

ISSN 1999-4125 (Print)

**ГЕОФИЗИКА  
GEOPHYSICS**

Научная статья

УДК 550.837

DOI: 10.26730/1999-4125-2023-2-4-14

**РАСЧЕТ КАЖУЩЕГОСЯ УДЕЛЬНОГО ЭЛЕКТРОСОПРОТИВЛЕНИЯ  
ПРИ ВЕРТИКАЛЬНОМ ЭЛЕКТРОЗОНДИРОВАНИИ  
МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЫ**

Сирота Дмитрий Юрьевич

Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева

\*для корреспонденции: sdy.pm@kuzstu.ru

**Информация о статье**

Поступила:

09 февраля 2023 г.

Одобрена после  
рецензирования:

10 мая 2023 г.

Принята к публикации:

25 мая 2023 г.

Опубликована:

15 июня 2023 г.

**Ключевые слова:**

Вертикальное  
электронзондирование,  
электротомография,  
кажущееся  
электросопротивление,  
электроустановки  
Шлюмберже, Веннера,  
линейный фильтр,  
преобразование Ханкеля.

**Аннотация.**

**Актуальность работы.** Анализ и интерпретация данных вертикального электрического зондирования (ВЭЗ) основаны на решении прямой задачи по определению кажущегося удельного электросопротивления (КУЭС). В своих основах эта задача была решена еще в 60-х–80-х годах XX века. Однако происходящий переход от классических зондирований к процедуре двумерной томографии требует разработки новых методов расчета КУЭС, лишенных недостатков классического подхода. Поэтому заявленная тема представленной статьи является несомненно актуальной.

**Цель работы.** В статье рассматривается задача вычисления кажущегося электросопротивления многослойной среды для основных типов электроустановок: Шлюмберже и Веннера.

**Методы исследования.** При решении поставленных задач используются методы математической физики (в области уравнений в частных производных), методы прикладной математики (в области численного интегрирования), методы чистой математики (в области решения систем линейных уравнений).

**Результаты исследования.** Предложена новая замена переменных, которая оказывается более эффективной для сплошного электронзондирования и двумерной электротомографии, чем классическая логарифмическая. Получены новые коэффициенты фильтров. Произведено сравнение эффективности новых фильтров с уже известными, выявлено их преимущество. В качестве обобщения предложенная методика позволяет численно находить значения преобразования Ханкеля.

**Для цитирования:** Сирота Д.Ю. Расчет кажущегося удельного электросопротивления при вертикальном электронзондировании многослойной среды // Вестник Кузбасского государственного технического университета. 2023. № 2 (156). С. 4-14. DOI: 10.26730/1999-4125-2023-2-4-14, EDN: DMJFPE

**Общая постановка задачи.** Вертикальное электрическое зондирование (ВЭЗ) – это один из наиболее распространенных геофизических методов исследования структуры геологической среды. Метод основан на измерении и анализе величины напряжения электрического поля,

порожденного искусственным источником постоянного тока. Объектом исследования является слоистый массив горных пород; предметом исследования являются геометрические (мощность) и электрические (сопротивление) характеристики слоев [1-4].

Технологическая суть метода ВЭЗ на постоянном токе заключается в следующем: с помощью двух питающих электродов  $A$  и  $B$  (батарейки) в толщу земли подается постоянный ток  $I_{AB}$ , Ам, с помощью двух измерительных электродов  $M$  и  $N$  производится измерение напряжения (разности потенциалов в двух точках  $U_{MN}$ ) электрического поля батарейки после прохождения тока через толщу земли. Повседневным аналогом описанной процедуры может служить обычное измерение мультиметром напряжения бытовой батарейки, когда щупы  $M$  и  $N$  подсоединяются к полюсам  $A$  и  $B$  батарейки не напрямую, а через серию резисторов разных сопротивлений. Далее происходит последовательное увеличение расстояния между питающими электродами  $A$  и  $B$ , в результате чего произойдет увеличение глубины прохождения токов, что в свою очередь приведет к получению информации о глубинном строении подповерхностного пространства.

В практике ВЭЗ, однако, анализируют не саму величину напряжения, а удельное электрическое сопротивление среды ( $УЭС - Ом \cdot м$ ), по которой проходит известный ток  $I$ , Ам, порождая напряжение  $U$ , В. При этом, так как подземное пространство не является однородным, идеальным проводником, то вместо истинного  $УЭС$  исследуют некую виртуальную физическую величину кажущегося  $УЭС$  ( $КУЭС$ ), которая обладает аналогичной размерностью, но при этом неявно учитывает неоднородность исследуемой среды.

В настоящее время все большее распространение получает комбинация вертикального электроразведывания (ВЭЗ) и электропрофилирования (ВЭП) – электротомография. В основе этого метода лежит серия работ М. Н. Lok'a, начиная с [5, 6], которая привела к созданию компьютерной программы Res2Inv интерпретации измерений геофизических данных. В России аналогичная программа ZondRes2d была создана А. Е. Каминским. Практике и результатам использования этих двух программ посвящено достаточно много работ [7 - 16]. Однако и та и другая программа обработки данных и собственно измерительные комплексы основаны на использовании классических подходов ВЭЗ и ВЭП. В представленной статье предлагается другой способ расчета КУЭС при ВЭЗ и ВЭП, который потенциально способен модернизировать расчетные алгоритмы электротомографии при инверсии данных.

Приведем расчетные формулы для трех наиболее распространенных типов электроустановок: потенциал-установки, Шлюмберже и Веннера [17]:

$$\rho_K^T = \frac{2\pi s U_{AM}}{I_{AB}}, \quad \rho_K^S = -\frac{2\pi \cdot s^2}{I_{AB}} \cdot \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=s}, \quad \rho_K^W = \frac{2\pi s U_{MN}}{I_{AB}}, \quad (1)$$

где  $I_{AB}$  – величина тока на отрезке  $AB$ , А;  $U_{AM, MN}$  – разность потенциалов на отрезках  $AM$ ,  $MN$ , В;  $s$  – величина полуразноса установки, м;

В следующих пунктах рассмотрим особенности вычислений потенциала и напряженности электрического поля в слоистой среде.

Пусть на поверхности однородного многослойного с плоскопараллельными границами полупространства (сверху изолятор – воздух, нумерация слоев идет сверху вниз) имеется точечный источник постоянного тока, который порождает стационарное электрическое поле. Величина его потенциала удовлетворяет уравнению Лапласа в трехмерном пространстве, которое в цилиндрической системе координат имеет вид [18]:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

Применяя к нему метод разделения переменных Фурье, получим два частных решения:  $R(r) = J_0(mr)$  – функция Бесселя нулевого порядка;  $Z(z) = Ae^{-mz} + Be^{mz}$ , где  $m$  – параметр, связанный с собственным значением задачи Штурма-Лиувилля формулой  $\xi = -m^2$ ;  $A, B$  – неизвестные коэффициенты. Так как параметр  $m$  может принимать произвольные положительные значения, то общее решение в каждом слое будет иметь интегральный вид:

$$U = \frac{\rho I}{4\pi} \int_0^\infty [Ae^{-mz} + Be^{mz}] J_0(mr) dm. \quad (3)$$

Учитывая граничные условия для потенциала и плотности тока, запишем выражение для величины потенциала первого слоя через специальные функции Стефанеску [19]  $\theta_1(m)$  и Шлихтера [20]  $R_1(m) = 1 + 2\theta_1(m)$ :

$$U_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[ \frac{1}{r} + 2 \int_0^\infty \theta_1(m) J_0(mr) dm \right] = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[ \frac{1}{r} + \int_0^\infty (R_1(m) - 1) J_0(mr) dm \right]. \quad (4.1)$$

Так как для вычисления величины КУЭС необходимо знать значения частной производной, то приведем соответствующую формулу

$$\frac{\partial U_1}{\partial r} = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[ -\frac{1}{r^2} - \int_0^\infty (R_1(m) - 1) J_1(mr) m dm \right]. \quad (4.2)$$

Преимущество функции Шлихтера заключается в существовании рекуррентных расчетных формул Л. Л. Ваньяна [21]

$$R_k(m) = \frac{1 - \psi_{k+1}(m)}{1 + \psi_{k+1}(m)}, \quad \psi_{k+1} = \frac{1 - \rho_{k+1} R_{k+1}(m) / \rho_k}{1 + \rho_{k+1} R_{k+1}(m) / \rho_k} \times e^{-2mh_k}, \quad R_N(m) = 1. \quad (5)$$

Отметим здесь частный случай двуслойного пространства, который будет использоваться ниже в качестве тестовой модели с функцией  $\theta_1(m) = \frac{K_{12} \cdot e^{-2mh}}{1 - K_{12} \cdot e^{-2mh}} = \frac{q}{1 - q}$ , где  $K_{12} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$  – коэффициенты отражения слоев. Так как  $q \in [-1; 1]$ , то ее можно разложить в многочлен Тейлора:  $\theta_1(m) = \sum_{j=1}^N q^j = \sum_{j=1}^N K_{12}^j e^{-2mhj}$ . Далее к каждому слагаемому применяют формулу Липшица  $\int_0^{+\infty} e^{-ma} J_0(mb) dm = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ . Получим, что выражение для потенциала  $U_1$  при  $r = s$  принимает вид

$$U_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[ \frac{1}{s} + \sum_{j=1}^N \frac{2K_{12}^j}{[s^2 + 4(j \cdot h)^2]^{0.5}} \right]. \quad (*)$$

После этого вычисляют производную  $\frac{\partial U_1}{\partial r}$ , которая при  $r = s$  примет вид:

$$\frac{\partial U_1}{\partial r} = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[ -\frac{1}{s^2} - \sum_{j=1}^N \frac{2sK_{12}^j}{[s^2 + 4(j \cdot h)^2]^{1.5}} \right]. \quad (**)$$

Оба ряда в (\*, \*\*) являются сходящимися по признаку Даламбера, при этом у ряда (\*) интервал сходимости  $-1 \leq K_{12} < 1$ , а у ряда (\*\*)  $-1 \leq K_{12} \leq 1$ ; кроме того, скорость сходимости ряда (\*\*) более быстрая, чем у ряда (\*).

Таким образом, формулы (1) для КУЭС для указанных трех типов электроустановок примут следующий вид (с указанием частного случая двуслойного пространства):

Потенциал-установки:

$$\rho_K^T(s) = \rho_1 \left[ 1 + s \int_0^\infty [R_1(m) - 1] J_0(ms) dm \right] = \rho_1 \left[ 1 + \sum_{j=1}^N \frac{2sK_{12}^j}{[s^2 + 4(j \cdot h)^2]^{0.5}} \right], \quad (6.1)$$

Шлюмберже:

$$\rho_K^{SH}(s) = \rho_1 \left[ 1 + s^2 \int_0^\infty [R_1(m) - 1] m J_1(ms) dm \right] = \rho_1 \left[ 1 + \sum_{j=1}^N \frac{2s^3 K_{12}^j}{[s^2 + 4(j \cdot h)^2]^{1.5}} \right], \quad (6.2)$$

Веннера:

$$\rho_K^W = 2\rho_K^T(s) - \rho_K^T(2s). \quad (6.3)$$

**Разработка и анализ метода интегрирования.** Сложности реализации группы формул (6), как известно, заключаются в осциллирующем характере функций Бесселя. Кроме этого, проблема осложняется еще и тем, что ее аргумент зависит от параметра разности электроустановки.

Возможное решение второй проблемы заключается в применении какой-нибудь замены переменных, которая бы преобразовывала составной аргумент функции в одну общую переменную.

Ставим уже классическим [1] вариантом такой замены является **замена 1**: переход к логарифмическим переменным по формулам:  $m = e^{-y}$ ,  $s = e^x$ ,  $dm = -e^{-y} dy$ . Тогда исходный интеграл в (6.1) примет вид  $I_1^T(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x-y)} f(e^{-y}) J_0(e^{x-y}) dy$ , который является «сверткой» двух функций. Используя ее свойство коммутативности, получим требуемый вид  $I_1^T(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{y-x}) e^y J_0(e^y) dy$ . Аналогично рассматривая интеграл в (6.2), получим интеграл  $I_1^{SH}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{y-x}) e^{2y} J_1(e^y) dy$ .

Альтернативной является **замена 2**:  $m = y/s$ , тогда  $dm = dy/s$ , после чего интегралы в (6.1) и (6.2) примут вид  $I_2^T(s) = \int_0^\infty f(y/s) J_0(y) dy$  и  $I_2^{SH}(s) = \int_0^\infty f(y/s) J_1(y) y dy$ . Заметим, что полученные интегралы являются обобщением двустороннего и одностороннего преобразования Лапласа, где функции  $f(y, x)$  или  $f(y, s)$  являются ядрами преобразований.

Дальнейшее вычисление обоих интегралов основано на модифицированном методе центральных прямоугольников:  $\int_a^b f(y) g(y) dy = h \sum_k f(u_k) g(u_k)$ , где  $u_k = y_k + h/2$ , а узлы

$u_k$  образуют равномерную сетку с шагом  $h$ . Каждое слагаемое представляет собой интеграл от исходной функции на малом интервале  $y \in [y_k; y_k + h]$ . Считая, что каждый сомножитель вида  $hg(u_k)$  также представляет собой приближенное значение интеграла на этом же промежутке, получим расчетную формулу

$$F = \int_a^b f(y)g(y)dy = \sum_k f(u_k) \int_{y_k}^{y_{k+1}} g(y)dy = \sum_k f(u_k)C_k. \quad (7)$$

Полученное выражение внешне напоминает общую квадратурную формулу для функции  $w = f(y)$  с весом  $w = g(y)$ , где  $C_k$  – весовые коэффициенты; отличие заключается в том, что для них в данном случае не выполняется обязательное условие  $C_k > 0$

В качестве простейших примеров реализации формулы (7) рассмотрим интегралы, содержащие, во-первых осциллирующую функцию  $g(y)$ , а во-вторых, в качестве  $f(y)$  – функцию, для которой метод прямоугольников не будет выполняться абсолютно точно: а)  $I_T = \int_0^\pi y^3 \sin y dy = \pi^3 - 6\pi$  и б)  $I_T = \int_0^\pi e^y \sin y dy = \frac{e^{\pi+1}}{2}$ . Тогда для пункта а)  $I_\Pi = \int_0^\pi y^3 \sin y dy = \sum_k u_k^3 \int_{y_k}^{y_{k+1}} \sin(y)dy = \sum_k u_k^3 \cdot [\cos(y_k) - \cos(y_{k+1})]$ . Если разбить интервал  $[0; \pi]$  на 10 частей с шагом  $h \sim 10^{-1}$ , то погрешность будет равна  $\Delta = |I_\Pi - I_T| = 7,675 \cdot 10^{-2}$ ; если же разбить интервал  $[0; \pi]$  на 100 частей с шагом  $h \sim 10^{-2}$ , то погрешность будет равна  $\Delta = |I_\Pi - I_T| = 7,751 \cdot 10^{-4}$ .

Для пункта б)  $I_\Pi = \int_0^\pi e^y \sin y dy = \sum_k e^{u_k} \int_{y_k}^{y_{k+1}} \sin(y)dy = \sum_k e^{u_k} \cdot [\cos(y_k) - \cos(y_{k+1})]$ . Если разбить интервал  $[0; \pi]$  на 10 частей с шагом  $h \sim 10^{-1}$ , то погрешность будет равна  $\Delta = |I_\Pi - I_T| = 4,872 \cdot 10^{-2}$ ; если же разбить интервал  $[0; \pi]$  на 100 частей с шагом  $h \sim 10^{-2}$ , то погрешность будет равна  $\Delta = |I_\Pi - I_T| = 4,963 \cdot 10^{-4}$ .

Таким образом, можно заключить, что погрешность предложенной квадратурной формулы  $\Pi \sim h^2$ , что в целом является удовлетворительным, учитывая тот факт, что экспериментальные данные определяются с более низкой погрешностью.

Однако если напрямую применить формулу (7) к интегралам в формулах (6.1, 6.2), то получим для обеих замен расходящиеся на бесконечности интегралы. Это приведет к тому, что рассчитанные коэффициенты  $C_k$  будут неограниченно возрастать по мере продвижения к бесконечности.

Возможным преодолением этого затруднения является одновременное умножение и деление исходной подынтегральной функции на некоторое возрастающее выражение, за счет которого вспомогательные интегралы превратятся в сходящиеся. Однако из-за общей медленной сходимости исходных интегралов (за счет умножения на возрастающую функцию) даже такие ухищрения не приводят к построению эффективных расчетных формул: интервал интегрирования приходится брать достаточно большим (чем больше предполагаемый параметр разнаса электроустановки, тем он больше), что приводит к весьма большому количеству (порядка 1000) внутренних отрезков.

Возможным и в настоящее время наиболее часто используемым является рассмотрение коэффициентов  $C_k$  не как результата интегрирования на промежуточных отрезках, а просто как некие числа. Возможность поиска этих коэффициентов определяется тем, что функция  $w = f(y)$  зависит также и от параметра  $s$  – размера электроустановки. С учетом этого формула (7) примет вид  $F(s) = \int_0^{+\infty} f(y, s)g(y)dy = \sum_k f(u_k, s)C_k$ . Теперь, применяя это выражение к дискретному набору значений параметра  $s = s_j$ , получим систему уравнений

$$F(s_j) = \sum_k f(u_k, s_j)C_k, \quad (8)$$

где  $C_k$  – неизвестные коэффициенты (элементы линейного фильтра);  $u_k = y_k + h/2$ , а узлы  $u_k$  образуют равномерную сетку с шагом  $h$ .

Учитывая вышеуказанные замечания относительно расходимости внутренних интегралов и возрастающих значений коэффициентов, необходимо добавить стабилизирующее уравнение вида  $\sum_k C_k = 1$ , которое берется из общей теории квадратурных формул. Так как для получения единственного решения системы необходимо, чтобы количество неизвестных совпадало с количеством уравнений в системе, то количество используемых значений параметра  $s = s_j$  должно быть на единицу меньше, чем количество коэффициентов  $C_k$ . Решение системы линейных уравнений будем производить с помощью стандартного метода Гаусса.

Здесь необходимо отметить, что сами коэффициенты, а также точность найденного линейного фильтра является функцией трех воздействий: а) выбранной пары вспомогательных функций; б) длиной (количеством элементов  $C_k$ ) фильтра; в) интервалом изменения переменной интегрирования.

В теоретической литературе, а также в практике полевого электроразведки получила распространение первая замена, основанная на логарифмических переменных. При этом коэффициенты  $C_k$  определяются на основе формулы (8) с использованием интегральных формул 6.611, 6.621 и 6.631 справочника Градштейна-Рыжика [22].

Если продифференцировать равенство 6.621  $b^2 \int_0^{+\infty} m e^{-am} J_1(mb) dm = \frac{b^3}{[a^2+b^2]^{1,5}}$  по параметру  $a$ , получим выражение  $b^2 \int_0^{+\infty} m e^{-am} J_1(mb) m dm = \frac{3ab^3}{[a^2+b^2]^{2,5}}$ , откуда при  $b = s$  и  $a = 1$  получим функции О. Куфуда [1]:  $f_K(m) = m e^{-m}$ ,  $F_K(s) = \frac{3s^3}{[1+s^2]^{2,5}}$ .

Приведем фильтр О'Нейла – Куфуда [23, 24] из 20 элементов для  $y \in [-2; 6]$ :

$$C[1] = 0,003042; C[2] = -0,001198; C[3] = 0,01284; C[4] = 0,02350;$$

$$C[5] = 0,08688; C[6] = 0,2374; C[7] = 0,6194; C[8] = 1,1817; C[9] = 0,4248;$$

$$C[10] = -3,4507; C[11] = 2,7044; C[12] = -1,1324; C[13] = 0,3930; C[14] = -0,1436;$$

$$C[15] = 0,05812; C[16] = -0,02521; C[17] = 0,01125; C[18] = -0,004978;$$

$$C[19] = 0,002072; C[20] = 0,000318.$$

Если второе из полученных интегральных равенств продифференцировать еще раз, то получим выражение  $b^2 \int_0^{+\infty} m^2 e^{-am} J_1(mb) m dm = \frac{12ab^2 - 3b^4}{[a^2+b^2]^{3,5}}$ , откуда при  $b = s$  и  $a = 1$  получим функции  $f(m) = m^2 e^{-m}$ ,  $F(s) = \frac{12s^2 - 3s^4}{[1+s^2]^{3,5}}$ . Складывая их с уже полученными функциями, получим функции П. Дэвиса [25]:  $f_D(m) = (m + m^2) \exp(-m)$ ,  $F_D(s) = \frac{15s^3}{[1+s^2]^{3,5}}$ .

Из интегрального равенства 6.631  $b^2 \int_0^{+\infty} m^2 e^{-m^2 a} J_1(mb) dm = \frac{b^3}{(2a)^2} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right)$  при  $b = s$  и  $a = 1$  получим функции У. Андерсона [26]:  $f_A(m) = m \exp(-m^2)$ ,  $F_A(s) = 0,25s^3 \exp(-0,25s^2)$ .

Предварительная практика применения фильтров П. Дэвиса и У. Андерсона в рамках формулы (8) показала их полную несостоятельность. В тоже время фильтр О'Нейла, основанный на функции О. Куфуда и фактически являющийся модернизацией его же фильтра, дает правильные значения КУЭС для разнообразных сочетаний параметров многослойного пространства. Это не значит, что сами по себе фильтры П. Дэвиса и У. Андерсона плохи; это означает, что для их применения необходимо применять не формулу (8), а некую ее модификацию, разработке которой и были, видимо, посвящены статьи указанных авторов и их учеников.

В СССР получили распространения фильтры, полученные Е. Ш. Абрамовой [27] в 80-е годы 20 века; они также основаны на первой замене и функции Куфуда. Приведем фильтр Е. Ш. Абрамовой из 15 элементов при  $y \in [-1,3463; 6,7128]$ :

$$C[1] = -0.01629496; C[2] = 0.2038275; C[3] = -1.202593; C[4] = 3.737868;$$

$$C[5] = -5.241852; C[6] = 1.916952; C[7] = -0.2248076; C[8] = 1.582989;$$

$$C[9] = -0.1626857; C[10] = 0.3619518; C[11] = 0.0264210; C[12] = -0.0300287;$$

$$C[13] = 0.06768760; C[14] = -0.03006569; C[15] = 0.01062980.$$

Отметим также, что в настоящее время существует несколько программ, которые позволяют найти коэффициенты фильтров, основанные на первой замене переменных. В России одной из таких программ, доступных к свободному использованию, является ElectroFiltES [28], которая позволяет как найти коэффициенты фильтров для трех типов установок, так и построить график КУЭС. Приведем величины значений коэффициентов, рассчитанных этой программой с взятыми по умолчанию параметрами.

Фильтр ElectroFiltES из 15 элементов при  $y \in [-2; 6]$ :

$$C[1] = 0,0047055; C[2] = 0,0036117; C[3] = -0,031227; C[4] = 0,169453;$$

$$C[5] = -0,290885; C[6] = 0,7837335; C[7] = -0,671527; C[8] = 2,1221967;$$

$$C[9] = -0,7588776; C[10] = 2,4142945; C[11] = -5,5676175; C[12] = 3,8563568;$$

$$C[13] = -1,2220066; C[14] = 0,2035958; C[15] = -0,0158207.$$

Анализ коэффициентов разных фильтров показывает, что, несмотря на внешнее поэлементное их различие, все они обладают свойством псевдонормального распределения. Первый и последний коэффициент по модулю приближаются к нулю, а коэффициенты в районе середины фильтра по модулю превышают остальные. Это обстоятельство кажется странным, так как стандартная теория говорит, что коэффициенты могут быть определены через интегралы вида  $I = \int_{y_k}^{y_{k+1}} e^y J_0(e^y) dy$  или  $I = \int_{y_k}^{y_{k+1}} e^{2y} J_1(e^y) dy$ . Так как подынтегральные функции являются возрастающими, коэффициенты с одной стороны координатной оси (при  $y \rightarrow -\infty$ ) должны устремляться к нулю, а с другой ее стороны (при  $y \rightarrow +\infty$ ) – к бесконечности.

Другим недостатком всех этих фильтров является использование лишь первой замены переменных, которая накладывает существенное ограничение на используемые величины разносов электроустановки.

**Расчет новых коэффициентов линейных фильтров.** Перейдем к поиску новых фильтров для указанных двух замен переменных в случае двух типов электроустановок: Шлюмберже и Веннера. Простейшим примером пары функций являются уже рассмотренные функции для двухслойного пространства  $f_{2L}(m) = \frac{K_{12} \cdot e^{-2mh}}{1 - K_{12} \cdot e^{-2mh}}$  в качестве входящей и соответствующее значение интеграла  $F_{2L}^{SH}(s) = \sum_{j=1}^N \frac{s^3 K_{12}^j}{[s^2 + 4(j \cdot h)^2]^{1,5}}$  для установки Шлюмберже и  $F_{2L}^V(s) = 2s \sum_{j=1}^N K_{12}^j \left( \frac{1}{[s^2 + 4(j \cdot h)^2]^{0,5}} - \frac{1}{[4s^2 + 4(j \cdot h)^2]^{0,5}} \right)$  для установки Веннера в качестве исходящих функций. Поскольку эти функции помимо общего параметра электроустановки содержат еще два параметра  $K_{12}$  и  $h$ , то рассчитанные для конкретных их значений наборы коэффициентов фильтров будут различными. Расчеты показали, что из полного перечня значений этих параметров для первой замены квазиоптимальными будут значения  $K_{12} = 0.85$  и  $h = 5$ , а для второй  $K_{12} = -0.85$  и  $h = 1$ . Надо полагать, именно это обстоятельство и не позволило использовать эти две функции в 60-80 годы 20 века в качестве расчетных: поиск оптимальных значений параметров  $K_{12}$  и  $h$  занимал достаточно большое компьютерное время. Применяя предложенную расчетную методику, получим следующие фильтры:

Случай установки Шлюмберже:

для первой замены из 15 элементов при  $y \in [-2; 6]$ :

C[1] = -0,018238; C[2] = 0,115535; C[3] = -0,207679; C[4] = 0,503263;  
C[5] = 0,235619; C[6] = 2,281389; C[7] = -2,652474; C[8] = 0,838734;  
C[9] = -0,077893; C[10] = -0,040880; C[11] = 0,034368; C[12] = -0,012771;  
C[13] = -0,002331; C[14] = 0,005025; C[15] = -0,001667.

для второй замены из 15 элементов при  $y \in [0; 20]$ :

C[1] = 0,214444; C[2] = 1,854869; C[3] = 0,132255; C[4] = -1,030058;  
C[5] = -1,180787; C[6] = -0,416779; C[7] = -0,609706; C[8] = 9,365482;  
C[9] = -9,624726; C[10] = -2,553252; C[11] = 7,999881; C[12] = -2,181693;  
C[13] = -2,253252; C[14] = 1,572898; C[15] = -0,289576.

Случай установки Веннера:

для первой замены из 15 элементов при  $y \in [-2; 6]$ :

C[1] = 0,022916; C[2] = -0,049141; C[3] = 0,208398; C[4] = 0,322153;  
C[5] = 1,377610; C[6] = -0,204887; C[7] = -1,274586; C[8] = 0,865735;  
C[9] = -0,390893; C[10] = 0,181911; C[11] = -0,081924; C[12] = 0,023522;  
C[13] = 0,004298; C[14] = -0,006753; C[15] = 0,001640.

для второй замены из 15 элементов при  $y \in [0; 20]$ :

C[1] = 0,637554; C[2] = 1,321827; C[3] = 0,867313; C[4] = -4,886456;  
C[5] = 6,817157; C[6] = -9,958551; C[7] = -4,796882; C[8] = 57,777098;  
C[9] = -91,909341; C[10] = 43,105628; C[11] = 30,988729; C[12] = -45,425950;  
C[13] = 18,433978; C[14] = -1,492618; C[15] = -0,479488.

Отметим несколько моментов.

1) Может быть поставлена вспомогательная задача поиска оптимальных значений для параметров  $K_{12}$  и  $h$ , которая выше решалась простым подбором.

2) Может быть поставлена дополнительная задача о поиске оптимальных границ отрезка интегрирования, которая здесь решалась также методом простого подбора.

3) Длина фильтра является, по сути, дискретным эквивалентом длины отрезка интегрирования  $y \in [y_{\max}, y_{\min}]$ . Казалось бы, чем он дальше продолжается в бесконечность, тем интеграл будет вычисляться с большей точностью. Однако, как показали непосредственные расчеты, это не так. Например, фильтр, рассчитанный на отрезке  $y \in [0; 20]$  с 15 коэффициентами, будет в 4 раза точнее, чем фильтр, рассчитанный на отрезке  $y \in [0; 100]$  с 75 коэффициентами. Связано это, по-видимому, с неустранимым влиянием погрешностей как при вычислении коэффициентов, так и при расчетах теоретических КУЭС.

Приведем поверхности функции погрешностей вычисления интегралов  $D = \sum |F_R(s_j) - F_{2L}(s_j)|$ , рассчитанных с помощью формул (6.1, 6.2., 8) для области изменения  $h \in [0; 5]$  и  $K_{12} \in [-0,85; 0,85]$  (Рис. 1, 2).

Также приведем два графика (Рис. 3, 4) теоретического КУЭС для более сложного четырехслойного пространства со следующими характеристиками:

а) мощности  $h_1 = 1$  м,  $h_2 = 3$  м,  $h_3 = 10$  м и УЭС  $\rho_1 = 30$  Ом,  $\rho_2 = 300$  Ом,  $\rho_3 = 3$  Ом,  $\rho_4 = 100$  Ом;

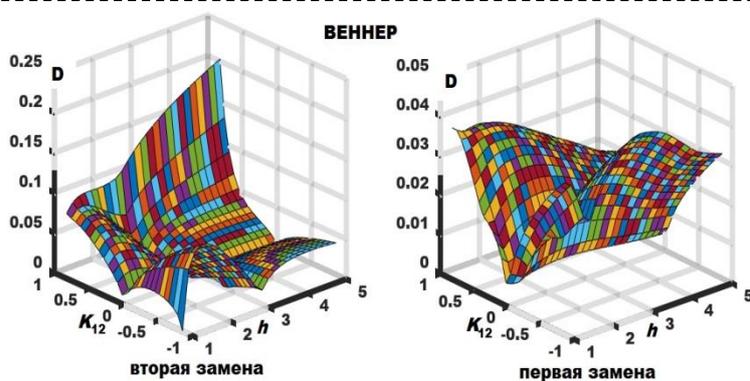


Рис. 1. Распределение погрешностей для установки Веннера  
Fig. 1. Error distribution for Venner installation

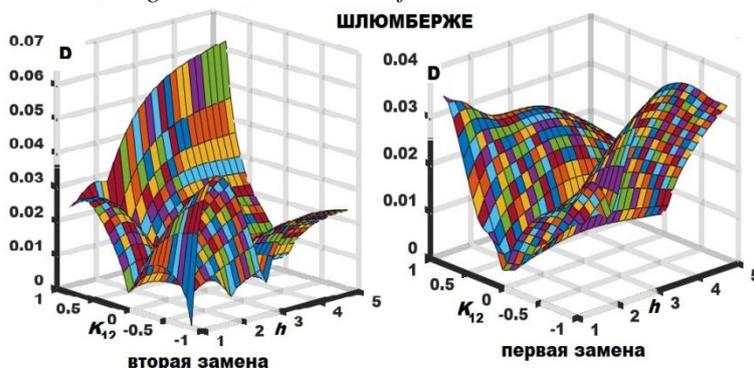


Рис. 2. Распределение погрешностей для установки Шлюмберже  
Fig. 2. Error distribution for Schlumberger installation

б) мощности  $h_1 = 1$  м,  $h_2 = 46$  м,  $h_3 = 150$  м и УЭС  $\rho_1 = 259$  Ом,  $\rho_2 = 94$  Ом,  $\rho_3 = 27$  Ом,  $\rho_4 = 150$  Ом.

**Выводы и заключение.** Предлагаемый метод интегрирования, а также найденные коэффициенты фильтров позволяют вычислять интегралы Ханкеля из выражения (6.1)  $I = \int_0^\infty f(m)mJ_1(ms)dm$ . Рассматривая указанные выше четыре типа функций О. Куфуда, П. Дэвиса и У. Андерсона в случае двух рассмотренных замен можно получить, что погрешность точного и приближенного решения располагается в диапазоне  $-2 \leq \lg \Delta_1 \leq -7$  для первой замены и  $-2 \leq \lg \Delta_2 \leq -15$  для второй при условии, что параметр  $0 \leq \ln(s) \leq 7$ . Таким образом, вторая

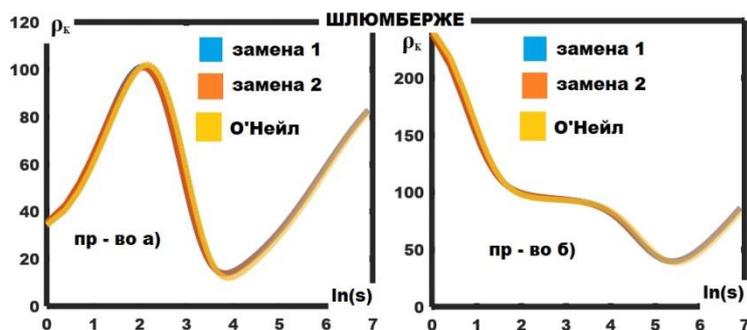


Рис. 3. Графики КУЭС для установки Шлюмберже  
Fig. 3. Graphs of the AER for the Schlumberger installation

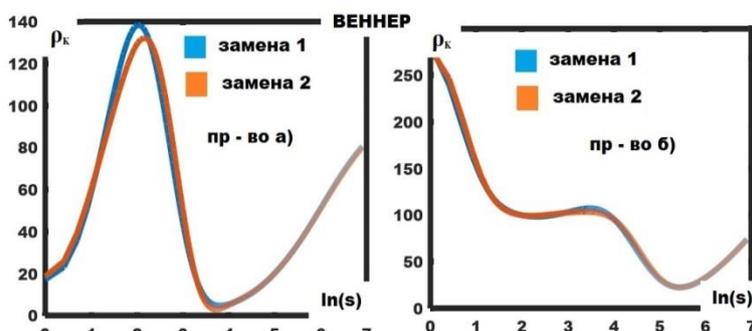


Рис. 4. Графики КУЭС для установки Веннера  
Fig. 4. Graphs of the AER for the Venner installation

замена оказывается более эффективной, чем первая. В качестве недостатка предлагаемого метода можно отметить, что автору так и не удалось подобрать пару входящей и исходящей функций для интеграла из (6.1). Преимуществом предлагаемой новой замены переменной является возможность использования разносов электроустановок не только в логарифмическом масштабе, но и произвольном, что оказывается удобным для сплошного электротомографирования или двумерной томографии.

В заключение хотелось бы выразить благодарность заслуженному участнику форума <https://dxdu.ru> с ником **mihiv** за полезное обсуждение поставленной задачи и особенностей ее реализации.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куфуд О. Зондирование методом сопротивлений. М.: Недра, 1984. 270 с.
2. Хмелевской В. К. Электрическое зондирование геологической среды. Ч. 1,2,3 / В. К. Хмелевской, В. А. Шевнин. М.: Изд-во МГУ, 1988. 177 с.
3. Колесников В. П. Основы интерпретации электрических зондирований. М.: Научный мир, 2007. 248 с.
4. Матвеев В. К. Электроразведка. М.: Недра, 1990. 368 с.
5. Loke M. H. Practical techniques for 3D resistivity surveys and data inversion / M. H. Loke, R. D. Baker // Geophysical Prospecting. 1996, v. 44, pp. 499–523.
6. Loke M. H., Barker R. D. Rapid least-squares inversion of apparent resistivity pseudo sections by a quasi-Newton method // Geophysical Prospecting. 1996. No. 44. Pp. 131–152.
7. Modin I. M., Baranchuk K. I., Mukanova B. G., Mirgazyzy T. M. Relief and electrical Resistivity tomography // Engineering and Mining Geophysics. 2018, Apr 2018, Vol. 2018, pp. 1–11.
8. Поликарпова В. А., Куликова В. А., Бобачев А. А. Результаты электроразведочных работ методом электротомографии на правом берегу р. Волга // Инженерная и рудная геофизика. 2021. С. 121–126.
9. Бобачев А. А. Возможности электротомографии при малоглубинных и прибрежных исследований // Инженерная и рудная геофизика. 2021, С. 158–165.
10. Dahlin T. Underwater ERT surveying in water with resistivity layering with example of application to site investigation for a rock tunnel in central Stockholm / T. Dahlin, M. H. Loke // Near Surface Geophysics. 2018. Vol. 16. 230-237.
11. Бобачев А. А., Сергеев К. С., Горин А. Д. Определение удельного электрического сопротивления грунта методом электротомографии в скважине // Полевые и лабораторные методы исследования грунтов –

проблемы и решения. 2019. С. 28–35.

12. Бобачев А. А., Стойнова А. М. Практический опыт применения скважинно-поверхностной электротомографии // Геофизика. 2019. № 1. С. 33–40.

13. Балков Е. В. Электротомография: аппаратура, методика и опыт применения // Геофизика. 2012. № 6. С. 54–63.

14. Бобачев А. А. Электротомография методом сопротивлений и вызванной поляризации // Приборы и системы разведочной геофизики. 2006. № 2. С. 14–17.

15. Шейн А. Н., Потапов В. В. Математическое моделирование в разведочной геофизике: учеб.-метод. Пособие. Чита : ЗабГУ, 2017. 125 с.

16. Szalai S., Szarka L. On the classification of surface geoelectric arrays // Geophysical Prospecting. 2008. No. 56. Pp. 159–175.

17. Das U.C., Verma S. K. Digital linear filter for computing type curves for the two-electrode system of resistivity sounding // Geoph. Prospect., 1980, v. 28, pp. 610–619.

18. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1977. 736 с.

19. Slichter L.B. The interpretation of the resistivity prospecting method for horizontal structures // Physics, 1933. V. 4. Pp. 307–322.

20. Stefanescu S. S., Schlumberger M. Sur la distribution électrique potentielle autour d'une prise de terre ponctuelle dans un terrain à couches horizontales, homogènes et isotropes // J.Physics. Radium, 1930, v. 7, pp 132–141.

21. Ваньян Л. Л., Морозова Г. М., Ложеницина Л. В. О расчете теоретических кривых электрического зондирования // Прикладная геофизика. М. : Гостоптехиздат, 1962. 254 с.

22. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. : Физматгиз, 1963. 1100 с.

23. O'Neil D. J., Merrick N. P. A digital linear filter for resistivity sounding with a generalized electrode array // Geoph. Prosp., 1984, v. 32, pp. 105–123.

24. O'Neil D. J. Improved linear coefficients for application in apparent resistivity computations // Bull. Aust. Soc. Explor. Geophys. 1975, v. 6, pp. 10–109.

25. Davis P. A., Greenhalgh S. A., Merrick N. P. Resistivity sounding computations with any array using a single digital filter // Bull. Aust. Soc. Explor. Geophys. 1980, v. 11, pp. 54–62.

26. Anderson W. L. Computer program numerical integration of related Hankel transforms of orders 0 and 1 by adaptive digital filtering // Geophysics, 1979, v. 44, pp. 1287–1305.

27. Абрамова Е. Ш. Способ оперативного и точного вычисления интегралов, применяемы к расчету ряда геофизических кривых. М. : ВСЕГИНГЕО, 1985. 12 с.

28. Новиков К. В. ElectroFiltES – руководство пользователя. М. : 2016. 14 с. (Программа ElectroFiltES (magnetometry.ru)).

© 2023 Авторы. Эта статья доступна по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

*Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

*Об авторах:*

Сирота Дмитрий Юрьевич, доцент, Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева, (650000, Россия, г. Кемерово, ул. Весенняя, 28), e-mail: sdy.pm@kuzstu.ru

*Заявленный вклад авторов:*

Сирота Дмитрий Юрьевич – постановка исследовательской задачи, научный менеджмент, обзор соответствующей литературы, концептуализация исследования, сбор и анализ данных, выводы, написание текста.

*Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

## Original article

## CALCULATION OF APPARENT RESISTIVITY FOR THE VERTICAL ELECTRIC SOUNDING OF MULTI-LAYER ENVIRONMENT

Dmitry Yu. Sirota

T.F. Gorbachev Kuzbass State Technical University

\*for correspondence: sdy.pm@kuzstu.ru



## Article info

Received:

09 February 2023

Accepted for publication:

10 May 2023

Accepted:

25 May 2023

Published:

15 June 2023

**Keywords:** Vertical electric sounding, electrotomography, apparent electrical resistance, Schlumberger, Wenner electrical installations, linear filter, Hankel transformation

**Abstract.**

**The urgency of the discussed issue.** The analysis and interpretation of vertical electrical sounding (VEZ) data is based on solving the direct problem of determining the apparent specific electrical resistance (CUES). In its foundations, this task was solved back in the 60s - 80s of the twentieth century. However, the ongoing transition from classical probing to the procedure of two-dimensional tomography requires the development of new methods for calculating the CES, devoid of the disadvantages of the classical approach. Therefore, the stated topic of the presented article is undoubtedly relevant.

**The main aim of the study.** The article considers the problem of calculating the apparent electrical resistance of a multilayer medium for the main types of electrical installations: Schlumberger and Wenner.

**The methods used in the study.** Methods of mathematical physics (in the field of partial differential equations), methods of applied mathematics (in the field of numerical integration), methods of pure mathematics (in the field of solving systems of linear equations) are used to solve the tasks.

**The result.** A new variable replacement is proposed, which is more effective for continuous electro-sounding and two-dimensional electrotomography than the classical logarithmic one. New filter coefficients are obtained. The efficiency of the new filters is compared with the already known ones, their advantage is revealed. As a generalization, the proposed technique allows us to numerically find the values of the Hankel transformation.

**For citation:** Sirota D.Yu. Calculation of apparent resistivity for the vertical electric sounding of multi-layer environment. *Vestnik Kuzbasskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*=Bulletin of the Kuzbass State Technical University. 2023; 2(156):4-14. (In Russ., abstract in Eng.). DOI: 10.26730/1999-4125-2023-2-4-14, EDN: DMJFPE

## REFERENCES

1. Kufud O. Probing by the method of resistances. M.: Nedra; 1984.
2. Khmelevskaya V.K., Shevnin V.A. Electric sounding of the geological environment. Ch. 1,2,3. M.: Publishing House of Moscow State University; 1988.
3. Kolesnikov V.P. Fundamentals of interpretation of electrical soundings. M.: Scientific world; 2007.
4. Matveev V.K. Electrical exploration M.: Nedra; 1990.
5. Loke M.H., Baker R. D. Practical techniques for 3D resistivity surveys and data inversion. *Geophysical Prospecting*. 1996; 44:499–523.
6. Loke M.H., Barker R.D. Rapid least-squares inversion of apparent resistivity pseudo sections by a quasi-Newton method. *Geophysical Prospecting*. 1996; 44:131–152.
7. Modin I.M., Baranchuk K.I., Mukanova B.G., Mirgakyzy T.M. *Relief and electrical Resistivity tomography. Engineering and Mining Geophysics*. 2018; 2018:1–11.
8. Polikarpova V.A., Kulikova V.A., Bobachev A.A. Results of electrical exploration by electro-tomography on the right bank of the Volga River. *Engineering and ore Geophysics*. 2021. Pp. 121–126.
9. Bobachev A.A. Possibilities of electrotomography in shallow and shallow studies / A.A. Bobachev. *Engineering and Ore Geophysics*. 2021. Pp. 158–165.
10. Dahlin T., Loke M.H. Underwater ERT surveying in water with resistivity layering with example of application to site investigation for a rock tunnel in central Stockholm / T. Dahlin. *Near Surface Geophysics*. 2018; 16:230-237.
11. Bobachev A.A., Sergeev K.S., Gorin A.D. Determination of the electrical resistivity of soil by electrotomography

in a well. *Field and laboratory methods of soil research – problems and solutions*. 2019. Pp. 28–35.

12. Bobachev A.A., Stoyanova A.M. Practical experience of using borehole surface electrotomography. *Geophysics*. 2019; 1:33-40.

13. Balkov E.V. Electrotomography: equipment, methodology and experience of application. *Geophysics*. 2012; 6:54–63.

14. Bobachev A.A. Electrotomography by the method of resistances and induced polarization. *Instruments and systems of exploration geophysics*. 2006; 2:14-17.

15. Shein A.N., Potapov V.V. Mathematical modeling in exploration geophysics: textbook.- method. Manual. Chita: ZabGU; 2017.

16. Szalai S., Szarka L. On the classification of surface geoelectric arrays / S. Szalai, L. Szarka. *Geophysical Prospecting*. 2008; 56:159–175.

17. Das U.C., Verma S.K. Digital linear filter for computing type curves for the two-electrode system of resistivity sounding. *Geoph. Prospect.* 1980; 28:610–619.

18. Tikhonov A.N., Samarsky A.A. Equations of mathematical physics. M.: Nauka; 1977.

19. Slichter L.B. The interpretation of the resistivity prospecting method for horizontal structures. *Physics*. 1933; 4:307–322.

20. Stefanescu S.S., Schlumberger M. Sur la distribution électrique potentielle autour d'une prise de terre ponctuelle dans un terrain à couches horizontales, homogènes et isotropes. *J.Physics. Radium*. 1930; 7:132–141.

21. Vanian L.L., Morozova G.M., Lozhenitsina L.V. On the calculation of theoretical curves of electric sensing. *Applied Geophysics*. M.: Gostoptehizdat; 1962.

22. Gradstein I.S., Ryzhik I.M. Tables of integrals, sums, series and products. M.: Fizmatgiz; 1963.

23. O'Neil D.J., Merrick N.P. A digital linear filter for resistivity sounding with a generalized electrode array. *Geoph. Prosp.* 1984; 32:105–123.

24. O'Neil D.J. Improved linear coefficients for application in apparent resistivity computations. *Bull. Aust. Soc. Explor. Geophys.* 1975; 6:104–109.

25. Davis P.A., Greenhalgh S.A., Merrick N.P. Resistivity sounding computations with any array using a single digital filter. *Bull. Aust. Soc. Explor. Geophys.* 1980; 11:54–62.

26. Anderson W.L. Computer program numerical integration of related Hankel transforms of orders 0 and 1 by adaptive digital filtering. *Geophysics*. 1979; 44:1287–1305.

27. Abramova E.S. A method of rapid and accurate calculation of integrals applied to the calculation of a number of geophysical curves. M. VSEGIN-GEO, 1985. 12 p.

28. Novikov K.V. ElectroFiltES – user manual. M. 2016. 14 s (ElectroFiltES program (magnetometry.ru)).

© 2023 The Authors. This is an open access article under the CC BY license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

*The authors declare no conflict of interest.*

*About the authors:*

Sirota Dmitry Yu., Associate Professor, T.F. Gorbachev Kuzbass State Technical University, (28 street Vesennyaya, Kemerovo, 650000, Russian Federation), e-mail: sdy.pm@kuzstu.ru

*Contribution of the authors:*

Sirota Dmitry Yu. – formulation of a research task, scientific management, review of relevant literature, conceptualization of research, data collection and analysis, conclusions, writing a text.

*All authors have read and approved the final manuscript.*

