МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.86

М.В. Косенкова, Е.А. Николаева, С.Л. Злобина

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ РЕГИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВИДЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИЗНАКОВ ОПТИМАЛЬНОСТИ ЕЕ РЕШЕНИЯ

В настоящее время в связи с присоединением России к Болонскому процессу и сопутствующим переходом к двухуровневой системе высшего образования, реформированием школьного образования, демографическим спадом в РФ возникают проблемы набора абитуриентов на различные направления подготовки и, в целом, выбора стратегических направлений развития системы образования с учетом социально-экономических факторов и региональных особенностей.

За прошедшее десятилетие было выявлено резкое, более чем на 40%, уменьшение числа выпускников школы и соответственное уменьшение приема во все учреждения профессионального образования [10]. В связи с этим возникает необходимость в определении спроса на учебные места и расчета количества учебных мест для каждого региона, что в значительной мере и определяет уровень образования – один из главных индикаторов уровня жизни. Всем этим проблемам посвящено много публикаций и докладов на различных конференциях, но, главным образом, обсуждение идет с экономической, социальной, общественной, политической и т.д. точек зрения. Однако в этих исследованиях существенную помощь могли бы оказать методы математического моделирования как способ научного познания, позволяющий охватить все аспекты проблемы с помощью формального математического аппарата.

В качестве примера подобных исследований можно привести получившие широкое распространение модели формирования учебных групп и прогнозирования числа учащихся, переходящих из одной образовательной категории в другую. Наиболее часто используются регрессионные и, особенности, авторегрессионные модели. Кроме того, применяются потоковые модели, а также модели линейного программирования и имитационные модели планирования учебной работы. Поскольку процесс обучения имеет годовой цикл, то широкое распространение получили различные варианты марковской модели. Существуют также работы, в которых рассматривается анализ сочетания классического и дистанционного обучения в школе при помощи систем массового обслуживания. Более полное представление об уровне исследований в рассматриваемой области можно найти в [5].

В Институте прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН с 1995 года ведутся работы над структурными моделями, показывающими, как будет меняться общая эффективность системы образования при изменении финансового положения при различной структурной политике. При этом выделяется три группы вузов: университеты, обеспечивающие инновационный потенциал; инженерные вузы, ориентированные на поддержание техносферы и социальной структуры; педагогические и медицинские вузы, а также другие институты, готовящие людей массовых профессий. В статье [1] на базе этих исследований обсуждается проблема экономического анализа роли высшей школы в создании инновационной среды в России.

Козловым А. Н. разработана комплексная модель оценки качества деятельности ВУЗа на основании нейросетевого подхода, компетентностного подхода и системы сбалансированных показателей (ССП). Построенная модель оценки качества образовательной деятельности легко адаптируется к специфическим требованиям ВУЗов за счет возможности изменения шаблона ССП, дерева компетенции, а также структуры нейронной сети [6].

Сотрудниками Центра бюджетного мониторинга Петрозаводского университета (ПетрГУ) разработаны алгоритмы и математические модели макроэкономической методики прогнозирования потребностей экономики в квалифицированных кадрах [12].

В частности, Семёновым А.А. построена математическая модель, позволяющая рассчитывать:

- распределение выпускников школ по приемам в образовательные учреждения профессионального образования (ОУ ПО) с учетом возможности повторного поступления отчисленных студентов;
- численность студентов ОУ ПО с учетом

их движения с курса на курс;

 выпуски студентов ОУ ПО с учетом различных сроков обучения.

Прогнозирование численности выпускников является актуальной задачей, поскольку выпускники учреждений профессионального образования формируют основное предложение на рынке труда.

В статье Добрыниной Н. Ф. на основе дифференциальных уравнений построена и исследована математическая модель распространения знаний и управления процессом обучения в студенческой среде с учетом уровня квалификации преподавателей [3].

Таким образом, математические методы и модели достаточно широко применяются в исследовании проблем образования, но остается много вопросов для дальнейшего изучения.

Целью данной работы является моделирование функционирования образовательной системы региона, где функционирование понимается через движение потоков учащихся и выпускников в институциональных структурах системы образования. В основу моделирования положена классификационная модель социальной системы, разработанная в кандидатской диссертации Злобиной С.Л. [4].

С целью моделирования системы образования,

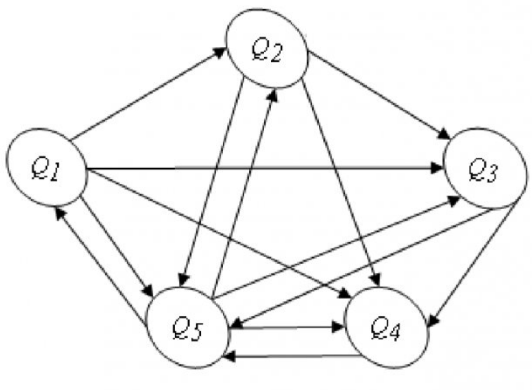

Рис. 1. Общая структура системы

аналогично статье [7], разобьем население на следующие классы: Q_1 – класс людей, получающих среднее общее образование (СОО), Q_2 – начальное профессиональное (НПО), Q_3 – среднее профессиональное (СПО), Q_4 – высшее профессиональное (ВПО), Q_5 – класс людей, не занятых в образовательном процессе

Представим образовательную систему в виде ориентированного графа $G=(S,F)$ (рис. 1), где S – множество его вершин, соответствующих классам группировки, а F – множество дуг, соответствующих возможным переходам между классами (возможность перехода из класса Q_i в класс Q_j определяется наличием дуги $(i,j) \in F$,

Предполагаем что структура образовательной системы неизменна на протяжении конечного периода времени $[0,T]$, разбитом дискретными точками $0,1, \ldots,T$ с шагом дискретизации один год.

Графу $G=(S,F)$ поставим в соответствие матрицу

$$A_G = \left\| a_{ij} \right\|_{5\times 5}, \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & (i,j) \in F, \\ 0, & (i,j) \notin F \end{cases}$$

и назовем её матрицей смежности.

Под динамикой образовательной системы будем понимать изменение численности людей в классах Q_i с течением времени [4, 8]. Численность в классе Q_i в момент t обозначим $x_i(t)$.

Будем считать, что на переход человека из класса в класс влияет распределение денежных средств по различным сферам, таким, как образование, здравоохранение и социальная поддержка, содействие занятости населения, поддержка малого бизнеса, и т.д.

Тогда численность людей, переходящих в момент времени t из класса Q_i в класс Q_j , можно описать зависимостью $f_{ij}(u(t))$, где $u(t) = (u_1(t),..,u_l(t))$ – вектор, координаты которого представляют собой инвестиции в соответствующую сферу финансирования. $f_{ij}(u(t))$ – непрерывно дифференцируемые функции по $u(t)$ для каждого $t=1\div T$. Зависимости $f_{ij}(u(t))$ определяются на основе статистических данных с помощью регрессионного анализа.

Тогда в момент времени t в терминах матрицы смежности A_G величина $x_i(t)$ определяется следующим образом:

$$x_i(t) = x_i(t-1) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{5} a_{ji} \cdot f_{ji}(u(t)) -$$

$$- \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{5} a_{ij} \cdot f_{ij}(u(t)) + \gamma_i \cdot y(t)$$

$$i=1\div 5, \; t=1\div T, \tag{1}$$

где $y(t) = B(t) - D(t)$, $B(t)$ – прирост населения (естественный и механический), а $D(t)$ – убыль населения (естественная и механическая) в году t, которые определяются путем прогнозирования с применением статистических данных региона,

$$\gamma_i = \begin{cases} 1, \text{если } i = 5, \\ 0, \text{если } i = 1\div 4. \end{cases}$$

Соотношение (1) будем называть уравнением динамики образовательной системы. В начальный момент $t = 0$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i=1\div 5, \tag{2}$$

где $(x_1^0,...,x_5^0)$ – известное состояние системы в момент $t=0$.

Предполагается, что

$$\alpha_i^t \le x_i(t) \le \beta_i^t, \quad i=1\div5,\ t=1\div T, \quad (3)$$

где α_i^t, β_i^t – фиксированные числа, выражающие ограничения на численность класса Q_i.

Очевидно, что из класса Q_i не должно выйти людей больше, чем в этом классе находится

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{5} f_{ij}(u(t)) \le x_i(t-1),\ i=1\div5,\ t=1\div T. \quad (4)$$

Очевидна и отрицательность количество людей, переходящих из Q_i в Q_j:

$$f_{ij}(u(t)) \ge 0, \quad i,j=1\div5,\ t=1\div T. \quad (5)$$

Будем считать, что экспертным путем определено соотношение мест, выделяемых ежегодно на учреждения начального профессионального, среднего профессионального и высшего образования. Этот факт можно записать в виде следующих соотношений:

$$f_{12}(u(t)) = \lambda_1 f_{13}(u(t)),$$
$$f_{12}(u(t)) = \lambda_2 f_{14}(u(t)),\ t=1\div T,\ \lambda_1,\lambda_2 \in R^1 \quad (6)$$

Общее количество выпускников учреждений начального профессионального, среднего профессионального и высшего образования должно быть равно количеству вакантных рабочих мест на момент времени t:

$$f_{25}(u(t)) + f_{35}(u(t)) + f_{45}(u(t)) = W(u(t)),\quad t=1\div T, \quad (7)$$

где $W(u(t))$ представляет собой зависимость количества вакантных рабочих мест от инвестиций в соответствующие сферы, которая при отсутствии финансирования будет принимать нулевое значение.

Кроме того, очевидно, можно предположить, что на момент времени t количество денежных средств, выделяемых на каждую из сфер финансирования, ограничено. Тогда:

$$0 \le u_k(t) \le \delta_k(t),\ k=1\div l, t=1\div T. \quad (8)$$

Любую последовательность $u(\cdot)=\{u(1),...,u(T)\}$, удовлетворяющую условиям (3) – (8), будем называть допустимым управлением системой (1) – (8).

Последовательность $x(\cdot)=\{x(0),x(1),...,x(T)\}$ решений системы (1) – (3), соответствующую допустимому управлению $u(\cdot)$, будем называть допустимой траекторией системы (1) – (8).

В качестве критерия эффективности развития рассматриваемой образовательной системы возьмем функционал, отражающий суммарную «полезность» для региона от функционирования системы образования:

$$J(x^0,u) = \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} w_{ij} f_{ij}(u(t)) \to max, \quad (9)$$

где вектор $u(t)$ составлен из управляющих параметров в момент t, а w_{ij} характеризует положительный эффект от перехода одного объекта из класса Q_i в класс Q_j.

Допустимое управление $u^*(\cdot)=\{u^*(1),...,u^*(T)\}$, доставляющее максимум критерию (9), будем называть оптимальным управлением, а допустимую траекторию $x^*(\cdot)=\{x^*(0),x^*(1),...,x^*(T)\}$, соответствующую оптимальному управлению $u^*(\cdot)$ – оптимальной траекторией системы (1) – (9) [2, 11].

Соотношения (1) – (9) представляют собой математическую модель социальной системы образования в виде дискретной задачи оптимального управления.

Для детального описания происходящих в системе изменений необходимо разбить некоторые из приведенных выше классов на группы, выделяя на каждой ступени обучения первый и последний (выпускной) годы обучения. В основе этого разбиения лежит статья 9 пункты 1,3,5 главы I Закона РФ «Об Образовании».

Класс Q_1 будет представлен пятью группами:

R_1 – учеников первого класса средней школы,

R_2 – учеников 2-8 классов,

R_3 – учеников 9 класса,

R_4 – учеников десятого класса,

R_5 – учеников 11 класса (выпускников).

Согласно пункту 13 типового положения о начальном профессиональном образовании в учреждения НПО принимаются выпускники 9 и 11 классов школ.

Также, согласно пункту 18 типового положения о начальном профессиональном образовании сроки обучения устанавливаются в соответствии с ФГОС для каждой специальности. А именно, 1 год для учащихся, поступивших на базе 11 классов, и 3 года для учащихся, поступивших на базе 9 классов.

Поэтому класс Q_2 разобьем на группы:

R_6 – учащихся в учреждениях начального профессионального образования на базе среднего (полного) образования (11 классов),

R_7 – учащихся первого курса в учреждениях начального профессионального образования на базе основного образования (9 классов),

R_8 – учащихся второго курса и

R_9 – учащихся третьего курса (выпускников).

Согласно пункту 14 типового положения о среднем профессиональном образовании в учреждения СПО принимаются выпускники 9 и 11 классов школ и выпускники учреждений НПО.

Также, согласно пункту 20 типового положения о среднем профессиональном образовании сроки обучения устанавливаются в соответствии с ФГОС для каждой специальности. А именно, 2 или 3 года для учащихся, поступивших на базе 11 классов и выпускников учреждений НПО, и 4 года для учащихся, поступивших на базе 9 классов.

Класс Q_3 разобьем на:

R_{10} – студенты первого курса учреждений среднего профессионального образования (по программе обучения 2 года) на базе среднего (полного) образования (11 классов),

R_{11} – студенты (выпускники) второго курса учреждений среднего профессионального образования (по программе обучения 2 года) на базе среднего (полного) образования (11 классов),

R_{12} – студенты первого курса учреждений среднего профессионального образования (по программе обучения 3 года) на базе среднего (полного) образования (11 классов),

R_{13} – студенты второго курса учреждений среднего профессионального образования (по программе обучения 3 года) на базе среднего (полного) образования (11 классов),

R_{14} – студенты третьего курса (выпускники) учреждений среднего профессионального образования (по программе обучения 3 года) на базе среднего (полного) образования (11 классов),

R_{15} – студенты первого курса учреждений среднего профессионального образования на базе основного образования (9 классов),

R_{16} – студенты 2-3 курса учреждений среднего профессионального образования на базе основного образования (9 классов),

R_{17} – студенты четвертого курса (выпускники) учреждений среднего профессионального образования на базе основного образования (9 классов).

Согласно пункту 27 типового положения о высшем профессиональном образовании в учреждения ВПО принимаются выпускники 11 классов школ и выпускники учреждений НПО и СПО.

Также, согласно пункту 37 типового положения о высшем профессиональном образовании сроки обучения устанавливаются в соответствии с ФГОС. А именно, 4 года для студентов – бакалавров, 5 лет – специалитет, 2 года – магистратура, 3 года – аспирантура. Учащиеся, получившие степень бакалавра или диплом специалиста, могут поступить в магистратуру. Студенты, окончившие специалитет или магистратуру, поступают в аспирантуру.

Тогда класс Q_4 будет подразделяться на следующие группы:

R_{18} – студентов первого курса в учреждениях высшего профессионального образования (специалитет),

R_{19} – студентов 2-4 курсов,

R_{20} – студентов 5 года обучения (выпускников),

R_{21} – студентов первого курса в учреждениях высшего профессионального образования (бакалавриат),

R_{22} – студентов 2-3 курсов,

R_{23} – студентов 4 года обучения (выпускников),

R_{24} – студентов магистратуры первого года обучения в учреждениях высшего профессионального образования,

R_{25} – студентов магистратуры второго года обучения (выпускников) в учреждениях высшего профессионального образования,

R_{26} – аспирантов первого года обучения,

R_{27} – аспирантов второго года обучения,

R_{28} – аспирантов третьего года обучения (выпускающиеся).

Для приведения обозначений к единой форме переобозначим класс Q_5 людей, не занятых в образовательном процессе, через R_{29} .

Согласно пункту 3 статьи 5 I главы Закона РФ «Об образовании» от 10.07.1992 №3266-1 «Государство гарантирует гражданам общедоступность и бесплатность дошкольного, начального общего, основного общего, среднего (полного) общего образования и начального профессионального образования, а также на конкурсной основе бесплатность среднего профессионального, высшего профессионального и послевузовского профессионального образования в государственных и муниципальных образовательных учреждениях (…), если образование данного уровня гражданин получает впервые, в порядке, предусмотренном настоящим Законом».

Поэтому в предлагаемой модели будем считать, что граждане могут получать только одно образования каждого уровня [9].

Структура полученной детализированной образовательной системы представлена на рис. 2.

Помимо типа образовательного учреждения при разбиении населения на группы будем дополнительно учитывать еще один признак – тип укрупненных групп специальностей и направлений подготовки.

На основании Общероссийского классификатора специальностей по образованию ОК 009-2003, утвержденного Постановлением Госстандарта России от 30.09.2003 № 276-ст, выделим 28 значений этого признака и введем еще одно значение, равное 29, которым будут обладать люди, учащиеся в образовательных учреждениях СОО, а также не участвующие в процессе обучения и не получившие профессионального образования.

Пусть количество классов $m = 29$, количество специальностей e=29.

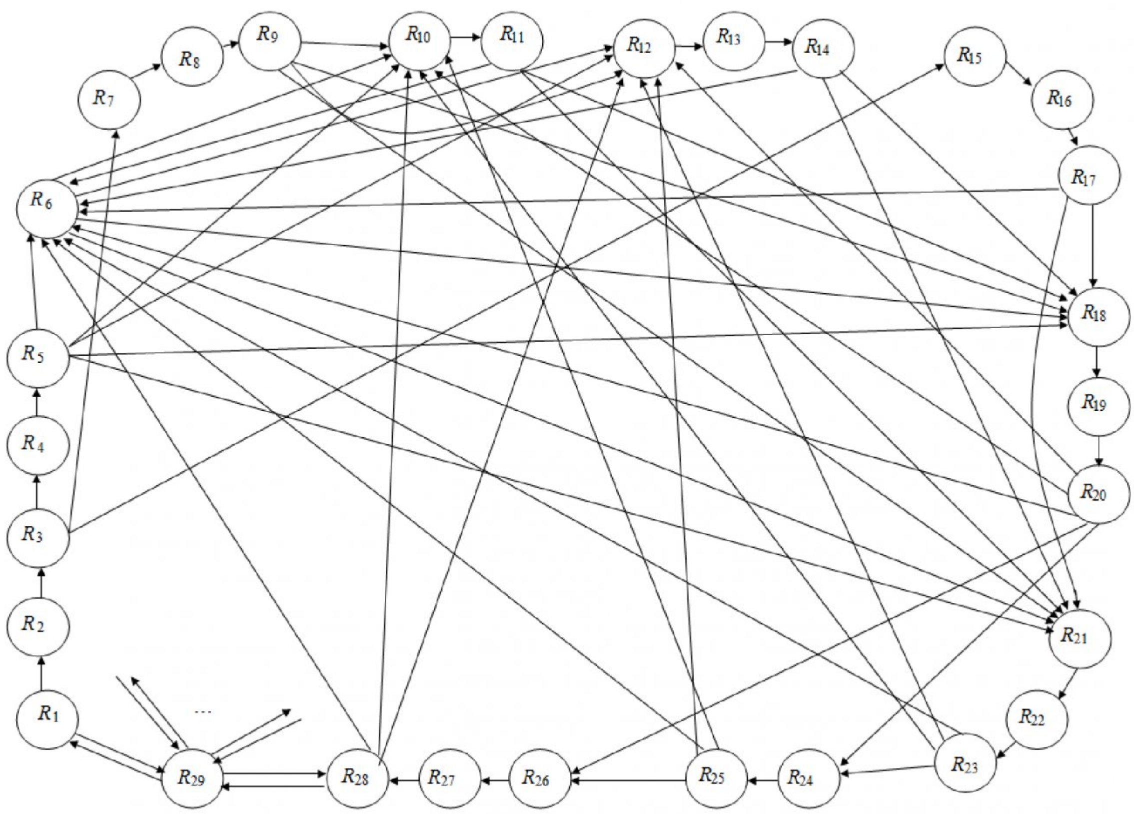

Рис. 2. Детализированная структура системы образования

Введем элементы:

$$a_{ij}^{sr}, \quad i,j=1 \div m, \ s,r=1 \div e .$$

равные 1, если возможен переход из класса i в класс j со специальности s на r и 0 в противном случае. Т.е. общее количество классов равно $e{\cdot}m$.

Обозначим $x_i^s(t)$ – численность объектов в классе R_{i} на специальности s в момент времени t, а $f_{ij}^{sr}(u(t))$ – численность объектов класса R_{i} специальности s, переходящих в момент времени t в класс R_{j} специальности r.

Будем предполагать, что функции $f_{ij}^{sr}(u(t))$, $i,j=1 \div m$, $s,r=1 \div e$, линейны по $u(t)$, то есть:

$$f_{ij}^{sr}(u(t)) = \sum_{k=1}^{l} \eta_{ijk}^{sr} u_k(t) . \tag{10}$$

Тогда перепишем систему (2) – (9) с учетом новых обозначений и требований к ней. Уравнение движения примет вид:

$$x_i^s(t) = x_i^s(t-1) + \sum_{r=1}^{e} \sum_{j=1}^{m} a_{ji}^{rs} \sum_{k=1}^{l} \eta_{jik}^{rs} u_k(t) - \sum_{r=1}^{e} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{sr} \sum_{k=1}^{l} \eta_{ijk}^{sr} u_k(t) + \gamma_i^s y(t) \tag{11}$$

где $\gamma_i^s = \begin{cases} 1, & i = 29, \\ 0, & i = 1 \div 28, \end{cases}$,

$$i = 1 \div, m, \ s = 1 \div e, \ t = 1 \div T ,$$

В начальный момент $t = 0$ задано состояние системы:

$$x_i^s(0) = x_i^{s0}, \ i = 1 \div, m, \ s = 1 \div e, \tag{12}$$

где x_i^{s0} – количество объектов в классе R_{i} специальности s на момент времени $t = 0$.

Предполагается, что

$$\alpha_i^s(t) \le x_i^s(t) \le \beta_i^s(t),$$
$$t = 1 \div T, \ i = 1 \div, m, \ s = 1 \div e, \tag{13}$$

где $\alpha_i^s(t)$, $\beta_i^s(t)$ – фиксированные числа, выражающие ограничения на численность класса R_{i} по специальности s.

Из класса R_i специальности s. не должно выйти объектов больше, чем в этом классе находится:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{m} \sum_{r=1}^{e} \sum_{k=1}^{l} \eta_{ijk}^{sr} u_k(t) \le x_i^s(t-1),$$
$$t = 1 \div T, \ i = 1 \div, m, \ s = 1 \div e, \tag{14}$$

Так как численность объектов, переходящих из класса R_i специальности s в класс R_j специальности r, не может быть отрицательной, то

$$\sum_{k=1}^{l} \eta_{ijk}^{sr} u_k(t) \ge 0,$$
$$i, j = 1 \div m, \ s, r = 1 \div e, \ t = 1 \div T. \tag{15}$$

Кроме того, зададим соотношение между количеством поступающих в учреждения начального профессионального, среднего профессионального и высшего образования.

Количество поступающих в начальное профессиональное и среднее профессиональное учреждения по каждой специальности r в год t свяжем коэффициентом пропорциональности $\lambda_1^r(t), r = 1 \div e, t = 1 \div T$:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{e}\left(a_{i6}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{i6k}^{sr}u_k(t) + a_{i7}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{i7k}^{sr}u_k(t)\right) =$$

$$= \lambda_2^r(t)\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{e}\left(\begin{array}{l} a_{i18}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{i18k}^{sr}u_k(t) + a_{i21}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{i21k}^{sr}u_k(t) + \\ + a_{i24}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{i24k}^{sr}u_k(t) + a_{i26}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{i26k}^{sr}u_k(t)\end{array}\right)$$

$$r = 1 \div e, \quad t = 1 \div T, \quad \lambda_2^r(t) \in R^1 \tag{16}$$

Аналогично построим соотношение для количества поступающих в начальные профессиональные и высшие образовательные учреждения:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{e}\left(a_{i6}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{i6k}^{sr}\cdot u_k(t) + a_{i7}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{i7k}^{sr}\cdot u_k(t)\right) =$$

$$= \lambda_2^r(t)\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{e}\left(\begin{array}{l} a_{i18}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{i18k}^{sr}u_k(t) + a_{i21}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{i21k}^{sr}u_k(t) + \\ + a_{i24}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{i24k}^{sr}u_k(t) + a_{i26}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{i26k}^{sr}u_k(t)\end{array}\right)$$

$$r = 1 \div e, t = 1 \div T, \lambda_2^r(t) \in R^1 \tag{17}$$

Ограниченность денежных средств, выделяемых на каждую из сфер финансирования в момент времени t, можно описать следующей системой неравенств:

$$0 \le u_k(t) \le \delta_k(t),\ k = 1 \div l, t = 1 \div T \tag{18}$$

Эффективность распределения выделяемых средств будем оценивать на основе набора критериев, отражающих различные аспекты функционирования региональной образовательной системы.

Число вакантных мест для выпускников НПО, СПО и ВПО по специальности r в год t обозначим соответственно $W_1^r(u(t))$, $W_2^r(u(t))$, $W_3^r(u(t))$.

Будем предполагать, что эти функции линейны. Количество вакантных мест определяется на основе уравнения регрессии, где в качестве независимой переменной выступают инвестиции в различные сферы финансирования. При отсутствии инвестиций данные функции будут принимать нулевое значение.

Одним из условий эффективности работы образовательного учреждения является доля выпускников, трудоустроенных по специальности. Для этого минимизируем квадрат разности между количеством выпускников образовательных учреждений по каждой специальности и количеством вакантных мест для всех уровней образования.

Для выпускников НПО получим условие:

$$J_1(x^0, u) = \sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{e}\left(\sum_{k=1}^{l}\begin{bmatrix}\eta_{6\,29k}^{ss}u_k(t) + \\ + \eta_{9\,29k}^{ss}u_k(t)\end{bmatrix} - W_1^s(u(t))\right)^2 \to \min. \tag{19}$$

Для выпускников СПО:

$$J_2(x^0, u) = \sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{e}\left(\sum_{k=1}^{l}\begin{bmatrix}\eta_{11\,29k}^{ss}u_k(t) + \\ + \eta_{14\,29k}^{ss}u_k(t) + \\ + \eta_{17\,29k}^{ss}u_k(t)\end{bmatrix} - W_2^s(u(t))\right)^2 \to \min. \tag{20}$$

Для выпускников ВПО:

$$J_3(x^0, u) = \sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{e}\left(\sum_{k=1}^{l}\begin{bmatrix}\eta_{20\,29k}^{ss}u_k(t) + \\ + \eta_{23\,29k}^{ss}u_k(t) + \\ + \eta_{25\,29k}^{ss}u_k(t) + \\ + \eta_{28\,29k}^{ss}u_k(t)\end{bmatrix} - W_3^s(u(t))\right)^2 \to \min. \tag{21}$$

Еще одним показателем функционирования образовательной системы является максимизация числа выпускников. Для среднего, начального профессионального, специального профессионального, высшего профессионального образовательных учреждений критерии качества примут вид соответственно как:

$$J_4(x^0, u) = \sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{e}\sum_{k=1}^{l}\begin{pmatrix}\eta_{6\,29k}^{ss}u_k(t) + \\ + \eta_{9\,29k}^{ss}u_k(t)\end{pmatrix} \to \max \tag{22}$$

$$J_5(x^0, u) = \sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{e}\sum_{k=1}^{l}\begin{pmatrix}\eta_{11\,29k}^{ss}u_k(t) + \\ + \eta_{14\,29k}^{ss}u_k(t) + \\ + \eta_{17\,29k}^{ss}u_k(t)\end{pmatrix} \to \max \tag{23}$$

$$J_6(x^0, u) = \sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{e}\sum_{k=1}^{l}\begin{pmatrix}\eta_{20\,29k}^{ss}u_k(t) + \\ + \eta_{23\,29k}^{ss}u_k(t) + \\ + \eta_{25\,29k}^{ss}u_k(t) + \\ + \eta_{28\,29k}^{ss}u_k(t)\end{pmatrix} \to \max \tag{24}$$

Следующий критерий отражает условие экономии денежных средств, инвестируемых в различные сферы финансирования:

$$J_7(x^0,u)=\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{l}u_k(t)\to\min. \quad (25)$$

В итоге получаем многокритериальную дискретную задачу оптимального управления с уравнением движения (11), заданными начальными условиями (12), ограничениями на управления (14) – (18) и на фазовые координаты (13), критериями качества (19) – (25).

Последовательность $u(\cdot)=\{u(1),...,u(T)\}$, удовлетворяющую условиям (14)-(18), будем называть допустимым управлением системой (11) – (18).

Последовательность $x(\cdot)=\{x(0),x(1),...,x(T)\}$ решений системы (11) – (13), соответствующую допустимому управлению $u(\cdot)$, будем называть допустимой траекторией системы (11) – (18).

Общим методом решения многокритериальных задач является поиск решений, оптимальных по Парето, позволяющий найти множество «неулучшаемых» альтернатив. При этом улучшение значения одних критериев, как правило, ухудшает значения других, вследствие чего окончательно выбранное решение обычно является компромиссным. Компромисс разрешается введением тех или иных дополнительных условий или субъективных предположений, что приводит к разным методам решения многокритериальных задач.

Часто многокритериальную задачу сводят к однокритериальной применением «свёртки» критериев в один комплексный - целевую функцию (функцию полезности). В ряде случаев успешно применяются ранжирование и последовательное применение критериев оптимальности, метод анализа иерархий, метод главного критерия.

В данной работе применим метод свертки критериев, что позволит в зависимости от выбранных весовых коэффициентов учитывать и задавать степень значимости сформулированных в задаче критериев. Варьируя из значения, можно проигрывать различные сценарии развития функционирования образовательной системы. Функция свертки в задаче (11) – (25) запишется как:

$$\begin{aligned}&J(x^0,u)=\lambda_1 J_1(x^0,u)+\lambda_2 J_2(x^0,u)+\\&+\lambda_3 J_3(x^0,u)-\lambda_4 J_4(x^0,u)-\lambda_5 J_5(x^0,u)-\\&-\lambda_6 J_6(x^0,u)+\lambda_7 J_7(x^0,u)\to\min,\end{aligned} \quad (26)$$

где $0\le\lambda_i\le 1,\ i=1\div 7,\ \sum_{i=1}^{7}\lambda_i=1.$

Под оптимальным решением задачи (11) – (25) будем понимать допустимое управление $u^*(\cdot)=\{u^*(1),...,u^*(T)\}$ и допустимую траекторию $x^*(\cdot)=\{x^*(0),x^*(1),...,x^*(T)\}$, минимизирующие свертку критериев (26).

Если весовые коэффициенты функции (26) удовлетворяют условиям $0<\lambda_i<1$ при всех i, то решение оптимально по Парето.

Рассмотрим вопрос существования оптимального решения в задаче (11) – (18), (26). Обозначим множество допустимых значений управляющих параметров в момент через U_t, $t=1\div T$.

Теорема 1. Пусть в задаче (11) – (18), (26) выполняются следующие условия:

$$\alpha_i^s(t)\le x_i^{s0}+\gamma_i^s\sum_{\tau=1}^{t}y(\tau)\le\beta_i^s(t),$$

$$t=1\div T,\ i=1\div m, s=1\div e.$$

Тогда в задаче (11) – (18), (26) существует оптимальное решение.

Доказательство. Покажем, что множества U_t – непустые, ограниченные и замкнутые для каждого t. Возьмем решение $u_k(t)=0,\ k=1\div l$ и покажем, что оно является допустимым управлением в момент t.

Выполнение (15)-(18) и (14) очевидно.

Покажем, что справедливость фазовых ограничений (13). Для этого перепишем (11) в виде:

$$x_i^s(t)=x_i^{s0}+\sum_{\tau=1}^{t}\sum_{r=1}^{e}\sum_{j=1}^{m}\begin{pmatrix}a_{ji}^{rs}\sum_{k=1}^{l}\eta_{jik}^{rs}u_k(\tau)-\\-a_{ij}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{ijk}^{sr}u_k(\tau)\end{pmatrix}+$$

$$+\gamma_i^s\sum_{\tau=1}^{t}y(\tau),$$

$$t=1\div T,\ i=1\div m, s=1\div e.$$

При $u_k(t)=0$ это равенство запишется как

$$x_i^s(t)=x_i^{s0}+\gamma_i^s\sum_{\tau=1}^{t}y(\tau).$$

Тогда при условиях

$$\alpha_i^s(t)\le x_i^{s0}+\gamma_i^s\sum_{\tau=1}^{t}y(\tau)\le\beta_i^s(t),$$

$$t=1\div T,\ i=1\div m, s=1\div e$$

ограничения (13) будут выполняться, что равносильно условию теоремы.

Следовательно, $u_k(t)=0,\ k=1\div l$ является допустимым управлением в момент времени t и U_t – непустые множества.

Множества U_t задаются системой нестрогих линейных неравенств, т.е. являются замкнутыми. Докажем ограниченность этих множеств.

Приведем систему ограничений (13) – (18) к векторно-матричной форме:

$$Au(t)\le\beta(t)-x(t-1)-\gamma y(t),$$

$$-Au(t)\le-\alpha(t)+x(t-1)+\gamma y(t),$$

$$Hu(t)\le x(t-1),$$

$$\Theta u(t)\ge 0,\ \Lambda_1 u(t)=0,\ \Lambda_2 u(t)=0,$$

$$Iu(t) \le \Delta^t,\ u(t) \ge 0,$$

где $u(t) = (u_1(t),\ldots, u_l(t))^T$,

$$x(t-1) = (x^1(t-1),\ldots, x^e(t-1))^T,$$

$$x^s(t-1) = (x_1^s(t-1),\ldots, x_m^s(t-1))^T,$$

$$\gamma = (\gamma^1,\ldots,\gamma^e)^T,\ \gamma^s = (\gamma_1^s,\ldots,\gamma_m^s)^T,$$

$$\Delta^t = (\delta_1(t),\ldots, \delta_l(t)),$$

$$\alpha(t) = (\alpha^1(t),\ldots, \alpha^e(t))^T,$$

$$\alpha^s(t) = (\alpha_1^s(t),\ldots, \alpha_m^s(t))^T,$$

$$\beta(t) = (\beta^1(t),\ldots, \beta^e(t))^T,$$

$$\beta^s(t) = (\beta_1^s(t),\ldots, \beta_m^s(t))^T,$$

$$A = (A^1, A^2,\ldots, A^e)^T,\ A^S = \left\| a'^s_{ik} \right\|_{m\times l},$$

$$a'^s_{ik} = \sum_{r=0}^{e}\sum_{j=1}^{m}(a_{ji}^{rs}\cdot\eta_{jik}^{rs} - a_{ij}^{sr}\cdot\eta_{ijk}^{sr}),$$

$$H = (H^1, H^2,\ldots, H^e)^T,$$

$$H^s = \left\|\eta'^s_{ik}\right\|_{m\times l},\ \eta'^s_{ik} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{e}\eta_{ijk}^{sr},$$

$$\sum_{k=1}^{l}\eta_{ijk}^{sr}u_k(t) \ge 0,\ i,j = 1\div m,\ s,$$

$$r = 1\div e,\ t = 1\div T,$$

$$\Theta = (\Theta^1, \Theta^2,\ldots, \Theta^l)^T,$$

$$\Theta^s = (\Theta^{s1}, \Theta^{s2},\ldots, \Theta^{sl})^T,$$

$$\Theta^{sr} = (\Theta_1^{sr}, \Theta_2^{sr},\ldots, \Theta_m^{sr})^T,$$

$$\Theta_i^{sr} = (\Theta_{i1}^{sr}, \Theta_{i2}^{sr},\ldots, \Theta_{im}^{sr})^T,$$

$$\Theta_{ij}^{sr} = \left\|q_{ijk}^{sr}\right\|_{1\times l},$$

$$q_{ijk}^{sr} = \eta_{ijk}\ (= 0 \text{ при } s = r, i = j),$$

$$s, r = 1\div e,\ i, j = 1\div m,\ k = 1\div l,$$

$$\Lambda_1 = (\Lambda_1^1, \Lambda_1^2,\ldots, \Lambda_1^e)^T,\ \Lambda_1^s = \left\|\lambda'^s_{ik}\right\|_{m\times l},$$

$$\lambda'^s_{ik} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{e}\begin{pmatrix} a_{i6}^{sr}\eta_{i6k}^{sr} + a_{i7}^{sr}\eta_{i7k}^{sr} - \lambda_1^r(t)\times \\ \times\left(a_{i10}^{sr}\eta_{i10k}^{sr} + a_{i12}^{sr}\eta_{i12k}^{sr} + a_{i15}^{sr}\eta_{i15k}^{sr}\right)\end{pmatrix}$$

$$\Lambda_2 = (\Lambda_2^1, \Lambda_2^2,\ldots, \Lambda_2^e)^T,\ \Lambda_2^s = \left\|\lambda''^s_{ik}\right\|_{m\times l},$$

$$\lambda''^s_{ik} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{e}\left(a_{i6}^{sr}\eta_{i6k}^{sr} + a_{i7}^{sr}\eta_{i7k}^{sr} - \right.$$

$$\left. - \lambda_2^r(t)\cdot\begin{pmatrix} a_{i18}^{sr}\eta_{i18k}^{sr} + a_{i21}^{sr}\eta_{i21k}^{sr} + \\ + a_{i24}^{sr}\eta_{i24k}^{sr} + a_{i26}^{sr}\eta_{i26k}^{sr}\end{pmatrix}\right)$$

Составим двойственную систему неравенств к полученной системе ограничений:

$$A^T p(t) - A^T r(t) + H^T h(t) + \Theta^T z(t) +$$
$$+ \Lambda_1^T f(t) + \Lambda_2^T g(t) + I^T d(t) \ge 0, \quad (27)$$

$$p(t), r(t), h(t), z(t), d(t) \ge 0 \quad (28)$$

где $p(t) = (p_1(t),\ldots, p_{e\cdot m}(t))$,

$r(t) = (r_1(t),\ldots, r_{e\cdot m}(t))$,

$h(t) = (h_1(t),\ldots, h_{e\cdot m}(t))$,

$z(t) = (z_1(t),\ldots, z_{e^2\cdot m^2}(t))$,

$f(t) = (f_1(t),\ldots, f_{e\cdot m}(t))$,

$g(t) = (g_1(t),\ldots, g_{e\cdot m}(t))$,

$d(t) = (d_1(t),\ldots, d_l(t))$ – двойственные переменные.

Непустое множество U_t ограничено в том и только в том случае, если двойственная система неравенств совместна. Таким образом, для ограниченности множества, заданного системой (13)-(18), необходимо и достаточно существование векторов $p(t), r(t), h(t), f(t), g(t) \in R^{e\cdot m}$, $z(t) \in R^{e^2\cdot m^2}$, $d(t) \in R^l$, удовлетворяющих системе неравенств-ограничений (27)-(28) в векторно-матричной форме.

Векторы, удовлетворяющие условиям

$$p(t) = r(t), h(t) = 0, z(t) = 0,$$

$$f(t) = 0, g(t) = 0, d(t) > 0$$

являются решением двойственной задачи. Действительно:

$$A^T p(t) - A^T r(t) + H^T h(t) + \Theta^T z(t) +$$
$$+ \Lambda_1^T f(t) + \Lambda_2^T g(t) + I^T d(t) =$$
$$= A^T(p(t) - r(t)) + I^T d(t) = I^T d(t) > 0$$

т.е. система ограничений в векторно-матричной форме совместна и множества U_t ограничены.

Итак, мы доказали, что управление $u \equiv 0$ и соответствующая ему траектория будут допустимыми в задаче (11) – (18), (26) с фазовыми ограничениями.

Поскольку одно допустимое управление существует, функции в правых частях уравнений (11) и функционал качества (26) непрерывны, множество U_t допустимых значений управляющих параметров непусто, замкнуто и ограничено, то задача оптимального управления (11) – (18), (26) разрешима. Теорема доказана.

Для решения задачи (11) – (18), (26) можно использовать принцип максимума Понтрягина, который в случае линейных по фазовым координатам систем (как в рассматриваемой задаче) справедлив как необходимое и достаточное условие оптимальности [11].

Запишем соотношения дискретного принципа максимума для задачи (11) – (18), (26). Функция Понтрягина в времени t :

$$H(x(t-1),u(t),\psi(t)) =$$

$$=\psi_0\cdot\left(\lambda_1\cdot\left(\sum_{s=1}^{e}\left(\sum_{k=1}^{l}\left[\eta_{6\,29k}^{ss}u_k(t)+\eta_{9\,29k}^{ss}u_k(t)\right] - W_1^s(t)\right)^2\right)+\right.$$

$$+\lambda_2\cdot\left(\sum_{s=1}^{e}\left(\sum_{k=1}^{l}\left[\eta_{11\,29k}^{ss}u_k(t)+\eta_{14\,29k}^{ss}u_k(t)+\eta_{17\,29k}^{ss}u_k(t)\right] - W_2^s(t)\right)^2\right)+$$

$$+\lambda_3\cdot\left(\sum_{s=1}^{e}\left(\sum_{k=1}^{l}\left[\eta_{20\,29k}^{ss}u_k(t)+\eta_{2314\,29k}^{ss}u_k(t)+\eta_{25\,29k}^{ss}u_k(t)+\eta_{28\,29k}^{ss}u_k(t)\right] - W_3^s(t)\right)^2\right)+$$

$$+\lambda_4\cdot\sum_{s=1}^{e}\sum_{k=1}^{l}\left(\eta_{6\,29k}^{ss}u_k(t)+\eta_{9\,29k}^{ss}u_k(t)\right)+$$

$$+\lambda_5\cdot\sum_{s=1}^{e}\sum_{k=1}^{l}\left(\eta_{11\,29k}^{ss}u_k(t)+\eta_{14\,29k}^{ss}u_k(t)+\eta_{17\,29k}^{ss}u_k(t)\right)+$$

$$+\lambda_6\cdot\sum_{s=1}^{e}\sum_{k=1}^{l}\left(\eta_{20\,29k}^{ss}u_k(t)+\eta_{23\,29k}^{ss}u_k(t)+\eta_{25\,29k}^{ss}u_k(t)+\eta_{28\,29k}^{ss}u_k(t)\right)+$$

$$\left.+\lambda_7\cdot\left(\sum_{k=1}^{l}u_k(t)\right)\right)+$$

$$+\sum_{s=1}^{e}\sum_{i=1}^{m}\psi_i^s(t)\left(x_i^s(t-1)+\sum_{r=1}^{e}\sum_{j=1}^{m}a_{ji}^{rs}\sum_{k=1}^{l}\eta_{jik}^{rs}u_k(t)-\sum_{r=1}^{e}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{ijk}^{sr}u_k(t)+\gamma_i^s y(t)\right), \quad (29)$$

где $(\psi_1^1(t),..,\psi_m^1(t),..,\psi_1^e(t),...,\psi_m^e(t))$ – решение сопряженной системы:

$$\psi_i^s(t)=\psi_i^s(t+1),\ \ t=1\div T-1,\ \ \psi_i^s(T)=0,$$
$$\psi_0 - \text{const},\ \ i=1\div m,\ s=1\div e. \quad (30)$$

Из (30) следует:

$$\psi_i^s(t)=0,\ \ t=1\div T,\ i=1\div m,\ s=1\div e. \quad (31)$$

Полагая $\psi_0 = -1$ и учитывая (31) , условие максимума можно записать в виде задачи линейного программирования:

$$H(x(t-1),u(t),\psi(t)) =$$

$$-\lambda_1\left(\sum_{s=1}^{e}\left(\sum_{k=1}^{l}\left(\eta_{6\,29k}^{ss}u_k(t)+\eta_{9\,29k}^{ss}u_k(t)\right)-W_1^s(t)\right)^2\right)$$

$$+\lambda_2\left(\sum_{s=1}^{e}\left(\sum_{k=1}^{l}\left(\eta_{11\,29k}^{ss}u_k(t)+\eta_{14\,29k}^{ss}u_k(t)+\eta_{17\,29k}^{ss}u_k(t)\right)-W_2^s(t)\right)^2\right)+$$

$$+\lambda_3\left(\sum_{s=1}^{e}\left(\sum_{k=1}^{l}\left(\eta_{20\,29k}^{ss}u_k(t)+\eta_{23\,29k}^{ss}u_k(t)+\eta_{25\,29k}^{ss}u_k(t)+\eta_{28\,29k}^{ss}u_k(t)\right)-W_3^s(t)\right)^2\right)+$$

$$+\lambda_4\cdot\sum_{s=1}^{e}\sum_{k=1}^{l}\left(\eta_{6\,29k}^{ss}u_k(t)+\eta_{9\,29k}^{ss}u_k(t)\right)+$$

$$+\lambda_5\sum_{s=1}^{e}\sum_{k=1}^{l}\left(\eta_{11\,29k}^{ss}u_k(t)+\eta_{14\,29k}^{ss}u_k(t)+\eta_{17\,29k}^{ss}u_k(t)\right)+$$

$$+\lambda_6\cdot\sum_{s=1}^{e}\sum_{k=1}^{l}\left[\eta_{20\,29k}^{ss}u_k(t)+\eta_{23\,29k}^{ss}u_k(t)+\eta_{25\,29k}^{ss}u_k(t)+\eta_{28\,29k}^{ss}u_k(t)\right]+$$

$$+\lambda_7\cdot\left(\sum_{k=1}^{l}u_k(t)\right)\Bigg)\to\max \quad (32)$$

при ограничениях:

$$\sum_{r=1}^{e}\sum_{j=1}^{m}\left(a_{ji}^{rs}\sum_{k=1}^{l}\eta_{jik}^{rs}u_k(t)-a_{ij}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{ijk}^{sr}u_k(t)\right)\le$$
$$\le\beta_i^s(t)-x_i^s(t-1)-\gamma_i^s y(t),$$
$$i=1\div m,\ s=1\div e \quad (33)$$

$$\sum_{r=1}^{e}\sum_{j=1}^{m}\left(a_{ji}^{rs}\sum_{k=1}^{l}\eta_{jik}^{rs}u_k(t)-a_{ij}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{ijk}^{sr}u_k(t)\right)\ge$$
$$\ge\alpha_i^s(t)-x_i^s(t-1)-\gamma_i^s y(t),$$
$$i=1\div m,\ s=1\div e \quad (34)$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{m}\sum_{r=1}^{e}\sum_{k=1}^{l}\eta_{ijk}^{sr}u_k(\mathrm{t})\le x_i^s(t-1),$$
$$i=1,...,m,\ s=1,...,e, \quad (35)$$

$$\sum_{k=1}^{l}\eta_{ijk}^{sr}u_k(t)\ge 0,\ i,j=1\div m;\ s,r=1\div e, \quad (36)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{e}\left(a_{i6}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{i6k}^{sr}u_k(t)+a_{i7}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{i7k}^{sr}u_k(t)\right)=$$

$$=\lambda_1^r(t)\cdot\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{e}\left(a_{i\,10}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{i\,10\,k}^{sr}\cdot u_k(t)+a_{i12}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{i\,12\,k}^{sr}\cdot u_k(t)+a_{i15}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{i\,15\,k}^{sr}\cdot u_k(t)\right),$$

$$r=1\div e,\ \lambda_1^r(t)\in R^1, \quad (37)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{e}\left(a_{i6}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{i6k}^{sr}u_k(t)+a_{i7}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{i7k}^{sr}u_k(t)\right)=$$

$$=\lambda_2^r(t)\cdot\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{e}\begin{pmatrix} a_{i18}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{i18k}^{sr}\cdot u_k(t)+ \\ +a_{i21}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{i21k}^{sr}\cdot u_k(t)+ \\ +a_{i24}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{i24k}^{sr}\cdot u_k(t)+ \\ +a_{i26}^{sr}\sum_{k=1}^{l}\eta_{i26k}^{sr}\cdot u_k(t) \end{pmatrix} \quad (38)$$

$$r=1\div e, \lambda_2^r(t)\in R^1$$

$$0\le u_k(t)\le\delta_k(t),\ k=1\div l, t=1\div T, \quad (39)$$

где (33), (34) получены из ограничений (13).

Решая задачу (32)-(39) в каждый момент t, можно построить оптимальное управление системой (11)-(18), (26).

Таким образом, при помощи построенной дискретной модели оптимального управления можно определить рациональное распределение средств в различные сферы финансирования с целью оптимизации функционирования образовательной системы.

Решение этой задачи позволяет учесть потребность общества в квалифицированных работниках при планировании контрольных цифр набора в образовательные учреждения, и, в целом, определить стратегические направления развития системы образования с учетом социально-экономических факторов и региональных особенностей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№12-01-31516, мол_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахромеева, Т. С.* Новые направления системного анализа и компьютерного моделирования образовательной стратегии и политики России [Электронный ресурс] / Т. С. Ахромеева, М. А. Капустин, С. А. Кащенко и др. – М. – 2001. – http://www.keldysh.ru/papers/2001/prep89/prep2001_89.html.

2. *Данилов, Н. Н.* Основы математической теории оптимальных процессов [Текст] / Н. Н. Данилов, В. В. Мешечкин. – Кемерово: Кузбассвузиздат, 2004. – 219 с.

3. *Добрынина, Н.Ф.* Математические модели распространения знаний и управление процессом обучения студентов / Н.Ф. Добрынина // Научно-теоретический журнал «Фундаментальные исследования». – 2009. – №7.

4. *Злобина, С. Л.* Исследование математических моделей равновесного и стабильного развития социальных систем [Текст] : дис. … канд. физ.-мат. наук : 05.13.18 : защищена 16.10.03 / Злобина Светлана Леонидовна. – Кемерово, 2003. – 185 с.: 61 04-1/436.

5. Исследование операций: В 2-х томах. Пер. с англ. [Текст] / Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – М.: Мир, 1981. – Т. 2. – 677 с.

6. *Козлов, А.Н.* Разработка методов и моделей оценки качества образовательной деятельности в высшем учебном заведении: диссертация... кандидата экономических наук: 08.00.13 / А.Н. Козлов; [Место защиты: Моск. гос. ун-т экономики, статистики и информатики]. – 172 с.: 61 09-8/1355. 25.02.2009

7. *Косенкова, М.В.* Исследование системы образования региона при помощи математического моделирования в контексте устойчивого развития [Текст] / М.В. Косенкова, Е.С. Чернова // Вестник КемГУ. – 2011. – Вып. 3 (47). – С. 69-76.

8. *Косенкова, М. В.* Математическая модель системы образования в горном деле в виде дискретной задачи оптимального управления / М. В. Косенкова // Интеграция науки, профессионального образования и производства: Отдельный выпуск Горного информационно-аналитического бюллетеня (научно-технического журнала) Mining Informational and analytical Bulletin (scientific and technical journal). - М.: Горная книга. - 2012. - № ОВ4. - С. 12-17.

9. *Косенкова, М.В.* Построение математической модели функционирования образовательной системы в регионе с учетом условий устойчивого развития / М.В. Косенкова // Устойчивое развитие: вопросы экономики, права, экологии, социологии, образования, управления проектам: сб. научных статей по итогам Всероссийской заочной научно-практической конференции, 24-25 янв. 2013 года, г. Санкт-Петербург. – СПб : КультИнформПресс, 2013. – С. 89-92.

10. Пресса о проблемах образования (обзор подготовлен пресс-центром министерства) [Электронный ресурс]. – 2004. – URL: http://ed.informika.ru/min/press/2004/01/pressa/925,print/.

11. *Пропой, А. И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов [Текст] / А. И. Пропой. – М.: Наука, 1973. – 256 с.

12. Рынок труда и образовательных услуг. Регионы России [электронный ресурс]. – URL: http://labourmarket.ru/Pages/metodika/03.php .

Авторы статьи:

Косенкова Мария Викторовна, ст.преп. каф.математической кибернетики КемГУ, Email: kosenkovam@mail.ru

Николаева Евгения Александровна, канд.физ.-мат.наук, доцент, зав.каф.математики КузГТУ, Email: nikolaevaea@yandex.ru

Злобина Светлана Леонидовна, канд.физ.-мат.наук, заместитель директора ООО «ККА» Email: zlobina@academy-invest.ru