ГЕОМЕХАНИКА

УДК 622.272: 516.02

С.В. Черданцев

ПРОЧНОСТЬ ОБРАЗЦОВ ГОРНОЙ ПОРОДЫ ПРИ УДАРНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

Задачи контактного взаимодействия твердых деформируемых тел часто встречаются в машиностроении, строительстве, судостроении, авиационной и космической технике [1, 2].

Такие задачи встречаются и в горном деле. К ним относятся, например, взаимодействие горных пород массива с крепью горных выработок и с буровыми инструментами, взаимодействие блоков горных пород в результате горных ударов и внезапных выбросах угля и газа [3, 4].

В данной статье обсуждается задача о контактном взаимодействии кусков горной породы, сталкивающихся при разлете в результате взрывных работ. Эта задача, на наш взгляд, представляет интерес при изучении механизма дробления горной породы при ее перемещении.

Для решения поставленной задачи рассмотрим центральный удар двух кусков породы, когда их массы m_1 и m_2 движутся вдоль оси, соединяющей их центры со скоростями v_1 и v_2 ($v_1 > v_2$). Для упрощения дальнейших рассуждений будем считать куски шарами, радиусы которых соответственно R_1 и R_2 (рис. 1).

Как только куски придут в соприкосновение в точке O, начнут действовать сжимающие силы P, определить которые мы можем из дифференциальных уравнений

$$m_1\dot{v}_1 = -P,\ m_2\dot{v}_2 = P, \qquad (1)$$

в которых точками обозначены производные по времени.

Будем отсчитывать координаты центра тяжести тел соответственно x_1 и x_2 от состояния, соответствующего моменту начала контакта, и совместим начало отсчета времени с этим моментом. В таком случае скорость сближение $\dot{\delta}$ центров кусков в процессе соударения определяется выражением

$$\dot{\delta} = v_1 - v_2. \qquad (2)$$

Продифференцировав по времени выражение (2) и учитывая формулы (1), получим ускорение сближения центров тяжести кусков

$$\ddot{\delta} = -Pm_0, \qquad (3)$$

где

$$m_0 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2}.$$

Для сферических кусков горной породы продолжительность соударения существенно выше периода низшей формы колебаний этих кусков. Поэтому можно пренебречь колебаниями и считать, что величину δ можно определить из решения статической задачи Герца [1, 2]

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2 K^2 (R_1 + R_2) P^2}{4R_1R_2}}, \qquad (4)$$

где

$$K = \frac{1-\mu}{\pi \cdot E},$$

μ, E – соответственно коэффициент Пуассона и модуль упругости породы.

Из формулы (4) находим величину P

$$P = \sqrt{\frac{4R_1R_2}{9\pi^2 K^2 (R_1 + R_2)}} \cdot \delta^{3/2}, \qquad (5)$$

в силу чего равенство (3) преобразуется к виду

$$\ddot{\delta} = -n \cdot m_0 \delta^{3/2}, \qquad (6)$$

где

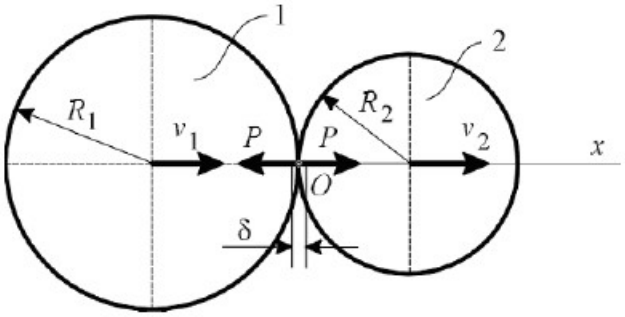

Рис. 1. Расчетная схема задачи

$$n = \sqrt{\frac{4R_1R_2}{9\pi^2K^2(R_1+R_2)}}.$$

Умножая обе части уравнения (6) на $\dot{\delta}$, получаем дифференциальное уравнение

$$\ddot{\delta}\cdot\dot{\delta} = -n\cdot m_0\delta^{3/2}\cdot\dot{\delta},$$

представив которое в удобной для интегрирования форме

$$\frac{1}{2}d(\dot{\delta}^2) = -n\cdot m_0\delta^{3/2}\cdot d\delta,$$

мы получаем его решение

$$\dot{\delta}^2 - v_0^2 = -\frac{4}{5}n\cdot m\delta^{5/2}, \qquad (7)$$

в котором $v_0 = v_{10} - v_{20}$ является скоростью сближения кусков в начале удара.

Полагая, что в конце удара скорость $\dot{\delta} = 0$, найдем из равенства (7) максимальную величину сближения

$$\delta_{max} = \left(\frac{5}{4}\cdot\frac{v_0^2}{n\cdot m_0}\right)^{2/5}, \qquad (8)$$

зная которую, из формулы (5) получим максимальное сжимающее усилие P_{max}, возникающее между кусками породы при столкновении

$$P_{max} = n\cdot\delta_{max}^{3/2} = n^{3/5}\cdot\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{v_0^2}{m_0}\right)^{2/5}. \qquad (9)$$

Для определения продолжительности соударения разделим в уравнении (7) переменные

$$dt = \frac{d\delta}{\sqrt{v_0^2 - \frac{4}{5}n\cdot m_0\delta^{5/2}}},$$

и введя новую переменную $\xi = \delta/\delta_{max}$

$$dt = \frac{\delta_{max}d\xi}{\sqrt{v_0^2 - \frac{4}{5}nm_0\delta^{5/2}\xi^{5/2}}} = \frac{\delta_{max}}{v_0}\cdot\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{5/2}}},$$

а затем, интегрируя данное уравнение, получим формулу продолжительности τ соударения кусков породы

$$\tau = 2\frac{\delta_{max}}{v_0}\int_0^1\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{5/2}}} = 2\frac{\delta_{max}}{v_0}\cdot 1{,}472 = \qquad (10)$$

$$= 2{,}944\left(\frac{5}{4n\cdot m_0}\right)^{2/5}\cdot v_0^{-1/5}$$

из которой видно, что величина τ обратно пропорциональна $v_0^{-1/5}$.

По величине P_{max} мы можем определить радиус поверхности контакта

$$a = \sqrt{\frac{3\pi\cdot P_{max}KR_1R_2}{2(R_1+R_2)}}, \qquad (11)$$

величину

$$q_0 = \frac{3P_{max}}{2\pi a^2}, \qquad (12)$$

а затем и главные напряжения на поверхности контакта

$$\sigma_r = -\sigma_\theta = \frac{1-2\mu}{3}q_0. \qquad (13)$$

Отметим, что сжимающие напряжения σ_θ действуют в окружном направлении, а растягивающие напряжения σ_r направлены вдоль радиуса.

Чтобы выяснить возможность разрушения кусков породы при соударении, воспользуемся теорией прочности Мора, которая описывает разрушение, как в результате сдвига, так и отрыва [3, 4]. Условие разрушения в теории прочности Мора имеет вид

$$\sigma_r - \lambda\sigma_\theta = \sigma_c, \qquad (14)$$

где

$$\lambda = \frac{\sigma_c}{\sigma_p},$$

σ_c и σ_p – пределы прочности кусков горной породы соответственно на одноосное сжатие и растяжение.

В силу формул, (12) и (13), условие (14) приводится к виду

$$\sigma_c = \frac{(1-2\mu)(1+\lambda)}{2\pi}\cdot\frac{P_{max}}{a^2}, \qquad (15)$$

а с помощью (9) и (11), формулу (15) представим следующим образом

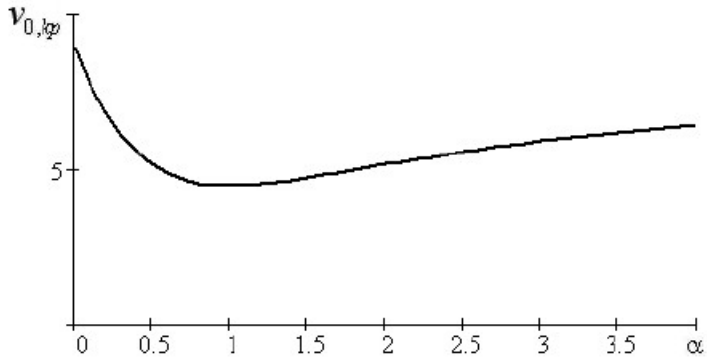

Рис. 2. Зависимость критической скорости кусков горной породы от величины α

$$\sigma_c = \frac{(1-2\mu)(1+\lambda)}{2\pi} \cdot \frac{\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{v_0^2}{m_0}\right)^{1/5}}{\left(\frac{2}{3}\pi\cdot K\right)^2 n^{6/5}}. \qquad (16)$$

Отсюда можно определить критическое значение скорости $v_0 = v_{0,kp}$, при которой каждый из кусков (или, по крайней мере, один из них) разрушится как минимум на две части.

Решая уравнение (16) относительно $v_{0,kp}$, получим

$$v_{0,kp} = 97{,}3\left[\frac{1-\mu^2}{1-2\mu}(1+\lambda)\frac{\sigma_c}{E}\right]^2 \times \sqrt{\frac{(1+\mu)(1+\lambda)\sigma_c}{(1-\mu)E}\left[1-\frac{3\alpha}{(1+\alpha)^2}\right]}\cdot v_p \qquad (17)$$

где

$$v_p = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}} \qquad (18)$$

является скоростью распространения продольных волн в массиве рассматриваемой породы, а ρ – ее плотностью; $\alpha = R_2/R_1$.

Зависимость $v_{0,kp}$, построенная по формуле (17) для угля, параметры которого взяты из [5]: ρ = 1,98 т/м^3; σ_c = 18,2 МПа; $E = 1{,}8\cdot10^4$ МПа; μ = 0,15; λ = 10 показывает, что минимальное значение критической скорости будет при α = 1, т.е. когда размеры кусков породы одинаковы (рис. 2). С увеличением или уменьшением α критическая скорость $v_{0,kp}$ растет. Поэтому далее будем рассматривать соударение одинаковых кусков, полагая в формуле (17) величину α = 1.

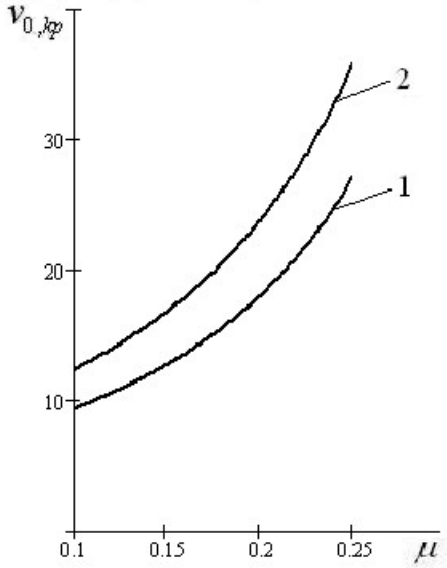

Рис. 3. Зависимость критической скорости от коэффициента Пуассона

Величина λ для различных пород, как уста-

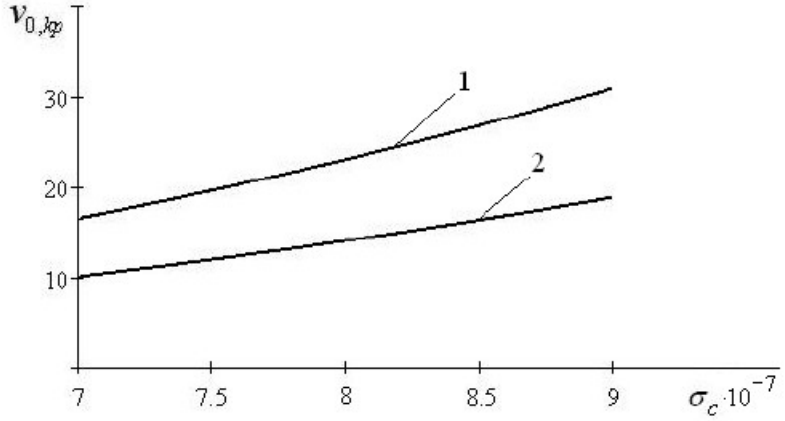

Рис. 4. Зависимость критической скорости от предела прочности пород

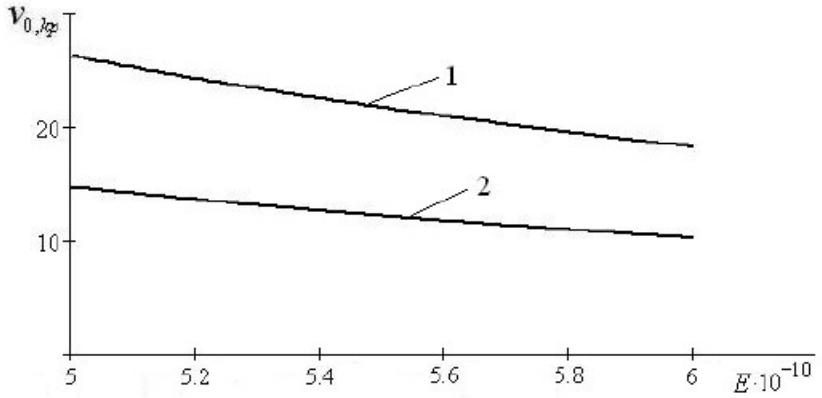

Рис. 5. Зависимость критической скорости от модуля Юнга

Таблица. Механические и акустические характеристики горных пород

Название породы	ρ, $т/м^3$	σ_c, МПа	$E \cdot 10^{-10}$, Па	μ	v_p, м/с	$\frac{D \cdot v_p}{Z} \cdot 10^3$	$v_{0,kp}$, м/с
Уголь	1,98	18,2	1,8	0,15	3098,24	4,27	4,459
Алевролит	2,54	42,5	4	0,24	4308,32	11,70	12,983
Мрамор	2,65	75	5,8	0,21	4963,61	22,49	19,584
Песчаник	2,66	78	5,3	0,11	4525,68	18,83	13,15
Гранит	2,78	150	5,05	0,22	4554,04	401,60	154,362
Базальт	2,86	170	7,8	0,25	5720,78	204,14	112,395

новлено в [4], имеет примерно постоянное значение, равное $\lambda = 10$, что и учтено нами в данной работе.

Формула (17) показывает, что критическая скорость $v_{0,kp}$ зависит от коэффициента Пуассона μ, модуля Юнга E, предела прочности пород на одноосное сжатие σ_c и в меньшей степени от плотности ρ.

Графики зависимостей $v_{0,kp}(\mu)$, $v_{0,kp}(E)$, $v_{0,kp}(\sigma_c)$ представлены на рис. 3 – 5, на которых кривая 1 соответствует мрамору, а кривая 2 – песчанику.

Представленные зависимости показывают, что с увеличением коэффициента Пуассона и предела прочности пород их критическая скорость возрастает, причем первая из этих зависимостей нелинейная (рис. 3), а вторая – почти линейная (рис. 4). Напротив, увеличение модуля Юнга приводит к снижению критической скорости (рис 5).

Поскольку $\lambda = 10$, то выражение

$$C = 97{,}3(1+\lambda)^{5/2}\sqrt{1-\frac{3\alpha}{(1+\alpha)^2}},$$

входящее в формулу (17), будет постоянным и равным $C = 19{,}52 \cdot 10^3$ и поэтому формула (17) допускает дальнейшие преобразования. С этой целью умножим числитель и знаменатель выражения стоящего в квадратных скобках на величину $\rho(1-2\mu)/(1+\mu)$, а числитель и знаменатель под знаком радикала умножим на $\rho(1-2\mu)$, и, учитывая (18), имеем

$$\frac{v_{0,kp}}{v_p} = C\left[\frac{(1-\mu)^2}{(1-2\mu)^2}\frac{\sigma_c}{\rho}\right]^2\sqrt{\frac{\sigma_c}{\rho}\frac{1}{1-2\mu}}\cdot\frac{1}{v_p^5} =$$

$$= C\left(\frac{1-\mu}{1-2\mu}\right)^4\sqrt{\frac{1}{1-2\mu}}\cdot\left(\frac{\sigma_c}{\rho v_p^2}\right)^{5/2}$$

откуда получим формулу

$$v_{0,kp} = C\left(\frac{1-\mu}{1-2\mu}\right)^4\sqrt{\frac{1}{1-2\mu}}\cdot\left(\frac{D}{Z}\right)^{5/2}\cdot v_p \qquad (19)$$

в которой величина $Z = \rho \cdot v_p$ является акустической жесткостью [5], а величину $D = \sigma_c/v_p$ назовем акустической прочностью, поскольку она содержит предел прочности породы на одноосное сжатие.

По формуле (19) вычислены и представлены в таблице значения критической скорости $v_{0,kp}$ для горных пород, механические характеристики которых взяты из [5].

Анализируя данные таблицы, заключаем, что критическая скорость $v_{0,kp}$ выше для сталкивающихся кусков той горной породы, у которой больше величина $D \cdot v_p/Z$, являющаяся совокупностью акустических параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович, И. И.* Механика контактных взаимодействий. / И. И. Ворович, В. М. Александров. – М.: Физматлит, 2001. – 672 с.

2. *Подгорный, А. Н.* Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций / А. Н. Подгорный, П. П. Гонтаровский, Б. Н. Киркач. – Киев : Наук. думка, 1989. – 232 с.

3. *Борисов, А. А.* Механика горных пород и массивов. М. : Недра, 1980. – 360 с.

4. *Баклашов, И. В.* Механика подземных сооружений и конструкции крепей / И. В. Баклашов, Б. А. Картозия. – М. : Недра, 1992. – 543 с.

5. *Ржевский, В. В.* Основы физики горных пород. / В. В. Ржевский, Г. Я. Новик. – М. : Недра, 1978. – 390 с.

Автор статьи:

Черданцев Сергей Васильевич, докт. техн. наук, проф. каф. математики КузГТУ.

E–mail: svch01@yandex.ru