УДК 536.24

Ю.В. Видин, Д.И. Иванов, П.А. Ясницкий

РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ В ЗАДАЧЕ НАГРЕВА ТЕПЛОПРОВОДНОГО ТЕЛА С ТЕПЛОИЗОЛЯЦИОННЫМ ПОКРЫТИЕМ

Известно, что для тепловой защиты металлических стенок от нагрева широко применяются огнеупорные покрытия [1]. При расчете нестационарного температурного поля в такой комбинированной системе приходится для нахождения собственных чисел задачи использовать характеристическое уравнение вида:

$$tg\mu = \frac{Bi \cdot K - \mu^2}{\mu\left(Bi + K\right)}, \qquad (1)$$

где Bi – безразмерное число подобия (число Био), K – безразмерное число, характеризующее отношение аккумуляционной способности изоляции к аккумуляционной способности соприкасающегося с ней металлического слоя

В работе [1] приведены таблицы первых шести корней уравнения (1) для десяти значений параметра K и ограниченного числа величин Bi, имеющих сравнительно большой шаг.

Следует отметить, что при решении задач нестационарной теплопроводности многослойных систем приходится использовать сложные характеристические уравнения [2], что обусловлено большим числом параметров, свойственных таким физическим процессам.

Из (1) следует, что параметры Bi и K равнозначны, т.е., например, паре чисел Bi=1, K=10 и паре Bi=10, K=1 будут соответствовать одни и те же собственные числа μ_n. Из выражения (1) также вытекает, что искомые корни μ_n должны располагаться в интервалах:

$$0 \le \mu_n \le \frac{\pi}{2},\ n = 1,$$

$$\left(\frac{2n-3}{2}\right)\pi \le \mu_n \le \left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi,\ n = 2,3,\ldots$$

Причем, последнее выражение можно представить также в несколько ином виде:

$$\frac{2 \cdot n - 3}{2} \cdot \pi \le \mu_n \le (n-1) \cdot \pi,\ n = 2,3,...$$

если $BiK \le (\text{n-1}) \cdot \pi^2$

и

$$\left(n-1\right)\pi \le \mu_n \le \left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi,\ n = 2,3,\ldots$$

если $BiK \ge \left(n-1\right)^2 \pi^2$

т.е. интервалы искомых корней μ_n существенно сокращаются.

Таблицы, приведенные в [1], как отмечалось ранее, имеют существенно ограниченные возможности. Поэтому целесообразно разработать универсальный аналитический подход для расчета корней уравнения (1) и ему подобных. В [2], [3] предложены достаточно эффективные приемы исследования таких зависимостей.

Наибольший интерес, как правило, представляет значение первого собственного числа решаемой тепловой задачи. С этой точки зрения удобнее (1) представить в форме:

$$ctg\mu = \frac{\mu\left(Bi + K\right)}{Bi - \mu^2}. \qquad (2)$$

Тогда, учитывая, что $0 \le \mu_1 \le \frac{\pi}{2}$, вполне приемлемо левую часть соотношения (2) записать в виде ограниченного степенного ряда [4]:

$$ctg\mu = \frac{1}{\mu} - \frac{\mu}{3}. \qquad (3)$$

Отброшенные члены этого ряда в случае $\mu_1 \le \frac{\pi}{2}$ для инженерных расчетов пренебрежимо малы.

Тогда (2) преобразуется в алгебраическое уравнение:

$$\mu^4 - 3\left(1 + Bi + K + \frac{BiK}{3}\right)\mu^2 + 3BiK = 0. \qquad (4)$$

Отсюда

$$\mu_1^2 = \frac{3}{2}\left(1 + Bi + K + \frac{Bi \cdot K}{3}\right) - \sqrt{\frac{9}{4}\left(1 + Bi + K + \frac{Bi \cdot K}{3}\right)^2 - 3Bi \cdot K} \qquad (5)$$

Рассмотрим частный случай Bi=K=1. Тогда

$$\mu_1^2 = \frac{3}{2}\left(1+1+1+\frac{1 \cdot 1}{3}\right) - \sqrt{5^2 - 3 \cdot 1 \cdot 1} = \quad 0.3096;$$

$$\mu_1 = \sqrt{0.3046} = 0,5564$$

Табличное значение [1] $\mu_1 = 0,5560$.

При Bi=1, K=10 (или Bi=10, K=1)

$$\mu_1 = \sqrt{0,6617} = 0,8134.$$

Табличное значение $\mu_1 = 0,80951$

Для Bi=K=10

$$\mu_1 = \sqrt{1,86176} = 1,36446.$$

Табличное значение $\mu_1 = 1.31023$.

Из этих расчетов следует, что полученное аналитическим путем μ_1 для не слишком больших величин Bi и K обладает высокой точностью (погрешность - доли процента).

Если же комплексы Bi и K одновременно оказываются весьма значительными, то вычисленный корень μ_1, будет несколько выше действительного. В таких случаях целесообразно использовать вместо (3) более расширенный степенной ряд, а именно (4)

$$ctg\mu = \frac{1}{\mu} - \frac{\mu}{3} - \frac{\mu^3}{45} = \frac{1}{\mu} - \frac{P}{3}\mu, \qquad (6)$$

где

$$P = 1 + (\frac{\mu_1^2}{15}). \qquad (7)$$

Если принять P постоянным и равным

$$P = 1 + (\frac{\mu_1^2}{15}). \qquad (8)$$

то вместо алгебраического биквадратного уравнения (4) получим его новую модификацию:

$$\mu^4 - \frac{3}{P}\left(1 + Bi + K + \frac{P \cdot Bi \cdot K}{3}\right)\mu^2 + \frac{3}{P}Bi \cdot K = 0 \qquad (9)$$

искомое решение которого запишется:

$$\mu_1^2 = \frac{3}{2P}\left(1 + Bi + K + \frac{P \cdot Bi \cdot K}{3}\right) - \sqrt{\frac{9}{4P^2}\left(1 + Bi + K + \frac{P \cdot Bi \cdot K}{3}\right)^2 - \frac{3}{P}Bi \cdot K} \qquad (10)$$

На основе (10) определим μ_1 для рассмотренного выше случая Bi=K=10. Причем параметр P будет равен:

$$P = 1 + \frac{1,36446^2}{15} = 1,12412.$$

Подставляя указанные значения в (10) находим:

$$\mu_1 = \sqrt{1,7295} = 1,3151.$$

Таким образом, второе приближение дает значение μ_1, которое весьма мало отличается от табличного.

Решение (10) можно привести к существенно более простому виду. Для этого, используя разложение в ряд второго слагаемого в выражении (10) и ограничиваясь двумя его членами, нетрудно получить зависимость:

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{3 \cdot Bi \cdot K}{3 \cdot (1 + Bi + K) + P \cdot Bi \cdot K}}. \qquad (11)$$

Формула (11) является существенно более универсальной, чем выведенная Гровером и Холтером в работе [5], так как она охватывает практически весь возможный диапазон корня μ_1. Тогда как рекомендованная вышеназванными авторами применима только в тех случаях, когда первый корень μ_1 намного меньше единицы.

Однако нужно помнить, что при использовании (11) необходимо корректировать коэффициент P согласно выражению (8).

Теперь проведем исследование уравнения (1) для случая, когда номер корня n>1.

Первоначально примем, что число Bi=0 (или K=0), тогда формула (1) упрощается к виду:

$$tg\mu = -\frac{\mu}{K}. \qquad (12)$$

Первый корень этой зависимости при любых величинах K равен 0 (μ_1=0). Последующие корни (n >1) как следует из ранее сказанного, должны удовлетворять условию:

$$\frac{2n-3}{2}\pi \le \mu_n \le (n-1)\pi.$$

Необходимые числа μ_n (n>1) легко находятся на основе итерационной процедуры. Например, принимая в качестве исходного значения

$$\mu_{n1} = \left(\frac{2n-3}{2}\right) \cdot \pi \text{ или } \mu_{n1} = (n-1) \cdot \pi.$$

Определяем второе приближение μ_{n2} из условия:

$$tg\mu_{n2} = -\frac{\mu_n}{K}. \qquad (13)$$

Далее по величине μ_{n2} аналогичным путем вычисляем μ_{n3}:

$$tg\mu_{n3} = -\frac{\mu_{n2}}{K}. \qquad (14)$$

Как правило, имеет место быстросходимость , т.е. обычно μ_{n3} очень близко приближается к истинному значению μ_n. При этом искомый корень μ_n располагается в интервале между двумя ранее рассчитанными.

Аналогичным методом удается вычислить все собственные числа μ_n характеристического уравнения (1) и в общем случае.

В качестве примера рассмотрим задачу определения второго корня уравнения (1) при условии, что Bi=K=1. За исходную величину примем, в частности $\mu_{2,1} = \frac{\pi}{2}$. Тогда из зависимости

$$tg\mu_{2,2} = \frac{Bi \cdot K - \mu_{2,1}^2}{\mu_{2,1}(Bi + K)} = \frac{1 - \mu_{2,1}^2}{2\mu_{2,1}} = -0,4671$$

получим согласно [6] $\mu_{2,2} = 2,7046$.

Действуя по аналогичной схеме, находим последовательно

$\mu_{2,3} = 2,2791$; $\mu_{2,4} = 2,3978$ *и* $\mu_{2,5} = 2,3610$.

Табличное значение μ_2, соответствующее принятым данным, равно μ_2=2,3695.

Из приведенных результатов видно, что сходимость последовательных приближений "снизу" и "сверху" сравнительно высокая. Она может быть усилена, если на третьем шаге брать средние арифметические значения из двух предыдущих.

Выводы

Произведен расчет собственных чисел в задаче нагрева теплопроводного тела с теплоизоляционным покрытием. Полученные аналитические зависимости обладают высокой точностью расчета, но значительно проще классических методов расчета.

Полученная методика совместно с разработанными ранее методами расчета собственных чисел [7-9] позволяет решать широкий спектр задач, связанных с нестационарным теплообменом плоских и цилиндрических тел малой кривизны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Михайлов М.Д.* Нестационарные температурные поля в оболочках. – М.: Энергия, 1967. – 120 с.
2. *Видин Ю.В.* Инженерные методы теплопроводности. – Издательство КГТУ, 1992. – 96 с.
3. *Видин Ю.В.* К расчету собственных чисел задачи теплопроводности двухслойной пластины. Теплофизика высоких температур. 1985 г. Т.23. №1. С. 200 – 201.
4. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов – М.: Наука, 1965. – 608 с.
5. *Grover Y.H. , Holter W.H.* . Solution of ten Transient Heat.Coldultion Equation for an Insulated, Infinite Metal Slab yet propulsion, 1957, vol 27, №12.
6. *Сегал Б.И. , Семендяев К.А.* Пятизначные математические таблицы. – М.: Физматгиз, 1962. – 464 с.
7. *Видин Ю.В., Иванов Д.И.* Расчет собственных чисел в задаче нестационарной теплопередачи через цилиндрическую стенку при граничных условиях первого рода. – Вестник КузГТУ, 2012, №5. С. 85-86.
8. *Видин Ю.В., Иванов Д.И.* Расчет собственных чисел в задаче нестационарной теплопередачи через цилиндрическую стенку при граничных условиях 2-го рода. – Вестник ВолГАСУ, 2012, №4. С. 98-101.
9. *Видин Ю.В., Иванов Д.И.* Расчет собственных чисел в задаче нестационарной теплопередачи через цилиндрическую стенку при смешанных граничных условиях. – Вестник СибГАУ, 2013, №1. С. 15-18.

Авторы статьи:

Видин
Юрий Владимирович,
канд. техн. наук, профессор каф.теплотехники и гидрогазодинамики теплоэнергетического факультета Сибирского федерального университета (г. Красноярск).
E-mail: idi86@inbox.ru.

Иванов
Дмитрий Иванович,
аспирант каф. теплотехники и гидрогазодинамики теплоэнергетического факультета Сибирского федерального университета
(г. Красноярск).
E-mail: idi86@inbox.ru.

Ясницкий
Петр Анатольевич,
студент факультета энергетики Сибирского федерального университета
(г. Красноярск).
E-mail: idi86@inbox.ru.

УДК 519. 21

А.В. Бирюков

ДРОБЛЕНИЕ ГЕОМАТЕРИАЛОВ

Результат дробления представляет собой дисперсную систему из частиц случайных размеров и формы.

Крупность частицы определяет ее диаметр (наибольший линейный размер), а форму – меры сферичности, равные отношениям площади поверхности и объема частицы к квадрату и кубу диаметра.

Пусть S и ν - математические ожидания площади поверхности и объема частицы, а $m(k)$ математическое ожидание k -й степени ее диаметра. Тогда $S = \alpha m(2)$, $\nu = \beta m(3)$, где α и β - математические ожидания мер сферичности.

Отношение S/ν , равное суммарной площади поверхности частиц в единичном объеме, играет основную роль в динамике дробления. При дроблении геоматериалов в дробилках и мельницах эта величина является монотонно возрастающей функцией времени. Однако из физических соображений ясно, что такое возрастание имеет конечный предел, после чего коэффициент полезного действия процесса становится равным нулю, а энергоемкость дробления – бесконечной.

В природе естественное дробление горных пород широко представлено породными массивами, которые рассечены трещинами на структурные блоки или естественные отдельности.

Трещиноватость породных массивов по геометрии сетей трещин делят на хаотическую и сис-