

УДК 622.6

Боршинский Максим Юрьевич, старший преподаватель

Сибирский государственный индустриальный университет,  
654007, Россия, г. Новокузнецк, ул. Кирова, 42

E-mail: bormax2005@mail.ru

## ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КАНАТА И ВАЛА КАК МОДЕЛЬ СОСТАВНОЙ ЧАСТИ СЛОЖНОГО ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ШАХТНОГО ПОДЪЕМА

**Аннотация:** Выполнен анализ сложного объекта управления электромеханической системы управления шахтного подъема. Установлено существенное влияние на износостойкость, качество управления и энергоемкость системы при недостаточной изученности поперечных колебаний вала и каната. Существование поперечных колебаний подвержено экспериментально на примере шахты Абаканского рудника. Известные исследования поперечных колебаний основаны на изгибе балки, но у балки касательная на опоре располагается под углом больше нуля градусов, касательные концов вала и каната равны нулю, в силу чего добавляются дополнительные нулевые граничные условия, которые не могут быть реализованы на базе теории изгиба балки. Разработан уточненный метод, названный зеркальной симметрией – преобразование сосредоточенной нагрузки в эквивалентные изгибающие моменты, и на его основе создана динамическая модель, использующая статический изгиб как начальные условия. В основу построения теории положен метод Фурье (разделение переменных). Метод Фурье не обеспечивает исследование колебаний систем с функциями начальных условий, не разлагаемых в ряд Фурье по синусам, которые не содержат свободного члена. В статье решена задача, позволившая применять функции, разлагаемые в ряды Фурье со свободным членом. В методе Фурье дополнена возможность введения дополнительных слагаемых, обеспечивающих моделирование затухающих колебательных процессов. Решена задача математического описания одним уравнением статического изгиба и динамических процессов, которые в теории изгиба балки решены двумя независимыми системами. Проведены модельные и частично экспериментальные исследования решенных задач.

**Ключевые слова:** Шахтный подъем, электромеханическая система, поперечные колебания, вал, канат, метод Фурье, зеркальная симметрия, модель.

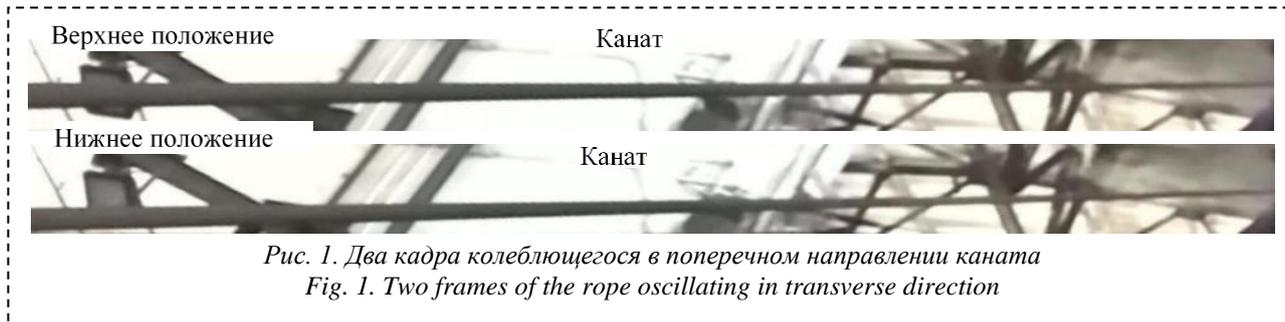
**Информация о статье:** принята 20 ноября 2020 г.

DOI: 10.26730/1816-4528-2020-6-43-51

В горном производстве шахтные подъемные установки (ШПУ) являются основным транспортным средством для перевозки грузов и людей. Рабочий процесс сопровождается колебательными процессами в продольном и в поперечном направлениях по отношению к оси. Продольные и поперечные колебания воздействуют на барабан. Если продольные колебания

изучаются достаточно интенсивно [1, 2, 3, 4], то поперечным колебаниям вала и каната в теории ШПУ практически не уделяется внимания.

Тем не менее, в работе [5] модельные и экспериментальные исследования на примере фрикционной подъемной системы показали, что из-за внешних возмущений продольные колебания сопровождаются поперечными. Следует отметить



работы [6, 7], но в них рассматриваются вибрационные колебания без возможности учета граничных условий. Убедительно выполнено моделирование поперечной вибрации каната лифта в работе [8], но, поскольку работа ориентирована на исследование высокочастотных колебаний, не учитываются энергозатратные усилия на изгиб и низкочастотные колебания, его сопровождающие.

Актуальность исследования поперечных колебаний подтверждена автором видеозаписью поперечных колебаний каната между барабаном и шкивом

ШПУ шахты Абаканского рудника. Поскольку камера одновременно не охватывает колеблющийся участок, на рис. 1 приведены два кадра отрезка каната со стороны шкива. Сопоставление кадров показывает на угловое смещение левого конца отрезка, колеблющегося сверху вниз и обратно.

В ШПУ источником поперечных колебаний является сосредоточенная нагрузка  $P$ . Анализ источников [9, 10, 11, 12, 13] показал, что наиболее близким к теории поперечных колебаний упругого вала и каната является описание колебаний натянутой струны по методу Фурье. Но в теории колебаний струны допускается излом струны в конечных точках закрепления и в точке оттягивания, которые при изгибах вала и каната без разрушения невозможны. Конструктивно валу и канату в большей мере соответствует круглая балка, свободно опирающаяся на опоры и изогнутая под действием груза  $P$  (рис. 2). Из рисунка следует, что касательные в точках опор  $P_1$  и  $P_2$  расположены под углом  $\alpha \neq 0$  и производная от изгиба  $h(x)$  не равна нулю.

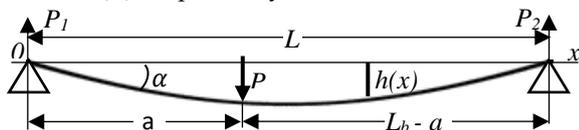


Рис. 2. Схема нагруженной круглой балки  
Fig. 2. Scheme of the loaded round beam

В отличие от балки концы вала защемлены в подшипниках, где изгибаться не могут и остаются прямыми. На выходе из подшипников в точках  $P_1$  и  $P_2$  излом вала физически невозможен и изгиб вала происходит плавно, начиная от касательных в точках  $P_1$  и  $P_2$ , которые совпадают с линией  $0 - x$  с углом наклона  $\alpha = 0$ . В результате в точках  $P_1$  и  $P_2$ , равен нулю не только изгиб  $h(x)=0$ , но и производная от изгиба

$$\frac{h(x)}{dx} = 0.$$

Это существенное отличие вала от балки (рис. 1), где  $\alpha > 0$ , видно из сравнения рис. 3 с рис. 2.

Защемленные в подшипниках концы вала идентичны заделке консоли в стене, что подтверждает объективность нашей трактовки. Но прямое использование теории консоли невозможно, поскольку в отличие от консоли у вала защемлены не один конец, а оба, а развитие теории

двухстороннего защемления не представляется возможным.

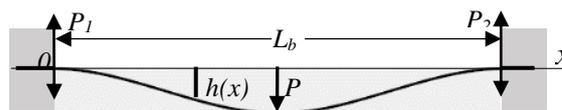


Рис. 3. Схема изогнутого вала и каната  
Fig. 3. Scheme of curved shaft and rope

Один конец каната жестко прикреплен к соуду. При жестком соединении излом каната в точке соединения невозможен. На барабан и два шкива канат набегают по касательной к окружности и излом также невозможен, так что производная от изгиба также равна нулю и поперечные колебания каната идентичны колебаниям вала и могут быть описаны общей моделью. В отличие от балки, силы реакции  $P_1$  и  $P_2$  на рис. 2 знакопеременные и вызывают дополнительную динамическую нагрузку ШПУ.

Целью данной статьи является построение теории поперечных колебаний вала и каната за счет увеличения числа граничных условий, снижения динамических нагрузок ШПУ, потребления электроэнергии и износа от фреттинга [14, 15].

В источниках [10, 11, 12, 13] теория изгиба построена с использованием моментов  $M$ , изгибающих балку за ее концы, что иллюстрируется рис. 4 из источников. Используя дифференциальное уравнение упругой линии гибкого стержня для небольших изгибов, получают соотношение, не вызывающее сомнения

$$\frac{d^2 h(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ}, \quad (1)$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $J$  – момент инерции вала. Но метод не решает проблемы равенства нулю производной изгиба и тем самым излома в точках защемления. Восполним этот пробел. Для этого сформируем метод преобразования сосредоточенной силы  $P$  в моменты относительно сил реакции опор  $P_1$  и  $P_2$  на сосредоточенную силу  $P$ .

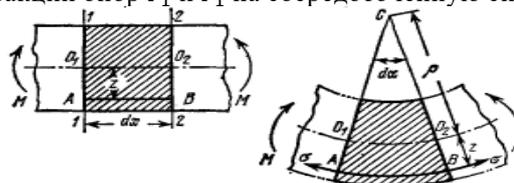


Рис. 4. К теории изгиба балки, свободно опертой на концах

Fig. 4. To the beam flexural theory resting freely on the ends

Изгибающие моменты на рис. 4 заменим сосредоточенной силой  $P$ , которую расположим в точке  $x = a$  на рис. 1, при этом рис. 4 преобразуется в рис. 5. Согласно закону Архимеда [16] сила  $P$  создает обратно пропорциональные к длинам плеч моменты. Так по отношению к опоре  $P_1$  имеем

$$\frac{P_1}{P} = \frac{L_b - a}{L_b},$$

из которого получаем

$$P_1 = \frac{P(L_b - a)}{L_b}$$

На основании рис. 5 формируем приращение  $dM$  момента силы  $P_1$  с плечом  $dx$

интегрируя который, получаем функцию, описывающую изгиб на интервале  $0 \leq x \leq a$ ,

$$M(x) = P \left( \frac{L_b - a}{L_b} x + C_1 \right), \quad 0 \leq x \leq a \quad (2)$$

причем в отличие от классического метода функция (2) содержит дополнительную постоянную интегрирования  $C_1$  уже на этапе формирования функции момента. Источники [10, 11, 12] такой возможности не предоставляют.

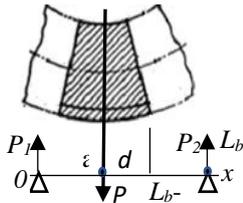


Рис. 5. Изгиб каната и вала от воздействия сосредоточенной силы  $P$

Fig. 5. Rope and shaft bend from concentrated force  $P$

Для формирования момента силы на интервале  $a \leq x \leq L_b$  воспользуемся принципом зеркальной симметрии, предложенным автором. Изложение теории с графической интерпретацией выполним на примере струны, закрепленной на двух опорах  $A$  и  $B$ . Математическое описание заимствовано из источника [6]

$$h(x) = \begin{cases} hot * \frac{x}{a}, & 0 \leq x \leq a, \\ hot * \frac{L_b - x}{L_b - a}, & a \leq x \leq L_b, \end{cases} \quad (3)$$

а графическое изображение в координатах  $0-x$  представим на рис. 6 отрезками 1 и 3.

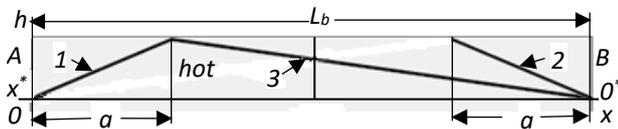


Рис. 6. Графические иллюстрации к принципу зеркальной симметрии

Fig. 6. Graphical illustrations to the principle of mirror symmetry

Введем вторую абсциссу  $x^*$  с началом на опоре  $B$  и направленной встречно основной  $0-x$ . Первое уравнение из (3) запишем в системе с абсциссой  $x$ ,

$$h(x) = hot * \frac{x^*}{a^*}. \quad (4)$$

Согласно [17] преобразование из переменной  $x^*$  в переменную  $x$  имеет вид

$$x^* = L_b - x, \quad a^* = L_b - a. \quad (5)$$

Подставляя выражения для  $x^*$  и  $a^*$  в (4), получаем

$$h(x) = hot * \frac{L_b - x}{L_b - a},$$

функцию, совпадающую с функцией (3) на втором интервале  $a \leq x \leq L_b$ .

Таким образом, имея функцию на интервале  $0 \leq x \leq a$ , достаточно ее записать в координатах  $x^*$  и преобразовать в координаты  $x$ . В результате получим (3). Построив график функции (4) на рис. 5, получили график 2, зеркально симметричный графику 1. Это дало основание назвать метод зеркальной симметрией.

Используя зеркальную симметрию, функцию (2) переписем в системе координат  $x^*$ , а, применив к (2) преобразование (5), получим

$$M(x) = P \left( a^* - \frac{a^*}{L_b} x^* + C_2 \right), \quad a \leq x \leq L_b, \quad (6)$$

где  $C_2 = L_b - C_1$ .

Объединяя (2) и (5), запишем

$$M(x) = \begin{cases} P \left( \frac{L_b - a}{L_b} x + C_1 \right), & 0 \leq x \leq a, \\ P \left( -\frac{a}{L_b} x + a + C_2 \right), & a \leq x \leq L_b. \end{cases} \quad (7)$$

Функция (7) описывает статический режим и не учитывает действие момента инерции движущихся масс и вызванного ими динамического момента  $M(t)$ , зависящего от переменной  $t$ . Учет только изгибающего и динамического моментов приводит к незатухающим колебаниям. Затухание обеспечивает лобовое сопротивление воздуха  $M_c(t)$  и внутреннее вязкое трение  $M_t(t)$  об. Подставляя перечисленные моменты в (1), получаем

$$EJ \frac{d^2 h(x,t)}{dx^2} = M(x) + M(t) - M_c(t) - M_t(t), \quad (8)$$

Функции динамических моментов определим из второго закона Ньютона

$$m \frac{d^2 h(t)}{dt^2} = P(t),$$

где  $m$  – масса вала и другие жестко присоединенные массы. Чтобы силы преобразовать в моменты, левую и правую части равенства умножим на  $L_b$ ,

$$M(t) = mL_b \frac{d^2 h(t)}{dt^2}. \quad (9)$$

На поперечные колебания вала и каната оказывают тормозящее действие сила  $f_c$  лобового сопротивления воздуха и сила  $f_t$  внутреннего вязкого трения, которые описываются соотношениями, функциональные зависимости которых известны из физики

$$f_c = c_c S \frac{\rho v^2}{2}, \quad f_t = c_t \eta D v,$$

где  $c_c, c_t$  – коэффициенты лобового сопротивления и внутреннего вязкого трения,  $S$  – площадь сечения, перпендикулярного продольной оси,  $\rho$  – плотность материала,  $D, v$  – диаметр и скорость движения в направлении, перпендикулярном оси,  $\eta$  – динамическая вязкость воздуха. В последние соотношения входит скорость движущегося тела, все точки которого перемещаются с одной и той же скоростью.

При переменной скорости задача решается переходом к малым изменениям скорости, выразив скорость через бесконечно малое приращение перемещение  $dh$  к бесконечно малому периоду времени  $dt$ , скорость  $v$  заменим на производную от перемещения  $dh/dt$ , поскольку  $h$  выходная величина, число переменных в уравнении, как и его порядок, не изменяются. Подставляя  $v = dh/dt$ , получим

$$f_c = \frac{c_c S \rho}{2} \frac{d^2 h(t)}{dt^2}, \quad f_t = c_t \eta D \frac{dh(t)}{dt}.$$

Силы сопротивления движению  $f_c$  и  $f_t$  от переменной  $x$  не зависят, поэтому действительны на обоих интервалах  $0 \leq x \leq a$  и  $a \leq x \leq L_b$ . Кроме того, функции  $f_c$  и  $f_t$  имеют размерность силы, а не момента. Чтобы привести функции силы к размерности момента, коэффициенты  $c_c$  и  $c_t$  представим в виде  $c_c = C_c L_b$  и  $c_t = C_t L_b$ , функции сил примут вид

$$M_c(t) = \frac{1}{2} C_c L_b S \rho \left( \frac{dh(t)}{dt} \right)^2, C_c L_b = c_c, (10,a)$$

$$M_t(t) = C_t L_b \eta D \frac{dh(t)}{dt}, C_t L_b = c_t, B = C_t L_b \eta D. (10,b)$$

Равенства не нарушились, но приняли размерность моментов. При малых скоростях течение воздуха ламинарное (плавное), а при больших – турбулентное (с завихрениями). Точка разделения режимов обтекания воздухом зависит от числа Рейнольдса  $Re$  и определяется из следующего соотношения

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta},$$

где  $\rho$ ,  $v$ ,  $\eta$  – плотность, скорость и вязкость воздуха,  $D$  – диаметр вала. Из источника [18] для воздуха  $\rho = 1.205$ ,  $v = 10000$ ,  $\eta = 18.1$ , а диаметр вала  $D = 0.4$  и каната  $D_k \ll D$ , откуда

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta} = \frac{1.205 \cdot 10000 \cdot 0.4}{18.1} \ll 1000,$$

которому соответствует ламинарное обтекание воздухом вала, а тем более каната, поэтому лобовым сопротивлением можно пренебречь, принимая  $A = 0$ .

Подставив в (8) полученные моменты и все слагаемые разделив на  $P$ , получим дифференциальное уравнение, описывающее затухающие колебания

$$\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} = \frac{m L_b}{EJ} \frac{\partial^2 h(t)}{\partial t^2} + \frac{B}{EJ} \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} + \begin{cases} \frac{P}{EJ} \left( \frac{L_b - a}{L_b} x + C_1 \right), & 0 \leq x \leq a, \\ \frac{P}{EJ} \left( -\frac{a}{L_b} x + a + C_2 \right), & a \leq x \leq L_b. \end{cases}$$

Таким образом, на основе теории зеркальной симметрии с введением промежуточной второй координаты создана новая более универсальная математическая модель поперечных колебаний вала и каната. Модель описывает вынужденные и свободные колебания, а учет внутреннего вязкого трения обеспечивает учет физически неизбежного затухания колебаний.

В источниках [10, 11, 12, 13] статический изгиб и колебания описаны разными математическими моделями. Разработанная математическая модель (11) универсальна. Так, в состоянии покоя имеем

$$\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = 0$$

При этом дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных (11) преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение,

$$\frac{d^2 h(x,t)}{dx^2} = \begin{cases} \frac{P}{EJ} \left( \frac{L_b - a}{L_b} x + C_1 \right), & 0 \leq x \leq a, \\ \frac{P}{EJ} \left( -\frac{a}{L_b} x + a + C_2 \right), & a \leq x \leq L_b. \end{cases}$$

которое после двукратного интегрирования преобразуется в функцию, которая описывает установившееся состояние статического поперечного изгиба:

$$\frac{EJ}{P} \frac{dh(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{L_b - a}{2L_b} x^2 + C_1 x + C_3, & 0 \leq x \leq a, \\ -\frac{a}{2L_b} x^2 + (a + C_2)x + C_4, & a \leq x \leq L_b, \end{cases}$$

$$\frac{EJ}{P} h(x) =$$

$$\begin{cases} \frac{L_b - a}{6L_b} x^3 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_5, & 0 \leq x \leq a, \\ -\frac{a}{6L_b} x^3 + (a + C_2) \frac{x^2}{2} + C_4 x + C_6, & a \leq x \leq L_b. \end{cases}$$

Постоянные интегрирования определяем исходя из выполнения:

1. Граничных условий  $\frac{dh(0)}{dx} = h(0) = \frac{dh(L_b)}{dx} = h(L_b) = 0$ .
2. Условия гладкости кривой  $h(x)$  в точке  $x = a$  сочленения интервалов  $0 \leq x \leq a$  и  $a \leq x \leq L_b$ .

В результате получаем функцию статического изгиба

$$h(x) = \begin{cases} \frac{L_b - a}{6L_b} x^3 - \frac{L_b - a^2}{12L_b} x^2, & 0 \leq x \leq a, \\ -\frac{a}{6L_b} x^3 + \frac{a(4L_b + a)}{12L_b} x^2 - \frac{a(L_b + a)}{6} x + \frac{L_b a^2}{12}, & a \leq x \leq L_b, \end{cases} (12)$$

а поскольку она служит началом колебаний, то она выполняет функции и начальных условий.

На рис. 7 приведен график функции (12) статического изгиба (начальных условий)



Рис. 7. Изгиб вала от силы  $P$  действующей в точке  $a = L_b/2$

Fig. 7. The bending of the shaft from the force  $P$  acting at the point  $a = L_b/2$

Кривой на рис. 7 соответствует кривая на рис. 8, полученная экспериментально.

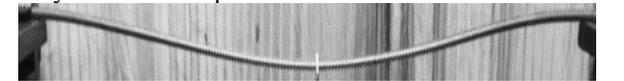


Рис. 8. Экспериментальная кривая изгиба вала от силы  $P$ , действующей в точке  $a = L_b/2$

Fig. 8. Experimental curve of the shaft bend from the force  $P$  acting at the point of  $a = L_b/2$

Для построения математической модели свободных колебаний так же воспользуемся уравнением (11), приравняв нулю входное воздействие  $P$

$$\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} = \frac{m L_b}{EJ} \frac{\partial^2 h(t)}{\partial t^2} + \frac{B}{EJ} \frac{\partial h(x,t)}{\partial t}. (13)$$

Достаточно универсальным и простым методом решения дифференциальных уравнений с частными производными является метод разделения переменных (метод Фурье). Но его применение сопряжено с применением разложения функций начальных условий в ряд Фурье по синусам [5] на интервале  $[0, L_b]$  При этом настораживает заявление автора работы [19], который в главе 9 «Ряды Фурье» приводит пример разложения простейшей функции  $f(x) = x$  как по синусам, так и по косинусам, а в главе 10 уточняет, что разложение по синусам возможно только для функций, которые разлагаются по синусам на интервале  $[0, L_b]$ .

Выполнив разложение по синусам функцию статического изгиба (12), получили кривую, изображенную на рис. 9. Из рис. 9 видно, что кривая принципиально отличается от кривой

статического изгиба на рисунках 7 и 8. Функция статического изгиба по синусам не разложима, поскольку **помимо нечетных содержит четные функции**. Мнение автора работы [19] верное.

Для решения нашей задачи классический метод непосредственно не применим, поскольку не равным нулю является постоянный коэффициент разложения в ряд Фурье.



Рис. 9. Кривая функции  $h(x) = f_{2k} \sin(\pi k x / L_b)$   
Fig. 9. Curve of the function  $h(x, 0) = f_{2k} \sin(\pi k x / L_b)$

Чтобы решить проблему и использовать метод разделения переменных **решения уравнения (13), будем искать также в виде произведения двух функций, но с добавлением постоянной составляющей  $\frac{f_{01}}{2} = const$**

$$h(x, t) = \frac{f_{01}}{2} + X(x)T(t). \quad (14)$$

Поскольку в уравнение (13) входят только производные от функции  $h(x, t)$ , а производные от постоянного числа равны нулю, слагаемое  $\frac{f_{01}}{2}$  в (14) на справедливость решения не влияет, в то же время развиваемый подход расширяет метод на применение начальных условий, разложение в ряд которых содержит постоянный член  $f_{01}/2$ .

Дважды дифференцируем (14) и подставляем полученные производные в (13)

$$\ddot{X}(x)T(t) = \frac{mL_b}{EJ} \dot{T}(t)X(x) + \frac{B}{EJ} \ddot{T}(t)X(x),$$

Левые и правые части уравнений разделим на  $T(t)X(x)$ , согласно [15]

$$\frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = \frac{mL_b \dot{T}(t) + B \ddot{T}(t)}{EJ T(t)} = -\lambda = const. \quad (15)$$

Из равенства (16) получаем:

$$\ddot{X}(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (16, a)$$

$$\dot{T}(t) + \frac{B}{mL_b} \ddot{T}(t) + \frac{\lambda EJ}{mL_b} T(t) = 0, \quad (16, b)$$

Дифференциальному уравнению (16, a) соответствует характеристическое уравнение  $p^2 + \lambda = 0$  с двумя корнями  $p = \pm \sqrt{-\lambda}$ , которым соответствует решение

$$X(x) = F_{1k} \sin(\sqrt{\lambda} x) + F_{2k} \cos(\sqrt{\lambda} x) \quad (17, a)$$

**Дифференциальное уравнение (16, b) в отличие от классического содержит дополнительные элементы, учитывающие затухание колебаний, и только новый вид уравнения послужил основанием привести детальное обоснование справедливости предлагаемого расширения уравнения.** Новому виду дифференциального уравнения (16, b) соответствует характеристический полином

$$p^2 + \frac{B}{mL_b} p + \lambda \frac{EJ}{mL_b} = 0, \text{ откуда}$$

$$p = -\frac{B}{2mL_b} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4(mL_b)^2} - \frac{\lambda EJ}{mL_b}} = \alpha \pm i\beta,$$

$$\text{где } \alpha = -\frac{B}{2mL_b}, \beta = \pm \sqrt{\alpha^2 - \frac{\lambda EJ}{mL_b}}, \quad (17, b)$$

Все константы, входящие в выражение (17, b), положительные, потому первое слагаемое  $\alpha$  всегда отрицательное, а поскольку модуль Юнга для стали  $E = 210 \cdot 10^9$  – очень большое число, то имеет место  $\alpha^2 < \frac{\lambda EJ}{mL_b}$ , корни комплексные, решение имеет вид

$$T(t) = e^{\alpha t} (F_3 \cos \beta t + F_4 \sin \beta t).$$

Подставляя функции  $T(t)$  и  $X(x)$  из (17, a) в (14), получим

$$h(x, t) = \frac{f_{01}}{2} + [F_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + F_2 \sin(\sqrt{\lambda} x)] e^{\alpha t} [F_3 \cos(\beta t) + F_4 \sin(\beta t)]$$

Полученная функция  $h(x, t)$  удовлетворяет уравнению (13) при любом значении  $\lambda$  и поэтому уравнение имеем бесконечное множество решений, сумма которых в силу линейности уравнения также является его решением

**Дифференциальное уравнение (16, b) в отличие от классического содержит дополнительные элементы, учитывающие затухание колебаний, и только новый вид уравнения послужил основанием привести детальное обоснование справедливости предлагаемого расширения уравнения.** Новому виду дифференциального уравнения (16, b) соответствует характеристический полином

$$p^2 + \frac{B}{mL_b} p + \lambda \frac{EJ}{mL_b} = 0, \text{ откуда}$$

$$p = -\frac{B}{2mL_b} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4(mL_b)^2} - \frac{\lambda EJ}{mL_b}} = \alpha \pm i\beta,$$

$$\text{где } \alpha = -\frac{B}{2mL_b}, \beta = \pm \sqrt{\alpha^2 - \frac{\lambda EJ}{mL_b}}, \quad (17, b)$$

Все константы, входящие в выражение (17, b), положительные, потому первое слагаемое  $\alpha$  всегда отрицательное, а поскольку модуль Юнга для стали  $E = 210 \cdot 10^9$  – очень большое число, то имеет место  $\alpha^2 < \frac{\lambda EJ}{mL_b}$ , корни комплексные, решение имеет вид

$$T(t) = e^{\alpha t} (F_3 \cos \beta t + F_4 \sin \beta t).$$

Подставляя функции  $T(t)$  и  $X(x)$  из (17, a) в (14), получим

$$h(x, t) = \frac{f_{01}}{2} + [F_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + F_2 \sin(\sqrt{\lambda} x)] e^{\alpha t} [F_3 \cos(\beta t) + F_4 \sin(\beta t)]$$

Полученная функция  $h(x, t)$  удовлетворяет уравнению (13) при любом значении  $\lambda$  и поэтому уравнение имеем бесконечное множество решений, сумма которых в силу линейности уравнения также является его решением

$$h(x, t) = \frac{f_{01}}{2} + e^{\alpha t} \sum_{k=1}^{\infty} [F_{1k} \cos(\sqrt{\lambda} x) + F_{2k} \sin(\sqrt{\lambda} x)] [F_{3k} \cos(\beta t) + F_{4k} \sin(\beta t)] \quad (18)$$

Под действием силы  $P$  вал (канат) находится в состоянии покоя, при удалении силы  $P$  в момент времени  $t = 0$  скорость перемещения  $\frac{h(x, 0)}{dt} = 0$ . Дифференцируя (18) по переменной  $t$  и принимая  $t = 0$ , начальную скорость  $\frac{h(x, 0)}{dt} = 0$ , получим соотношение

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} [F_{1k} \cos(\sqrt{\lambda} x) + F_{2k} \sin(\sqrt{\lambda} x)] \beta F_{4k},$$

которое при любом значении  $x$  выполняется только при  $F_{4k} = 0$  и (18) принимает вид

$$h(x, t) = \frac{f_{01}}{2} + e^{\alpha t} \sum_{k=1}^{\infty} [f_{1k} \cos(\sqrt{\lambda} x) + f_{2k} \sin(\sqrt{\lambda} x)] \cos(\beta t) \quad (19)$$

где  $f_{1k} = F_{1k} \cdot F_{3k}$ ,  $f_{2k} = F_{2k} \cdot F_{3k}$

Из бесконечного числа решений (19) выделим те, которые удовлетворяют начальным условиям (12). Подставляя  $t = 0$ , получаем ряд Фурье, соответствующий функции статического изгиба (12)

$$h(x, 0) = \frac{f_{01}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [f_{1k} \cos(\sqrt{\lambda} x) + f_{2k} \sin(\sqrt{\lambda} x)] \quad (20)$$

а подстановка  $\sqrt{\lambda}$  в (20), (19) и (17,b) с учетом  $B = C_T L_b \eta D$ ,  $C_T L_b = c_T$  из (2.15) дает

$$h(x, t) = \frac{f_{01}}{2} + e^{\alpha t} \sum_{k=1}^{\infty} [f_{1k} \cos\left(\frac{2\pi k}{L_b} x\right) + f_{2k} \sin\left(\frac{2\pi k}{L_b} x\right)] \cos(\beta t) \quad (21)$$

где  $\alpha = -\frac{B}{2mL_b}$ ,  $\beta = \pm \sqrt{\alpha^2 - \frac{(2k\pi)^2 EJ}{mL_b^3}}$ ,  $k=1, 2, 3, \dots$

$$h(x, 0) = \frac{f_{01}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [f_{1k} \cos\left(\frac{2\pi k}{L_b} x\right) + f_{2k} \sin\left(\frac{2\pi k}{L_b} x\right)] \quad (22)$$

Составим функции коэффициентов ряда (22)

$$f_{01} = \frac{2}{L_b} \left[ \int_0^a \left( \frac{L_b - a}{6L_b} x^3 - \frac{L_b^2 - a^2}{12L_b} x^2 \right) dx + \int_a^{L_b} \left( -\frac{a}{6L_b} x^3 + \frac{4L_b a + a^2}{12L_b} x^2 - \frac{L_b a + a^2}{6} x + \frac{L_b a^2}{12} \right) dx \right]$$

$$f_{1k} = \frac{2}{L_b} \left[ \int_0^a \left( \frac{L_b - a}{6L_b} x^3 - \frac{L_b^2 - a^2}{12L_b} x^2 \right) \cos\left(\frac{k\pi}{L_b} x\right) dx + \int_a^{L_b} \left( -\frac{a}{6L_b} x^3 + \frac{4L_b a + a^2}{12L_b} x^2 - \frac{L_b a + a^2}{6} x + \frac{L_b a^2}{12} \right) \cos\left(\frac{k\pi}{L_b} x\right) dx \right]$$

$$f_{2k} = \frac{2}{L_b} \left[ \int_0^a \left( \frac{L_b - a}{6L_b} x^3 - \frac{L_b^2 - a^2}{12L_b} x^2 \right) \sin\left(\frac{k\pi}{L_b} x\right) dx + \int_a^{L_b} \left( -\frac{a}{6L_b} x^3 + \frac{4L_b a + a^2}{12L_b} x^2 - \frac{L_b a + a^2}{6} x + \frac{L_b a^2}{12} \right) \sin\left(\frac{k\pi}{L_b} x\right) dx \right]$$

В результате вычисления получаем

$$f_{01} = -\frac{a}{36L_b} (L_b^3 - 2L_b^2 a + 2L_b a^2 - a^3)$$

$$f_{1k} = \frac{L_b^2}{4k^3 \pi^3} \left\{ \frac{L_b}{2k\pi} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{L_b} a\right) \right] + \frac{L_b - 2a}{6} \sin\left(\frac{2k\pi}{L_b} a\right) \right\}$$

$$f_{2k} = \frac{1}{24k^2 \pi^2} \left\{ (L_b - 2a) \left[ 1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{L_b} a\right) \right] + \frac{3L_b}{k\pi} \sin\left(\frac{2k\pi}{L_b} a\right) \right\}$$

Подтверждением теоретических выводов является рис. 10, на котором приведен результат построения функции статического изгиба, ее отображающего ряда ((22) и кривой колебательной функции (21) при  $t = 0$ . Полученные при модельных

исследованиях кривые графиков слились в одну линию.

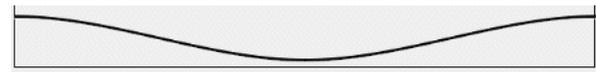


Рис. 10. Совпавшие графики функций (12), (21) и (22)

Fig. 10. Matching graphs of functions (12), (21) and (22)

На рис. 11 проведены кривые функций изгиба, для разных точек  $a$  приложения силы  $P$ , причем светлые рисунки получены моделированием, а темные – экспериментально. Рисунок показывает хорошее совпадение теоретических и экспериментальных графиков.

При поперечных колебаниях все точки вала и каната колеблются одновременно, непрерывно и синхронно как единое целое в направлении, перпендикулярном к оси вала (каната) в состоянии покоя. Продольные колебания точек вдоль оси  $x$  отсутствуют.

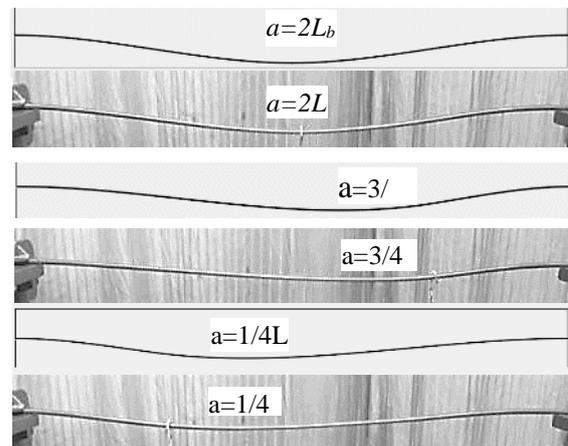


Рис. 11. Изгиб вала от силы  $P$ , действующей в точке  $a$

Fig. 11. The bend of the shaft from the force  $P$  acting at point  $a$

При цифровом моделировании непрерывный процесс поперечных колебаний выполнить невозможно, поэтому используется дискретизация, а одновременность процесса поперечных колебаний точек имитируем тем, что при постоянном  $t$  последовательно просчитываем все точки кривой от  $x = 0$  до  $x = L_b$  и только после этого время  $t$  увеличиваем на шаг дискретизации  $\Delta t$ . Этот процесс назовем прохождением.

При первом проходе граничные условия выполняются. Проверим второй и последующие проходы, которые также начинаются с  $x = 0$ , но теперь  $t > 0$  и граничные условия  $h(0, t)$  не равны нулям и перемещаются вдоль вертикальной линии. Перемещение иллюстрирует рис. 12, на котором показаны три положения колеблющейся кривой. Кривая 1 соответствует исходному изгибу (рис. 10), прямая линия – среднему значению, последняя – изгиб в противоположном по отношению к 1 кривой.

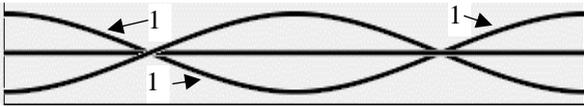


Рис. 12. Переменные граничные условия  
Fig. 12. Variable boundary conditions

Закон изменения граничных условий получим, подставив  $x = 0$  в (21)

$$h(0, t) = \frac{h_{01}}{2} + e^{at} \sum_{k=1}^{\infty} f_{1k} \cos(\beta t).$$

Функция  $h(0, t)$  на каждом проходе постоянная по величине, поскольку зависит только от  $t$ , а  $t$  меняется только при переходе с текущего прохода на следующий. Если к каждой точке кривой прибавить одну и ту же постоянную величину, то форма кривой не изменится, она без изменения переместится по вертикали. Вычитая  $h(0, t)$  – постоянную на каждом проходе величину, обеспечим нулевые граничные условия при любом значении переменной  $t$ . При этом функция (21) примет следующий вид

$$h(x, t) = \frac{h_{01}}{2} + e^{at} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ f_{1k} \cos\left(\frac{2\pi k}{L_b} x\right) + f_{2k} \sin\left(\frac{2\pi k}{L_b} x\right) \right] \cos(\beta t) - h(0, t) \quad (23)$$

При  $a = 0$  не затухающие колебания иллюстрирует рис. 13. Показаны максимальное и минимальное значения амплитуды. Амплитуда колебаний постоянная.

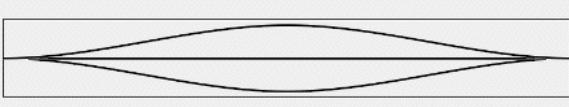


Рис. 13. Незатухающие колебания  
Fig. 13. Non damping oscillations

На рис. 14 показаны затухающие колебания. В отличие от рис. 13 амплитуда положительной кривой меньше, чем отрицательной. Процессы на рисунках 12, 13 и 14 получены подбором увеличенного шага дискретизации, таким образом удалось продемонстрировать суть процесса колебаний.

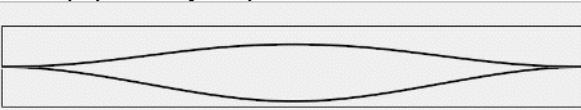


Рис. 14. Затухающие колебания  
Fig. 14. Damping oscillations

Рис. 15 демонстрирует четыре кадра модельных колебаний вала (каната). С целью улучшения визуализации максимальная амплитуда увеличена в 8 раз. Модельные исследования выполнены с помощью приложения «Программное средство поддержки разработки», созданное автором с целью поддержки разработки модели и демонстрации основных результатов.

Модельные исследования подтверждены экспериментальными исследованиями. На рис. 16 приведены четыре кадра из видеозаписи колебаний упругой достаточно толстой проволоки, для которой при изгибе невозможны изломы в точках выхода из заземлений. Колебания возбуждены оттягиванием и отпуском проволоки в точке на расстоянии  $L_b/4$

от заземления левого конца.

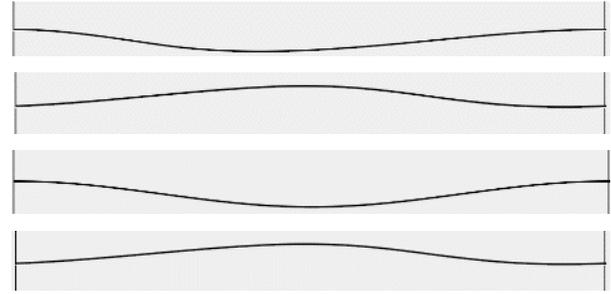


Рис. 15. Четыре кадра из модельного исследования колебаний вала (каната)  
Fig. 15. Four frames from the model study of shaft (rope) oscillations.

Предлагаемый метод, как и в классическом варианте, построен применительно к малым колебаниям. С целью улучшения визуализации размах колебаний вынужденно увеличен в 8 раз и превысил допустимые пределы, поэтому в количественном отношении имеют место относительно небольшие расхождения.

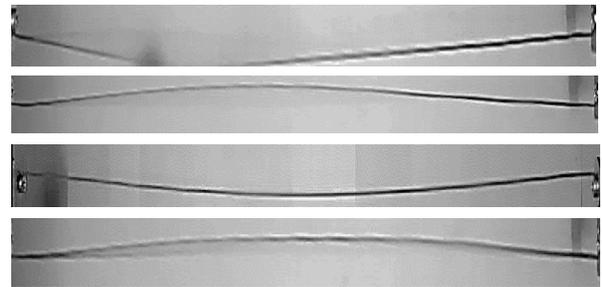


Рис. 16. Четыре кадра из видеозаписи колебаний жесткой проволоки  
Fig. 16. Four frames from video recording of hard wire oscillations

Таким образом, создана теория и математическая модель, которая может использоваться при исследовании и проектировании транспортных систем во многих производствах, в состав которых входят упругие валы и канаты.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанов А. Г. Динамика машин. – Екатеринбург: УрО РАН, 1999. – 304 с.
2. Католиков В. Е. Динамические режимы рудничного подъема / В. Е. Католиков, А. Д. Динкель. – М.: Недра, 1995. – 448 с.
3. Литвинов В. Л. Исследование продольных колебаний каната грузоподъемной установки Научный поиск. 2020. № 1 (35). с. 67-73.
4. Кондрахин В. П., Марий И. И. Математическая модель лифта с учетом инерционных и упругодемпфирующих характеристик канатов в сборнике: инновационные перспективы Донбасса. материалы 4-й международной научно-практической конференции. 2018. с. 155-159.
5. Wu J, Kou Z M, Liang M, and Wu G X. Theoretical model and experimental verification of the coupling

longitudinal-transverse vibration of rope for friction hoisting system 2015 Journal of China University of Mining & Technology. 44(5) 1006-1013.

6. Wu J, Kou Z M, Liang M, and Wu G X. Analysis and experiment of rope transverse vibration for multi-rope friction hoisting system 2015 J. Huazhong Univ. of Sci. & Tech. (Natural Science Edition) 43(6) 12-21.

7. Bao J H, Zhang P, and Zhu C M. Modeling and analysis of rope transverse vibration for flexible hoisting systems with time-varying length 2012 Journal of Shanghai Jiaotong University. 46(3) 341-345.

8. Wang W and Qian J. Finite difference method for simulating transverse forced-vibration of elevator suspended system 2014 Journal of Vibration Engineering. 27(3) 180-185.

9. Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики учеб. пособие для мех.-мат.ун-тов / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.

10. Икрин В. А. Сопротивление материалов с элементами теории упругости и пластичности: Учебник для студентов направления 653500” Стрительство”. – М: Изд. АСВ, 2004. – 424 с.

11. Кочетков В. Т. Сопротивление материалов: учебное пособие для вузов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 544 с.

12. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов / Учеб. для вузов. – 1-е изд., перераб. и доп. / – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. - 592 с.

13. Беляев Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1976. – 608 с.

14. ГОСТ 23.211-80 Обеспечение износостойкости изделий. Метод испытания материалов на изнашивание при фреттинге и фреттинг-коррозии / Межгосударственный стандарт, группа Т51. 1982. – с. 36-40.

15. Farris T. N., Grandt A. F., Matlik J. F. Characterization of Fretting Fatigue of Nickel based FIlloys 9th National Turbine Engine HCF Conference. New Orleans, LA, March 8-11, 2004. – с. 212.

16. Ландсберг Г. С. Том 1. Механика. Теплота. Молекулярная физика, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 612 с.

17. Привалов И. И. Аналитическая геометрия / И. И. Привалов, Наука, Физико-математическая литература, Москва, 1966. – 272 с.

18. Физические свойства воздуха: плотность, вязкость, удельная теплоемкость [Электронный ресурс] /<http://thermalinfo.ru/svoystva-gazov/gazovye-smesi/fizicheskie-svoystva-vozdruha-plotnost-vyazkost-temploemkost-entropiya>.

16. 19. Воробьев Н. Н. Теория рядов / Н. Н. Воробьев, 4 изд., перераб. и доп. Главная редакция физико-математической литературы. М., 1979. – 408 с.

**Maxim Y. Borschinsky**, senior lecturer

Siberian State Industrial University, 654007, Russian Federation, Novokuznetsk, 42 Kirova St.

## **ROPE AND SHAFT OSCILLATIONS AS A MODEL OF A COMPONENT OF A COMPLEX CONTROL OBJECT OF AN ELECTROMECHANICAL SYSTEM OF MINE HOIST**

**Abstract:** *The analysis of a complex control object of the electromechanical system of mine hoist control was carried out. A significant effect on the wear resistance, quality of control and power consumption of the system was established with insufficient knowledge of the transverse vibrations of the shaft and rope. The existence of transverse vibrations is experimentally confirmed on the example of Abakan mine. Known studies of transverse oscillations are based on the bend of the beam, but for a beam the tangent on the support is located at an angle greater than zero degrees, the tangential ends of the shaft and rope are equal to zero, due to which additional zero boundary conditions are added that cannot be realized on the basis of the beam flexural theory. A refined method called mirror symmetry, i.e. conversion of a concentrated load into equivalent bending moments, has been developed, and on its basis a dynamic model has been created using static bending as initial conditions. The theory is based on the Fourier method (separation of variables). The Fourier method does not ensure investigation of oscillations of systems with functions of initial conditions that are not broken down in the Fourier series by sines that do not contain a free term. The paper solves the problem allowing the application of functions that can be broken down into Fourier series with a free term. In the Fourier method, the possibility of introducing additional constituents providing modeling of fading oscillatory processes has been added. The problem of mathematical description by one equation of static bending and dynamic processes is solved, which is solved in the beam flexural theory by two independent systems. The model and partially experimental studies of the solved problems have been carried out.*

**Keywords:** *Mine hoist, electromechanical system, transverse vibrations, shaft, rope, Fourier method, mirror symmetry, model.*

#### REFERENCES

1. Stepanov A. G. Dinamika mashin [Dynamics of machines]. - Ekaterinburg: Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 1999.- 304 p.
2. Katholikov V. E. Dinamicheskie rezhimy rudnichnogo pod"ema [Dynamic modes of ore and night lifting] / V. E. Katholikov, A.D. Dinkel. - Moscow: Nedra, 1995. - – 448 p.
3. Litvinov V. L. Issledovanie prodol'nyh kolebanij kanata gruzopod"yomnoj ustanovki [Research of longitudinal vibrations of a rope of a hoisting plant] // Scientific search. 2020. № 1(35). pp. 67-73.
4. Kondrakhin V. P., Mariy I. I. Matematicheskaya model' lifta s uchetom inercionnyh i uprugodempfiruyushchih harakteristik kanatov [Mathematical model of an elevator taking into account inertial and elastic-damping characteristics of ropes] Innovative prospects of Donbass. materials of the 4th international scientific-practical conference. 2018. pp. 155-159.
5. Wu J, Kou Z M, Liang M, and Wu G X. Theoretical model and experimental verification of the coupling longitudinal-transverse vibration of rope for friction hoisting system 2015 Journal of China University of Mining & Technology. 44(5) 1006-1013.
6. Wu J, Kou Z M, Liang M, and Wu G X. Analysis and experiment of rope transverse vibration for multi-rope friction hoisting system 2015 J. Huazhong Univ. of Sci. J. Huazhong Univ. of Sci. & Tech. (Natural Science Edition) 43(6) 12-21.
7. Bao J. H, Zhang P, and Zhu C M. Modeling and analysis of rope transverse vibration for flexible hoist-ring systems with time-varying length 2012 Journal of Shanghai Jiaotong University. 46(3) 341-345.
8. Wang W and Qian J. Finite difference method for simulating transverse forced-vibration of elevator suspended system 2014 Journal of Vibration Engineering. 27(3) 180-185.
9. Koshlyakov N. S. Uravneniya v chastnyh proizvodnykh matematicheskoy fiziki [Equations in private pro-derivative mathematical physics] / N. S.

Koshlyakov, E. B. Gliner, M. M. Smirnov. - Moscow: Higher School, 1970. - – 712 p.

10. Ikrin V. A. Soprotivlenie materialov s elementami teorii uprugosti i plastichnosti [Resistance of Materials with Elements of the Theory of Elasticity and Plasticity]. – Moscow: Publishing House ASV, 2004. – 424 p.

11. Kochetkov V. T. Soprotivlenie materialov [Resistance of Materials]. – St. Petersburg: BHV Petersburg, 2004. – 544 p.

12. Feodos'ev V. I. Soprotivlenie materialov [Resistance of Materials]. – M.: Publishing house of MSTU named after N.E. Bauman, 2000. – 592 p.

13. Belyaev N. M. Soprotivlenie materialov [Material Resistance] / N. M. Belyaev, Main Editorial Office for Physical and Mathematical Literature of the «Science» Publishing House, 1976. – 608 p.

14. GOST 23.211-80 Obespechenie iznosostoykosti izdelij. Metod ispytaniya materialov na iznashivanie pri frettinge i fretting-korrozii [Ensuring wear-resistance of products. Method of testing materials for wear at fretting and fretting-corrosion] / Interstate Standard, group T51. 1982. – pp. 36-40.

15. Farris T. N., Grandt A. F., Matlik J. F. Characterization of Fretting Fatigue of Nickel based Alloys 9th National Turbine Engine HCF Conference. New Orleans, LA, March 8-11, 2004. – p. 212.

16. Landsberg G. S. Mekhanika. Teplota. Molekulyarnaya fizika [Mechanics. Warmth. Molecular Physics]. Volume 1. Moscow: PHYZMATLIT, 2010. – 612 p.

17. Privalov I. I. Analiticheskaya geometriya [Analytical Geometry] / I. I. Privalov, Nauka, Physico-Mathematical Literature, Moscow, 1966. - – 272 p.

18. Physical properties of air: density, viscosity, specific heat capacity [Electron resource] / <http://thermalinfo.ru/svoystva-gazov/gazovye-smesi/fizicheskie-svoystva-vozduha-plotnost-vyazkost-teploemkost-entropiya>.

19. Vorob'ev N. N. Teoriya ryadov [Theory of Rows] / N. N. Vorob'ev, 4 ed., pererabotka. et al. Main Editorial Office of Physical and Mathematical Literature. M., 1979. – 408 p.

#### Библиографическое описание статьи

Борщинский М.Ю. Поперечные колебания каната и вала как модель составной части сложного объекта управления электромеханической системы шахтного подъема // Горное оборудование и электромеханика – 2020. – № 6 (152). – С. 43-51.

#### Reference to article

Borschinsky M.Y. Rope and shaft oscillations as a model of a component of a complex control object of an electromechanical system of mine hoist. Mining Equipment and Electromechanics, 2020, no.6 (152), pp. 43-51.