} &= \\ \sqrt{\sigma_{\text{ниж.л}}^2 + 3\tau_{\text{ниж.л}}^2}, & & & (4) \\ \sigma_{\text{лев.с}} &= \sqrt{\sigma_{\text{лев.с}}^2 + 3\tau_{\text{лев.с}}^2}, & \sigma_{\text{пр.с}} &= \sqrt{\sigma_{\text{пр.с}}^2 + 3\tau_{\text{пр.с}}^2}, \end{aligned}$$

Где $\sigma_{\text{верх.л}}, \sigma_{\text{ниж.л}}, \sigma_{\text{лев.с}}, \sigma_{\text{пр.с}}$ - нормальные напряжения в поясах и стенках.

Нормальные напряжения в формулах (4) можно вычислить по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{верх.л}} &= \frac{S_x}{F} + \frac{m_y h}{2J_y} + \frac{m_z}{J_z} y, & \sigma_{\text{ниж.л}} &= \frac{S_x}{F} + \frac{-m_y h}{2J_y} + \\ \frac{m_z}{J_z} y, & & & (5) \\ \sigma_{\text{лев.с}} &= \frac{S_x}{F} + \frac{m_y}{J_y} z + \frac{-m_z b}{2J_z}, & \sigma_{\text{пр.с}} &= \frac{S_x}{F} + \frac{m_y}{J_y} z + \\ \frac{m_z b}{2J_z}, & & & \end{aligned}$$

где S_x - продольная внутренняя сила; m_y, m_z - изгибающие моменты; J_y, J_z, F - моменты инерции и площадь поперечного сечения; b, h - ширина и высота прямоугольного контура сечения.

Запасы местной устойчивости в поясах и стенках, необходимые для проверки условий (2) на местную устойчивость определяются по формулам

$$\begin{aligned} n_{\text{верх.л}} &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\text{верх.л}}}{\sigma_{\text{крверх.л}}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{\text{верх.л}}}{\tau_{\text{крверх.л}}}\right)^2}}, & n_{\text{ниж.л}} &= \\ \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\text{ниж.л}}}{\sigma_{\text{крниж.л}}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{\text{ниж.л}}}{\tau_{\text{крниж.л}}}\right)^2}}, & & & (6) \\ n_{\text{лев.с}} &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\text{лев.с}}}{\sigma_{\text{крлев.с}}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{\text{лев.с}}}{\tau_{\text{крлев.с}}}\right)^2}}, & n_{\text{пр.с}} &= \\ \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\text{пр.с}}}{\sigma_{\text{крпр.с}}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{\text{пр.с}}}{\tau_{\text{крпр.с}}}\right)^2}}, & & & \end{aligned}$$

Где $\tau_{\text{верх.л}}, \tau_{\text{ниж.л}}, \tau_{\text{лев.с}}, \tau_{\text{прав.с}}$ - касательные напряжения в поясах и стенках, $\tau_{\text{кр}}, \sigma_{\text{кр}}$ - критические касательное и нормальное напряжения.

Для вычисления касательных напряжений в поясах и стенках, критических касательных и нормальных напряжений в выражении (6) используются формулы

$$\begin{aligned} \tau_{\text{верх.л}} &= \frac{m_x}{2hb\delta_C} + \frac{s_z h y}{2J_y} + \frac{s_y}{J_z \delta_C} \left(\frac{hb\delta_C}{4} + \frac{\delta_C}{2} (b^2 - y^2) \right), \\ \tau_{\text{ниж.л}} &= \frac{m_x}{2hb\delta_C} + \frac{-s_z h y}{2J_y} + \frac{s_y}{J_z \delta_C} \left(\frac{hb\delta_C}{4} + \frac{\delta_C}{2} (b^2 - y^2) \right), \\ \tau_{\text{лев.с}} &= \frac{m_x}{2hb\delta_C} + \frac{s_z}{J_y \delta_C} \left(\frac{hb\delta_C}{4} + \frac{\delta_C}{2} (h^2 - z^2) \right) + \frac{-s_y b z}{2J_z}, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\tau_{\text{прав.с}} = \frac{m_x}{2hb\delta_C} + \frac{s_z}{J_y \delta_C} \left(\frac{hb\delta_C}{4} + \frac{\delta_C}{2} (h^2 - z^2) \right) + \frac{s_y b z}{2J_z},$$

$$\tau_{\text{кр}} = \left(125 + 95 \left(\frac{b_{1np}}{a} \right)^2 \right) \left(\frac{\delta}{b_1} \right)^2 10^4 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{кр}} = 746 \left(\frac{\delta_C}{h} \right)^2 10^4 \text{ МПа},$$

где s_y, s_z - поперечные внутренние силы, m_x - момент кручения, δ_C, δ_C - толщина пояса и толщина стенки сечения элемента металлоконструкции, a - расстояние между поперечными ребрами жесткости, b_{1np} - высота расчетного отсека.

Оптимизационные задачи и градиентные методы их решения

Неравенства (1) в условиях на прочность приводят к необходимости определения максимальных эквивалентных напряжений в левых и правых стенках, верхних и нижних поясах элемента металлоконструкции, что равносильно решению четырех оптимизационных задач [5]:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ниж.л}}(x, y) &\rightarrow \max, & 0 \leq x \leq l, & -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}, \\ \sigma_{\text{верх.л}}(x, y) &\rightarrow \max, & 0 \leq x \leq l, & -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{лев.с}}(x, z) &\rightarrow \max, & 0 \leq x \leq l, & -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}, \\ \sigma_{\text{пр.с}}(x, z) &\rightarrow \max, & 0 \leq x \leq l, & -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}, \end{aligned}$$

где неравенства $0 \leq x \leq l, -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$ и $0 \leq x \leq l, -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$ определяют области допустимых значений переменных (x, y) и (x, z) , соответствующие поясу и стенке элемента металлоконструкции коробчатого сечения; l - длина элемента металлоконструкции.

Неравенства (2) в условиях на местную устойчивость приводят к необходимости определения минимальных запасов местной устойчивости в левых и правых стенках, верхних и нижних поясах элемента металлоконструкции, что равносильно решению четырех оптимизационных задач [5]:

$$\begin{aligned} n_{\text{ниж.л}}(x, y) &\rightarrow \min, & 0 \leq x \leq l, & -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}, \\ n_{\text{верх.л}}(x, y) &\rightarrow \min, & 0 \leq x \leq l, & -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} n_{\text{лев.с}}(x, z) &\rightarrow \min, & 0 \leq x \leq l, & -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}, \\ n_{\text{пр.с}}(x, z) &\rightarrow \min, & 0 \leq x \leq l, & -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}. \end{aligned}$$

Задачи (8), (9) являются задачами условной оптимизации. Области допустимых значений являются прямоугольниками стенок и поясов элементов металлоконструкции. Если внутренние силы S_x, S_y, S_z и моменты m_x, m_y, m_z в элементах металлоконструкций определены в виде функций, например, методом граничных элементов [6, 7], то целевые функции будут нелинейными функциями 2-х переменных. Так как задачи (8), (9) имеют линейные ограничения [8], то их целесообразно решать методом Франка-Вульфа. В основе этого метода лежит линеаризация целевой функции $f(x, y)$ двух переменных с помощью разложения в ряд Тейлора до членов первого порядка по формуле:

$$f(x, y) \approx f(x_0^*, y_0^*) + \frac{\partial f(x_0^*, y_0^*)}{\partial x} (x - x_0^*) + \frac{\partial f(x_0^*, y_0^*)}{\partial y} (y - y_0^*),$$

где $M_0^*(x_0^*, y_0^*)$ - точка из области допустимых значений оптимизационной задачи.

Вводим обозначение $f^*(x, y) = f(x_0^*, y_0^*) + \frac{\partial f(x_0^*, y_0^*)}{\partial x} (x - x_0^*) + \frac{\partial f(x_0^*, y_0^*)}{\partial y} (y - y_0^*)$, получаем задачу линейного программирования:

$$f^*(x, y) \rightarrow \max, \quad a_1 \leq x \leq b_1, \quad a_2 \leq y \leq b_2. \quad (10)$$

Как известно [9], решение задачи линейного программирования (10) будет наблюдаться в угловой точке $M_1(x_1, y_1)$ области допустимых значений, которая в задачах (8), (9) является прямоугольной областью. Вектор $M_0^*M_1$ задает только направление увеличения значений целевой функции $f^*(x, y)$ (направление подъема).

Далее для определения максимального значения целевой функции на отрезке $[M_0^*M_1]$ можно воспользоваться методом поразрядного поиска. Схема применения метода поразрядного поиска следующая [10]:

1. Выбирается шаг Δ . От точки M_0^* в направлении вектора $M_0^*M_1$ перебираются точки с шагом Δ . Процесс останавливается в точке M_2 , если после нее значения функции $f^*(x, y)$ перестают увеличиваться, или когда точка M_2 совпадет с конечной точкой M_1 .

2. Выбирается шаг $\Delta_1 < \Delta$. От точки M_2 в направлении вектора $M_2M_0^*$ перебираются точки с шагом Δ_1 . Процесс останавливается в точке M_3 , если после нее значения функции $f^*(x, y)$ перестают увеличиваться, или когда точка M_3 совпадет с точкой M_0^* .

3. Процесс завершается, когда очередной шаг $\Delta_i < \varepsilon$, где ε - заранее выбранное значение.

4. Обозначаем M_1^* точку, в которой закончился процесс перебора. При этом выполняется условие $f(M_1^*) > f(M_0^*)$.

Далее получаем задачу линейного программирования вида (10), где $f^*(x, y) = f(x_1^*, y_1^*) + \frac{\partial f(x_1^*, y_1^*)}{\partial x} (x - x_1^*) + \frac{\partial f(x_1^*, y_1^*)}{\partial y} (y - y_1^*)$ - разложение в ряд Тейлора в найденной на первой итерации точке $M_1^*(x_1^*, y_1^*)$.

Задачи линейного программирования с применением задач поразрядного поиска повторяются, пока не будет выполнено условие окончания решения - расстояние между последующим и предыдущим значениями целевой функции меньше заранее выбранного значения. В итоге последняя точка будет точкой, в которой наблюдается максимальное значение целевой функции.

Чтобы проверить выполнение неравенства (3) в условии на статическую жесткость в главной балке, необходимо найти наибольшее значение прогиба в главной балке, т.е. требуется решить следующую оптимизационную задачу:

$$u(x) \rightarrow \max \quad 0 \leq x \leq l. \quad (11)$$

С помощью метода граничных элементов прогиб главной балки можно найти как нелинейную функцию одной переменной, следовательно, задача (11)

- нелинейная задача условной оптимизации функции одной переменной. Появляется возможность решения задачи (11) градиентными методами

Функция $u(x)$, найденная методом граничных элементов, является дифференцируемой функцией, что позволяет пользоваться модифицированным методом Ньютона с регулировкой шага, последовательность итераций которого строится по формуле [11-15]:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}. \quad (11)$$

Параметр α_k позволяет избежать основного недостатка классического метода Ньютона - зависимости от выбора начального приближения. Параметр α_k определяется при решении одномерной оптимизационной задачи:

$$f\left(x_k + \alpha_k \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}\right) \rightarrow \max, \quad a \leq x_k + \alpha_k \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} \leq b$$

методом поразрядного поиска, уже описанным в статье.

Заключение

Градиентные методы оптимизации обладают большей скоростью сходимости по сравнению с прямыми методами. Таким образом, определение экстремальных значений прогибов, эквивалентных напряжений, запасов местной устойчивости с использованием градиентных методов оптимизации упрощает проверку ограничений на прочность, местную устойчивость и статическую жесткость и повышает точность результатов исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гохберг, М.М. Металлические конструкции подъемно-транспортных машин. - Л.: Машиностроение, 1976. - 456 с.
2. Строительная механика и металлоконструкции подъемно-транспортных, строительных и дорожных машин: учебное пособие / А.В. Вершинский, А.П. Кобзев, Р.А. Кобзев, А.Н. Шубин. - Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т, 2004. - 219 с.
3. Кобзев, А.П. Оптимальное проектирование тяжелых козловых кранов. - Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1991. - 160 с.
4. Александров, А.В. Сопротивление материалов / А. В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. - М.: Высш. шк., 2000. - 560 с.
5. Атапин, В.Г. О применении методов оптимизации в проектировании тяжелых многоцелевых станков // Обработка металлов (технология, оборудование, инструменты), 2013. - № 3. - С. 54-67.
6. Барановская Л.В. Теоретические основы применения метода граничных элементов к расчету пространственных крановых металлоконструкций // Вестник СГТУ, 2009. - №1(37) - С. 48-54.
7. Бенерджи, П. Методы граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. - М.: Изд-во «Мир», 1984. - 494 с.
8. Реклейтис, Г. Оптимизация в технике: в 2 кн., кн.2. Пер. с англ. / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Рэгсдел. - М.: Мир, 1986. - 318 с.
9. Власов, В.А. Методы оптимизации и оптимального управления: учебное пособие / В.А.

Власов, А.О. Толоконский. - Москва: НИЯУ МИФИ, 2013. — 88 с.

10. Реклейтис, Г. Оптимизация в технике: в 2 кн., кн.1. Пер. с англ. / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Рэгсдел. - М.: Мир, 1986. - 348 с.

11. Сухарев, А.Г. Курс методов оптимизации: учебное пособие / А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. - 2-е изд. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2011. - 384 с.

12. Гончаров, В.А. Методы оптимизации: учебное пособие. - М.: Высшее образование, 2009.- 191 с.

13. Cordero A., Torregrosa J.R. Variants of Newton,s method using fifth-order quadrature formulas //

Applied Mathematics and Computation, 2007. - V. 190. - P. 686-698. -

<https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.01.062>

14. Numerical optimization: Theoretical and practical aspects / J.F. Bonnans, J.C. Gilbert, C. Lemaréchal, C.A. Sagastizábal // Heidelberg: Springer-Verlag. - Berlin, 2006. - P. 494.

15. Gutierrez J.M., Hernandez-Veron M.A. An acceleration of the continuous Newton,s method // Journal of Computational and Applied Mathematics, 2019. - V. 354, P. 213-220. -

<https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.03.013>

Larisa V. Baranovskaya, C. Sc. in Engineering, **Natalya M. Chernova**, Dr. Sc. in Engineering

Balakovo Engineering and Technology Institute (branch) of National Research Nuclear University MEPhI, 413853, Russia, Saratov region, Balakovo, Chapaeva st., 140

DETERMINATION OF EXTREME COMPONENT VALUES OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THE BOX-SHAPED CRANE METAL STRUCTURES USING GRADIENT METHODS

Abstract: *The article is devoted to the calculation of heavy metal structures of gantry cranes with box-section. In order to ensure durability and reliability of crane operation, it is necessary to check conditions for strength, local stability, static rigidity. The article presents formulas for calculating of equivalent stresses, local stability reserves, vertical deflections in walls and belts of metal structure elements. Their extreme values are compared to the allowed values. Optimization tasks of extreme value search are presented. According to the type of target functions and restrictions, it is concluded that they are non-linear tasks of conditional optimization. Gradient methods of their solution are proposed - Frank-Wolf method and modified Newton method. The main steps and schemes of application of these methods are considered.*

Keywords: *gantry crane, gantry crane metal construction, box section, stress-strain state components, optimization problems, gradient optimization methods.*

Article info: *received October 01, 2019*

DOI: *10.26730/1816-4528-2019-5-3-7*

REFERENCES

1. Gokhberg M.M. Metallicheskie konstruksii pod"emno-transportnykh mashin [Metal structures of lifting and transportation machines]. Leningrad: Mechanical Engineering, 1976. 456 P.

2. Vershinskiy A.V., Kobzev A.P., Kobzev R.A., Shubin A.N. Stroitel'naya mekhanika i metallokonstruksii pod"emno-transportnykh, stroi-tel'nykh i dorozhnykh mashin: uchebnoe posobie [Construction mechanics and Metal structures of transport, construction and road vehicles: training manual]. Saratov: Saratov state technical university, 2004. 219 P.

3. Kobzev A.P. Optimal'noe proektirovanie tyazhelykh kozlovykh kranov [Optimal design of heavy goat cranes]. Saratov: Publishing house of Saratov university, 1991. 160 P.

4. Aleksandrov A.V., Potapov V.D., Derzhavin B.P. Soprotivlenie materialov [Resistance of materials]. Moscow: Higher school, 2000. 560 P.

5. Atapin V.G. O primeneniі metodov optimizatsii v proektirovanii tyazhelykh mnogotselevykh stankov [The usage of optimization methods in the design of heavy multi-purpose machines]. Obrabotka metallov (tekhnologiya, oborudovanie, instrumenty) [Metal processing (technology, equipment, tools)], 2013. No. 3. P. 54-67.

6. Baranovskaya L.V. Teoreticheskie osnovy primeneniya metoda granichnykh elementov k raschetu prostranstvennykh kranovykh metallokonstruksiy [Theoretical basis of application of boundary elements method to calculation of spatial crane metal structures]. Vestnik SGTU [Vestnik SSTU], 2009. No. 1(37). P. 48-54.

7. Benerdzhi P., Batterfield R. Metody granichnykh elementov v prikladnykh naukakh [Methods of boundary elements in applied sciences]. Moscow: Publishing house "Mir", 1984. 494 P.

8. Rekleytis G., Reyvindran A, Regsdel K. Optimizatsiya v tekhnike: v 2 kn., kn.2. Per. s angl. [Optimization in engineering: in 2 volumes, book 2. Translation from English]. Moscow: Publishing house "Mir", 1986. 318 P.

9. Vlasov V.A., Tolokonskiy A.O. Metody optimizatsii i optimal'nogo upravleniya: uchebnoe posobie [Methods of optimization and optimal management: tutorial]. Moscow: National Research Nuclear University MPhI, 2013. 88 P.

10. Rekleytis G., Reyvindran A, Regsdel K. Optimizatsiya v tekhnike: v 2 kn., kn.1. Per. s angl. [Optimization in engineering: in 2 volumes, book 1. Translation from English]. Moscow: Publishing house "Mir", 1986. 348 P.

11. Sukharev A.G., Timokhov A.V., Fedorov V.V. Kurs metodov optimizatsii: uchebnoe posobie [Optimization course: tutorial]. 2nd Edition. Moscow: FIZMATLIT, 2011. 384 P.

12. Goncharov V.A. Metody optimizatsii: uchebnoe posobie [Methods of optimization: tutorial]. Moscow: Higher school, 2009. 191 P.

13. Cordero A., Torregrosa J.R. Variants of Newton,s method using fifth-order quadra-ture formulas // Applied Mathematics and Computation, 2007. - V. 190. - P. 686-698. - <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.01.062>

14. Numerical optimization: Theoretical and practical aspects / J.F. Bonnans, J.C. Gilbert, C. Lemaréchal, C.A. Sagastizábal // Heidelberg: Springer-Verlag. - Berlin, 2006. - P. 494.

15. Gutierrez J.M., Hernandez-Veron M.A. An acceleration of the continuous Newton,s method // Journal of Computational and Applied Mathematics, 2019. - V. 354, P. 213-220. - <https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.03.013>

Библиографическое описание статьи

Барановская Л.В., Чернова Н.М. Определение экстремальных значений компонентов напряженно-деформированного состояния крановых металлоконструкций коробчатого сечения градиентными методами // Горное оборудование и электромеханика – 2019. – № 5 (145). – С. 3-7.

Reference to article

Baranovskaya L.V., Chernova N.M. Determination of extreme component values of the stress-strain state of the box-shaped crane metal structures using gradient methods. Mining Equipment and Electromechanics, 2019, no. 5 (145), pp. 3-7.