МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.21

А.С.Сорокин

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 1. Введение. Основные задачи теории надежности: установление закономерностей возникновения отказов и их восстановления, определение количественных характеристик, разработка методов оценки и расчета надежности. Эти задачи решаются двумя путями. Первый путь состоит в исследовании статистических закономерностей появления отказов однотипного оборудования в определенных условиях эксплуатации и является основой для установления законов распределения исследуемых параметров и получения числовых характеристик эксплуатационной надежности оборудования.

Найденные таким способом характеристики используются для расчетов надежности технологических систем, составленных из тех типов оборудования, применительно к которым они определены.

Второй путь нацелен на изучение физической природы и механизма отказов. Он служит основой для разработки мероприятий по повышению надежности существующих и вновь проектируемых технологических систем.

Этот путь из-за сложности получения необходимой исходной информации не имеет пока широкого распространения при исследованиях надежности взрывобезопасного оборудования.

Тем не менее такой подход представляется более результативным с точки зрения выявления физической сущности причин, вызывающих отклонение параметров ниже допустимых пределов, что означает отказ. Этот путь используют там, где, несмотря на специфику эксплуатации, все же возможно получить необходимые исходные данные, например, при исследовании надежности шахтных взрывобезопасных систем.

§ 2. Показатели надежности. Для оценки надежности элементов шахтных технологических систем используются вероятностные показатели надежности. При этом исходят из того, что в любой момент времени t состояние элемента или системы описывается случайным вектором

Таблица 1. Показатели надежности

Восстанавливаемые элементы		
№	Наименование показателя	Математическая запись
1	Среднее время безотказной работы	$T_{cp} = \int_0^\infty P(t)dt$
2	Среднее время восстановления	$T_{B_{cp}} = \int_0^\infty \tau\, d\nu(\tau) = \int_0^\infty G(\tau)d\tau$
3	Вероятность безотказной работы	$P(t) = Bep(T \ge t)$
4	Интенсивность отказов	$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = \frac{d\ln P(t)}{dt}$
5	Вероятность безотказной работы за время $(0,\tau)$	$\nu(\tau) = Bep(T_B < \tau)$
6	Вероятность невосстановления за время $(0,\tau)$	$G(\tau) = 1-\nu(\tau) = Bep(T_B \ge \tau)$
7	Плотность вероятностей восстановления за время τ	$\nu(\tau) = V(\tau) = -G'(\tau)$
8	Интенсивность восстановления за время τ , τ_i - τ_i – длительность восстановления i-го отказа, n - число зарегистрированных отказов	$\mu(\tau) = \frac{\nu(\tau)}{1-V(\tau)}, \quad \mu = \frac{n}{\tau_i}$

Таблица 2. Невосстанавливаемые элементы

№	Наименование показателя	Математическая запись
1	Вероятность безотказной работы	$P(t)=1-Q(t)=Bep(T\geq t)$
2	Вероятность отказа (функция распределения времени T безотказной работы)	$Q(t)=Bep(T<t)$
3	Среднее время безотказной работы	$T_{cp}=\int_0^\infty P(t)dt$
4	Плотность распределения времени безотказной работы	$f(t)=Q'(t)=-P'(t)$
5	Интенсивность отказов	$\lambda(t)=f(t)/P(t)$

$$x(t)=[x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)],$$

который может принимать всегда два значения при одномерной переменной: $x(t)=1$, если система или элемент находится в работоспособном состоянии, и $x(t)=0$ при отказе. Компоненты вектора $x(t)$ могут быть значениями различных параметров системы, способными принимать значения на всей действительной оси.

Случайный вектор $x(t)$ характеризуется распределением вероятностей $F(x_1,x_2,...,x_n,t)$, т.е. вероятностью того, что $x_1(t)\leq x_1$, …, $x_n(t)\leq x_n$.

Каждому из предельных значений, характеризующих состояние системы, соответствует математическое ожидание целевой функции $G(t)$ на отрезке времени $a\leq x\leq b$.

Надежность элементов, составляющих технологическую систему, характеризуется вероятностными показателями (табл. 1 а-б), важнейшими из которых является время безотказной работы и время восстановления. Эти параметры имеют вероятностный смысл и описываются соответствующими законами распределения.

Технологические системы относятся к восстанавливаемым системам, т.е. характеризуются периодически чередующимися промежутками исправной работы и восстановления при отказах.

В силу этого показатели надежности выбирают с таким расчетом, чтобы с их помощью можно было бы оценить надежность как отдельных элементов, так и в целом восстанавливаемой системы, состоящей из разнотипных элементов.

Показателем надежности, учитывающим время безотказной работы T_{cp} и время простоя потребителя τ_{cp}, является коэффициент готовности [1- 3]

$$K_\Gamma=\frac{T_{cp}}{T_{cp}+\tau_{cp}}$$

и коэффициент отказа

$$K_{om}=1-K_\Gamma=\frac{\tau_{cp}}{T_{cp}+\tau_{cp}}.$$

С учетом данных табл. 1 и 2, получаем

$$K_\Gamma=\frac{\int_0^\infty t\cdot f(t)dt}{\int_0^\infty tf(t)dt+\int_0^\infty \tau\, dV(\tau)},$$

$$K_{om}=\frac{\int_0^\infty \tau\cdot dV(\tau)}{\int_0^\infty tf(t)dt+\int_0^\infty \tau\, dV(\tau)},$$

т.е. оба параметра характеризуются законами распределения времени безотказной работы и времени восстановления и отражают вероятность нахождения элемента или системы в исправном состоянии или в состоянии отказа, соответственно.

Относительное время вынужденного простоя потребителя из-за отказов в системе за год

$$\overline{P}(Э)=\frac{t_{ВГ}}{T_{год}}=\frac{t_{ВГ}}{t_{ВГ}+T_{БГ}}, \qquad (1)$$

где $t_{ВГ}$ – время простоя потребителя за год; $T_{БГ}$ – время безотказной работы за год.

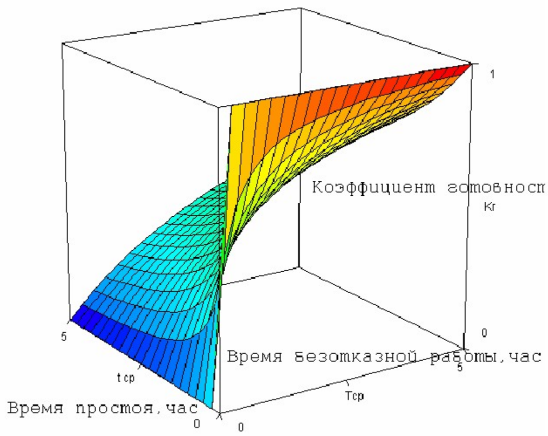

Рис. 1. Зависимость коэффициента готовности и от времени простоя и от времени безотказной работы.

Показатель $\overline{P}(Э)$ из (1) является вероятностью вынужденного (аварийного) простоя и образует с вероятностью исправного состояния полную группу событий

$$\overline{P}(Э) + P(t) = 1.$$

Эти термины более точно определяют вероятностный характер показателей надежности. Они учитывают периодичность наступления отказа и длительность простоя и представляются более удобными при использовании [4] .

Любая рассматриваемая технологическая схема может быть представлена в виде системы, составленной из ряда элементов. Если i- ый элемент системы находится в эксплуатации в течение времени $T_Э$, то эта величина составляется из чередующихся промежутков времени исправной работы t_u и времени восстановления T_B. Однако время восстановления отказа T_B не полностью отражает время простоя потребителя, а особенно забоев шахт, где всегда требуется некоторое время на организацию работ при повторном включении, например, электроэнергии или подачи воды для гидроотбойки и т.п. Эта специфика, характерная для горного производства, требует введения иного показателя, близкого времени восстановления, а именно, времени аварийного простоя t_a .

На точность результатов при расчетах на надежность существенное влияние оказывает вид закона распределения случайной величины.

Так, например, экспоненциальный закон распределения времени безотказной работы элемента или некоторой технологической системы указывает на то, что поток отказов может быть принят простейшим.

Отметим основные свойства простейшего потока отказов:

а) интенсивность отказов постоянна (λ=const) , а среднее время безотказной работы

$$T_{cp} = \frac{1}{\lambda};$$

б) плотность вероятностей промежутков времени между соседними отказами

$$f(t) = \lambda \cdot exp(-\lambda t);$$

в) вероятность получения n событий в интервале времени $[\ t\ ,\ t+\Delta t]$ находится по закону Пуассона

$$P_n = \frac{1}{n!}(\lambda t)^n \exp(-\lambda t),$$

где λt - среднее число отказов в интервале длительностью t ;

г) вероятность отсутствия отказов на интервале длительностью τ , начинающемся в произвольный момент времени, определяется по уравнению

$$P_o = \exp(-\lambda t).$$

Простейший поток отказов и восстановлений в шахтных технологических системах может быть достаточно полно охарактеризован тремя числовыми показателями надежности, которые важно получить для практического использования. Этими характеристиками являются: средняя интенсивность отказов λ_{cp} , среднее время восстановления $T_{в\ cp}$ и среднее время аварийного простоя t_{cp} . Введение двух близких параметров: среднего времени восстановления $T_{в\ cp}$ и среднего времени аварийного простоя t_{cp} связано с необходимостью разграничения времени нахождения в состоянии простоя технологической системы или отдельного элемента при появлении отказа и времени простоя потребителя.

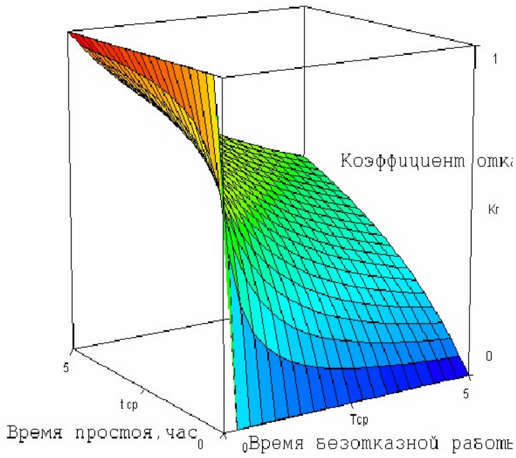

Рис.2. Коэффициент отказа как функция времени простоя и времени безотказной работы.

Вероятность аварийного простоя определяется по формуле

$$\overline{P}(Э) = \frac{t_{MO}}{t_{MO} + T_p}, \tag{2}$$

где t_{MO} – математическое ожидание времени вынужденного (аварийного) простоя,

$t_{MO} \approx t_{cp}$,

T_p - время исправной работы за время наблюдения;

$T_p + t_{MO} = T_{наб}$ – время наблюдения;

или

$$\overline{P}(Э) = \frac{nt_{cp}}{NT_{наб}} = \lambda t_{cp} = \frac{t_{cp}}{T_{cp}}, \tag{3}$$

где n - число отказавших однотипных элементов за время наблюдения $T_{наб}$;

N- число однотипных элементов, находящихся под наблюдением.

Из (3) следует, что вероятность аварийного простоя представляет величину относительного времени аварийного простоя и, следовательно, может быть использована для определения экономического ущерба, вызванного перерывами в функционировании технологической системы.

Вероятность аварийного простоя связана с вероятностью безотказной работы следующим соотношением. При экспоненциальном законе распределения времени безотказной работы

$$P(t) = \exp(-\lambda t) = \exp\left(\frac{t}{T_{cp}}\right),$$

откуда

$$\lambda = -\frac{\ln P(t)}{t}, \quad \overline{P}(Э) = \lambda t_{cp} .$$

Для технологических звеньев шахты, основное назначение которых состоит в обеспечении условий для безопасного ведения горных работ (водоснабжение, вентиляторы, водоотлив и др.) и где экономическое выражение надежности не отражает всего многообразия требований к бесперебойности водоснабжения и электроснабжения, вероятность аварийного простоя может служить критерием оценки их надежности.

Ряд шахтных систем обладает инерционностью по отношению к безопасности, то есть опасная ситуация наступает не в момент отказа, а через некоторый промежуток времени. Если τ_o − время, в течение которого после появления отказа в системе не наступает опасной ситуации, то для подготовительного забоя, например, $\tau_o < t_з$, где $t_з$ − время, в течение которого при остановке вентилятора местного проветривания (ВМП) в забое скапливается опасная концентрация метана. Или для участкового водоотведения $\tau_o < t_a$, где t_a − время, в течение которого пульпа (уголь + вода) в водосборнике достигнет аварийного уровня после прекращения работы углесосов.

Это свидетельствует, что для систем водоснабжения и электроснабжения таких объектов можно установить требуемую величину вероятности аварийного простоя из условия $\tau_o < t_{cp}$

$$\overline{P}(Б)_{TP} = \frac{\tau_o}{T_{cp.tp}}, \tag{4}$$

где $T_{cp.tp}$ − среднее требуемое время безотказной работы. Выражение (4) представляет собой вероятность безопасного простоя.

Для подготовительного забоя, например, требуемый уровень вероятности безопасного простоя можно найти, если полагать, что аварийная ситуация не должна возникнуть за время t работы подготовительного забоя. Если задана вероятность безотказной работы $P(t)$, то

$$\overline{P}(Б) = -\frac{\ln P(t)}{t}\tau_o = -\frac{\ln P(t)}{t}t_б ,$$

или

$$\overline{P}(Б) = t_б \lambda_{cp},$$

где $t_б$ − допустимое (безопасное) время простоя.

§3. Математические модели надежности. При расчетах схем водоснабжения и электроснабжения с учетом фактора надежности общий для системы показатель надежности может быть найден с помощью математических моделей, в которых необходимо учитывать способы соединения элементов и их состояния.

При водоснабжении и электроснабжении потребителей шахт применяются последовательные и параллельные соединения элементов, надежность которых возможно описать с помощью регулярных марковских процессов с конечным множеством состояний и непрерывным временем.

Определим марковский процесс следующим образом. Пусть система в момент времени t может находиться только в одном из конечного множества состояний [5]

$$A(a_0, a_1, a_2, ..., a_n).$$

Пусть $P_{ii}(\Delta t)$ вероятность того, что система за малый промежуток времени Δt остается в состоянии a_i, а $P_{ij}(\Delta t)$ вероятность того, что за время Δt она перейдет из состояния a_i, в состояние a_j. Тогда вероятность, что за время Δt не произойдет ни одного перехода из a_i,

$$P_{ii}(\Delta t) = P\{a_i \xrightarrow{\Delta t} a_i\} = 1 - b_{ii}\Delta t + o(\Delta t), \tag{5}$$

а вероятность перехода системы в состояние a_j

$$P_{ij}(\Delta t) = P\{a_i \underset{i \neq j}{\overset{\Delta t}{}} \rightarrow a_j\} = b_{ij}\Delta t + o(\Delta t), \tag{6}$$

где $1 - b_{ii}\Delta t$ − вероятность того, что за время Δt не произойдет перехода,

$b_{ij}\Delta t$ − вероятность того, что за время Δt переход произойдет;

Процесс будет регулярным однородным марковским в случае, если он отражает поведение рассматриваемой системы, то есть когда система переходит из одного дискретного состояния в другое при отказе или восстановлении. Из (5) и (6) следует, что вероятности переходов элемента или системы из исправного состояния в состояние отказа и наоборот зависит от длительности перехода, и не зависит от моментов времени, между которыми происходит переход.

Регулярные однородные марковские процессы с конечным множеством состояний описываются матрицей коэффициентов $b_{ij};\ i, j = 0,1,2,...,n,$ которые удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} b_{ij} \geq 0 \ \ при \ \ i \neq j, \\ -\infty < \sum_{j=0}^{n} b_{ij} \leq 0 \ \ при \ \ i = 0,1,2,...,n. \end{cases}$$

Для регулярного однородного марковского процесса случайные величины ϑ_i; $i = 0, 1, \ldots, n$, имеют показательную функцию распределения

$$F(t) = P(\vartheta_i < t) = 1 - \exp(-b_{ii}t),$$

а вероятности переходов P_{ii} из состояния a_i в a_j определяются как

$$P_{ij} = \begin{cases} \dfrac{b_{ij}}{b_{ii}}, \; j \neq i, \\ 0, \; j = i, \end{cases}$$

и удовлетворяют условиям

$$\sum_{j=0}^{n} P_{ij} = 1, \; i = 0,1,2,\ldots,n, \; P_{ij} \geq 0, \; 0 \leq i, \; j \leq n.$$

Стационарные вероятности удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{n} b_{ij}\pi_j = 0, \; i = 0,1,2,\ldots,n, \\ \sum_{j=0}^{n} \pi_j = 1. \end{cases}$$

Теперь перейдем к описанию функционирования систем, имеющих различные соединения элементов.

Рассмотрим одиночный элемент и переход его из исправного состояния в состояние отказа и наоборот. При экспоненциальном законе распределения времени безотказной работы и времени восстановления функционирование элемента характеризуется параметром потока отказов λ и параметром потока восстановлений μ. Размеченный граф состояний показан на рис. 3.

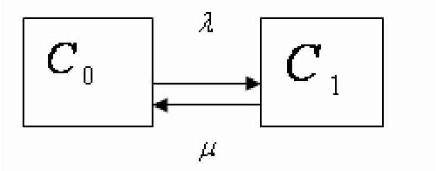

Рис.3. Размеченный граф состояний одиночного элемента.

Под воздействием потока отказов интенсивностью λ, элемент переходит из исправного состояния C_0 в состояние отказа C_1, а под действием потока восстановлений μ возвращается из состояния C_1 в состояние C_0.

Система дифференциальных уравнений для вероятностей состояний имеет вид

$$\frac{dP(Э)}{dt} = -\lambda P(Э) + \mu\overline{P}(Э),$$

$$\frac{d\overline{P}(Э)}{dt} = \lambda P(Э) - \mu\overline{P}(Э),$$

где $P(Э)$ – вероятность исправного состояния; $\overline{P}(Э)$ – вероятность вынужденного простоя.

Решение системы уравнений для времени $t=0$ при начальных условиях $P(Э)=1$ и $\overline{P}(Э) = 0$

$$P(Э) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\exp\left(-(\lambda+\mu)t\right)\right),$$

$$\overline{P}(Э) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1 - \exp\left(-(\lambda+\mu)t\right)\right),$$

где t - рассматриваемый промежуток времени.

При длительной эксплуатации $t \to \infty$ и имеет место стационарный режим работы элемента с вероятностями состояний

$$P(Э) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad \overline{P}(Э) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}. \quad (7)$$

Для стационарного режима

$$\lambda = \frac{1}{T_{ср}} = const \;, \; \mu = \frac{1}{T_B} = const \,.$$

При длительности простоя потребителя $t_{ср} = T_B$ из (7) получаем

$$\overline{P}(Э) = \frac{t_{ср}}{T_{ср} + t_{ср}} = \lambda_{ср}t_{ср},$$

т.е. то же, что и в (2) и (3).

Для системы, состоящей из n последовательно соединенных элементов, необходимо рассмотреть $(n+1)$ состояний: состояние ϑ наступает, когда все элементы исправны и обеспечивается нормальное водоснабжение и электроснабжение, и состояние i, i=1, 2,…,n, когда i-ый элемент поврежден и, следовательно, наступил отказ в системе.

Каждый элемент характеризуется потоком отказов λ_i и потоком восстановлений μ_i.

Вероятность безотказной работы системы за время Δt определяется как произведение вероятностей безотказной работы n элементов, поскольку исправные состояния элементов есть события не зависимые (на основе теоремы умножения вероятностей независимых событий). Это условие можно записать в виде

$$\left(1 - \lambda_1\Delta t\right)\left(1 - \lambda_2\Delta t\right)\cdots\left(1 - \lambda_n\Delta t\right) \approx 1 - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Delta t\,.$$

Для составления системы дифференциальных уравнений, описывающих вероятности состояний, положим, что система в течение времени t находится в исправном состоянии, и тогда

$$P_0(t+\Delta t) = (1 - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Delta t)P_0(t) + \sum_{i=1}^{n}[0]P_i(t),$$

$$P_i(t+\Delta t) = (\lambda_i\Delta t)P_0(t) + [1]P_i(t), \; i = 1,2,\ldots,n. \quad (8)$$

Преобразование Лапласа [6] для случая

$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ и начальных условий t=0 дает решение системы уравнений (8) в виде

$$P_0 = P(t) = exp(-\lambda t), \qquad (9)$$

$$P_i(t) = Q_i(t) = \frac{\lambda_i}{\lambda}\left(1 - exp\left(-\lambda t\right)\right). \qquad (10)$$

Из (9) и (10) следует два важных вывода:

1) вероятность безотказной работы системы, составленной из n элементов, подчиняется экспоненциальному закону распределения;

2) вероятность отказа какого-либо составного элемента определяется отношением его интенсивности отказов к интенсивности отказов рассматриваемой системы.

Уравнение (10) позволяет по заданной вероятности отказа найти требуемую интенсивность отказов входящего в систему элемента, если задана общая интенсивность отказов системы.

Теперь, используя аппарат марковских процессов, рассмотрим вероятность восстановления системы водоснабжения или электроснабжения.

Обозначим через $\nu(\tau)$ – вероятность восстановления; $\overline{\nu}(\tau)$ – вероятность того, что отказ не будет ликвидирован, т. е. элемент или система не будут восстановлены в течение времени τ .

Для нахождения вероятности того, что отказавший элемент не будет восстановлен в течение времени τ , необходимо выписать систему дифференциальных уравнений, связывающих вероятности состояний, а именно, - вероятность восстановления и вероятность невосстановления за время τ .

Применяя уже известные рассуждения, получим, введя приращение времени восстановления $\Delta\tau$, систему уравнений:

$$\nu_0(\tau + \Delta\tau) = [1]\nu_0(\tau) + \sum_{i=1}^{n}(\mu\Delta\tau)\nu_i(\tau), \qquad (11)$$

$$\overline{\nu}_i(\tau + \Delta\tau) = [0]\overline{\nu}_0(\tau) + (1 - \mu_i\Delta\tau)\overline{\nu}_i(\tau). \qquad (12)$$

Вероятность того, что система находится в состоянии i (отказа), во время t=0 будет $Q(0) = \frac{\lambda_i}{\lambda}$, а вероятность безотказной работы (состояние ϑ) равно нулю, поскольку было принято, что один из элементов отказал, т.е. система находится в состоянии отказа, не обеспечивая водо- или электроснабжения.

Решая для начальных условий (11) и (12), получим вероятности состояний

$$\overline{\nu}_i(\tau) = \frac{\lambda_i}{\lambda}\exp(-\mu_i\tau),$$

$$\nu_0(\tau) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda}[1 - \exp(-\mu_i\tau)],$$

а вероятность того, что система не будет восстановлена, т.е. останется в состоянии отказа за время τ, равна сумме вероятностей $\overline{\nu}_i(\tau)$ по всем i, т.е.

$$\overline{\nu}(\tau) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda}\exp(-\mu_i\tau), \qquad (13)$$

Из (13) следует важный вывод о том, что время восстановления отказавшей системы, составленной из элементов, имеющих показательное распределение времени восстановления, имеет суммированное экспоненциальное распределение.

Вероятность аварийного простоя системы, составленной из n последовательно соединенных элементов, определяем по теореме умножения независимых событий - вероятностей исправного состояния:

$$\overline{P}_0(Э) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P_i(Э) \ ,$$

или с достаточной для практических расчетов точностью при малых значениях $\overline{P}_i(Э)$

$$\overline{P}_0(Э) \approx \sum_{i=1}^{n}\overline{P}_i(Э) \ . \qquad (14)$$

Формула (14) приемлема при определении общей вероятности аварийного простоя потребителей, присоединенных к линиям электропередач с односторонним питанием, и может быть использована либо при анализе схем водоснабжения или электроснабжения по абсолютной величине показателя надежности, либо для определения величины математического ожидания убытка.

Параллельное соединение элементов при водоснабжении или электроснабжении потребителей шахт применяется для следующих целей.

1. Облегченный резерв (резервный элемент - линия электропередачи, трансформатор и т.п. находится под напряжением).

2. Ненагруженный резерв (резервный элемент отключен).

3. Резервирование m элементами n, находящимися в работе.

4. Обеспечение требуемых по техническим условиям параметров сети (по току, напряжению и др.).

При облегченном резервировании ввод резервного элемента при отказе рабочего осуществляется в следующей последовательности: отключается отказавший элемент, включается резервный. Подмножеству A (работоспособное состояние системы) соответствуют следующие положения системы:

1. a_0 – оба элемента исправны, один включен в работу, другой находится в резерве;

2. a_1 – один элемент отказал при работе, второй включен в работу из резерва;

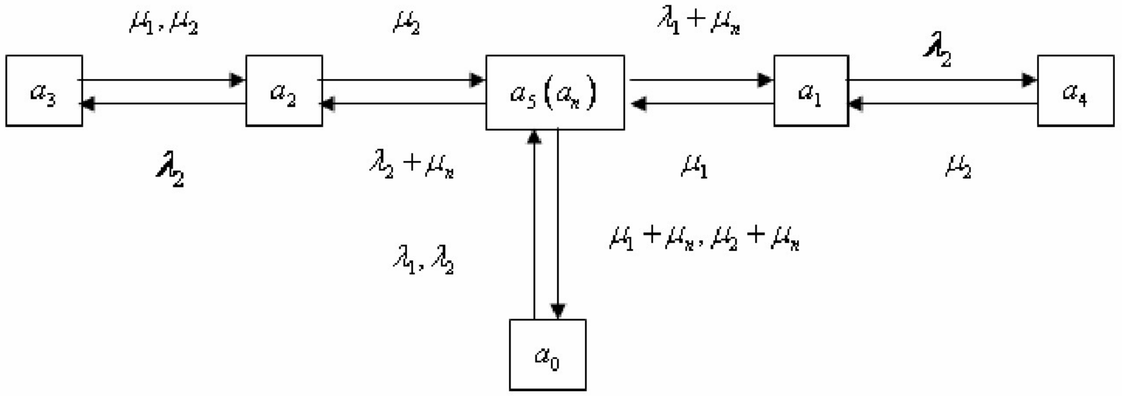

Рис. 4. Пример облегченного резервирования.
Граф переходов системы с одним рабочим и одним резервным элементами.

3. a_2 – отказал резервный элемент, а другой исправен и включен в работу;

4. a_3 – оба элемента восстанавливаются, причем один отказал, будучи включенным в работу, а второй - находясь в резерве;

5. a_4 – оба элемента восстанавливаются после отказов в работе;

6. a_5 – производится переход с рабочего элемента на резервный элемент, и наоборот.

Следовательно, состояния a_0, a_1, a_2 соответствуют рабочему состоянию системы, а a_3, a_4, a_5 – состоянию отказа.

Допустим, что время безотказной работы рабочего и резервного элементов, время их восстановления и длительность перехода с рабочего элемента на резервный элемент, и наоборот, имеют экспоненциальные распределения. Они характеризуются следующими параметрами: λ_1 и λ_2 интенсивность отказов рабочего и резервного элементов соответственно; μ_1 и μ_2 -интенсивность восстановлений; μ_n - интенсивность восстановления электроснабжения при переходе с одного элемента на другой.

Граф состояний системы с облегченным резервом показан на рис. 4. , откуда легко записываются дифференциальные уравнения состояний:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_2 P_0(t) + (\mu_1 + \mu_n)P_n(t) - \lambda_1 P_0(t) + (\mu_2 + \mu_n)P_n(t) = (\mu_1 + \mu_n)P_n(t) + (\mu_2 + \mu_n)P_n(t) - (\lambda_1 + \lambda_2)P_0(t);$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = (\lambda_1 + \mu_n)P_n(t) + \mu_2 P_4(t) - \mu_1 P_1(t) - \lambda_2 P_1(t); \qquad (15)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = (\lambda_2 + \mu_n)P_n(t) + (\mu_2 + \mu_1)P_3(t) - \mu_2 P_2(t) - \lambda_2 P_2(t);$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = \lambda_2 P_2(t) - (\mu_1 + \mu_2)P_3(t);$$

$$\frac{dP_4(t)}{dt} = \lambda_2 P_2(t) - \mu_2 P_4(t);$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \mu_1 P_1(t) + \lambda_1 P_0(t) + \lambda_2 P_0(t) + \mu_2 P_2(t) - (\mu_2 + \mu_n)P_n(t) - (\lambda_1 + \mu_n)P_n(t) - (\lambda_2 + \mu_n)P_n(t) - (\mu_1 + \mu_n)P_n(t);$$

где $P_i(t)$ - вероятности состояний,

$$P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) + P_4(t) + P_n(t) = 1.$$

При начальных условиях t=0 система (15) переходит в систему линейных уравнений.

Примем

$$\mu_1 = \mu_2, \ \ \lambda_1 \neq \lambda_2, \ \ \frac{1}{T_B} = \mu + \mu_n = \frac{1}{\tau_B} + \frac{1}{t_n},$$

и получим формулу для определения вероятности аварийного простоя резервированного узла с облегченным резервом

$$\overline{P}_{py_o}(\text{Э}) = \frac{(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1^2)T_B^2}{\lambda_1 + \lambda_2 T_B^2 + \lambda_1^2 T_B^2 + 2\lambda_1 T_B + \lambda_2 T_B + 1} = \frac{(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1^2)(t_n + \tau_B)^2}{znam},$$

где

$$znam = \lambda_1 + \lambda_2(t_n + \tau_B)^2 + \lambda_1^2(t_n + \tau_B)^2 + 2\lambda_1(t_n + \tau_B) + \lambda_2(t_n + \tau_B) + 1,$$

причем τ_B – время восстановления отказа; t_n – время перехода с одного элемента на другой.

При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $T_{B_1} = T_{B_2} = T_B$ получаем

$$\overline{P}_{py_o}(\text{Э}) = \frac{2\lambda^2 T_B^2}{2\lambda^2 T_B^2 + 3\lambda T_B + 1} = \frac{2\lambda^2(t_n + \tau_B)^2}{2\lambda^2(t_n + \tau_B)^2 + 3\lambda(t_n + \tau_B) + 1}. \qquad (16)$$

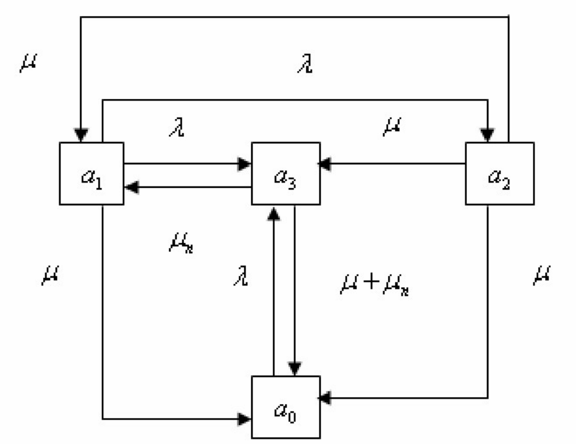

Рис. 5. Граф переходов системы с одним рабочим и одним резервным элементами.

При ненагруженном резервировании резервный элемент отключен (рис. 5.), а система имеет четыре состояния: a_0 - один элемент работает, а другой находится в резерве и отключен; a_1 - один элемент работает, а другой восстанавливается; a_2 - оба прибора находятся в состоянии отказа; a_3 - производится переключение с рабочего элемента на резервный элемент, и наоборот.

Система дифференциальных уравнений (рис. 5) будет

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_2(t) + \mu P_1(t) + (\mu + \mu_n)P_3(t) - \lambda P_0(t);$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \mu_n P_3(t) + \mu P_2(t) - (\mu + 2\lambda)P_1(t);$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda P_1(t) - 3\mu P_2(t);$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = 2\lambda(P_1(t) + P_0(t)) + \mu P_2(t) - \mu_n P_3(t) - (\mu + \mu_n)P_3(t); \qquad (17)$$

$$P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) = 1.$$

При начальных условиях: $t = 0$ и $P_0(0) = 1$,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,$$

и

$$\mu + \mu_n = \frac{1}{\tau_B} + \frac{1}{t_{пн}} = \frac{1}{T_B},$$

из системы уравнений (17) получаем вероятность аварийного простоя резервированного узла при ненагруженном резерве

$$\overline{P}_{ру_н}(Э) = \frac{\lambda^2 T_B^2}{\lambda^2 T_B^2 + \lambda T_B + 1} = \frac{\lambda^2 (t_{пн} + \tau_B)^2}{\lambda^2 (t_{пн} + \tau_B)^2 + \lambda(t_{пн} + \tau_B) + 1}. \qquad (18)$$

Сравнение моделей (16) и (18) показывает, что вероятности аварийного простоя при облегченном и ненагруженном резервировании равны в случае, если длительность перехода с рабочего на резервный элемент и наоборот, при ненагруженном резерве в два раза больше, чем при облегченном, т.е. если $t_{пн} = 2t_п$. Уменьшение времени $t_{пн}$ до $t_{пн} = t_п$ приводит к тому, что вероятность аварийного простоя $\overline{P}_{ру_н}(Э)$ становится меньше, чем при облегченном резерве.

При $t_{пн} = t_п$, $\overline{P}_{ру_н}(Э) = 0.88\overline{P}_{ру_0}(Э)$.

Отсюда следует, что путем уменьшения времени переключения $t_{пн}$ (при ненагруженном резервировании) получим заметный выигрыш в надежности узла.

С другой стороны, при облегченном резервировании упрощается ввод резервного элемента, поскольку в действии находится лишь одно переключающее устройство, а потому возможно существенное уменьшение времени перехода $t_п$.

Для практических расчетов с учетом фактора надежности в некоторых случаях возникает необходимость в использовании в качестве показателя надежности вероятности безотказной работы.

Для системы с облегченным резервом [7]

$$P_{ро}(t) = \frac{S_1 \exp(S_2 t) - S_2 \exp(S_1 t)}{S_1 - S_2},$$

где

$$S_1 = \frac{-(3\lambda + \mu) + \sqrt{\lambda^2 + 6\lambda\mu + \mu^2}}{2};$$

$$S_2 = \frac{-(3\lambda + \mu) - \sqrt{\lambda^2 + 6\lambda\mu + \mu^2}}{2}.$$

Для системы с ненагруженным резервом

$$P_{рн}(t) = \frac{S_1 \exp(S_2 t) - S_2 \exp(S_1 t)}{S_1 - S_2},$$

где

$$S_{1,2} = \frac{-(2\lambda + \mu) \pm + \sqrt{4\lambda\mu + \mu^2}}{2}.$$

При водоснабжении и электроснабжении шахт находит применение резервирование m элементами n, находящихся в работе (например, при питании, ЦПП через ствол шахты несколькими кабелями).

Примем, что система находится в исправном состоянии тогда, когда отказавших элементов не больше m и отказывает, если находится в состоянии $a_m + 1$ (рис. 6.).

В [8] - [12] приведены методы решения поставленной задачи с помощью полумарковских процессов, что в некоторой степени упрощает математическую запись по сравнению с регуляр-

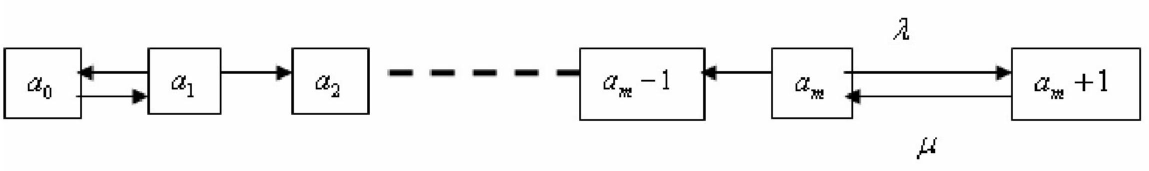

Рис. 6. Граф переходов системы, имеющей n рабочих и m резервных элементов

ным марковским процессом. В [8] показано, что коэффициент готовности (вероятность исправной работы) рассматриваемой системы

$$K_Г = P(Э) = \frac{1}{1+\frac{1-\rho}{\rho(1-\rho^{m+1})}}, \qquad (19)$$

где $\rho = \frac{\mu}{n\lambda}$ при условии, что

$$\lambda = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \cdots = \lambda_m,$$

$$\mu = \mu_1 = \cdots = \mu_n = \cdots = \mu_m.$$

.Поскольку $\overline{P}(Э) = 1 - P(Э)$, то из (19) путем несложных преобразований получаем

$$\overline{P}_{узр}(Э) = \frac{n\lambda T_B - 1}{n\lambda T_B - (n\lambda T_B)^{-(m+1)}}.$$

При использовании стволовых кабелей чаще используется один резервный для резервирования m рабочих элементов. При наличии в узле резервного элемента на m параллельно включенных элементов, и когда повреждение одного из рабочих элементов вызывает лишь исчезновение выхода после этого элемента, а у остальных m-1 элементов выходы сохраняются, то вероятность аварийного состояния на выходе одного из m элементов $\overline{P}_{op}(Э)$ определяется следующими возможностями: либо одновременным повреждением рабочего и резервного элементов, либо в момент повреждения рассматриваемого элемента произошло повреждение одного из m-1 элементов, а резерв оказался занятым (ввод резерва считаем мгновенным).

В этом случае можно использовать теорему сложения для совместимых событий и вероятность определяется по формуле

$$\overline{P}_{op}(Э) = \overline{P}(Э)P(Э) + [1 - \overline{P}^{m-1}(Э)]\overline{P}(Э) - - P(Э)\overline{P}(Э)[1 - P^{m-1}(Э)]. \qquad (20)$$

Поскольку применительно к элементам систем водоснабжения и электроснабжения подземных горных выработок величина $\overline{P}(Э)$ достаточно мала, то в выражении (20) можно пренебречь последним членом и произвести замену $[1 - P^{m-1}(Э)] \approx (m-1)\overline{P}(Э)$, после чего вероятность определяется по формуле

$$\overline{P}_{op}(Э) = m\overline{P}^2(Э).$$

Другой результат получается при резервировании, когда по техническим условиям элементы соединяются параллельно, т.е. когда выход из строя одного элемента приводит к потере выхода узла. Для узла, состоящего из m элементов и при одном резервном элементе, при вероятности аварийного состояния каждого из них $\overline{P}(Э)$, вероятность аварийного состояния на выходе будет иметь место: либо при отказе одного из элементов и резервного, либо при одновременном повреждении двух и более элементов. Поэтому, используя теорему сложения для совместимых событий и исключая ситуацию одновременного повреждения трех и более элементов как мало вероятные, получим вероятность аварийного состояния на выходе узла в рассматриваемом случае

$$\overline{P}_{op}(Э) = [1 - P^m(Э)]\overline{P}(Э) + C_m^2\overline{P}^2(Э)[1 - - \overline{P}(Э)] - P(Э)\overline{P}(Э)[1 - P^{m-1}(Э)].$$

При малых значениях $\overline{P}(Э)$ и небольшом m:

$$\overline{P}_{op}(Э) \approx [m + C_m^2]\overline{P}^2(Э),$$

C_m^2 – число сочетаний.

Выводы. 1. Для оценки надежности восстанавливаемых систем водоснабжения и электроснабжения удобным показателем является вероятность аварийного простоя, отражающая как частоту наступления отказа, так и длительность простоя.

2. Для оценки надежности водоснабжения и электроснабжения потребителей, обеспечивающих безопасное ведение горных работ, полезно использовать показатель: вероятность безопасного простоя, который учитывает как частоту наступления отказов, так и допустимую по условиям безопасности длительность простоя.

3. Приведенные выше модели позволяют определить общую вероятность вынужденного простоя или другой показатель надежности практически для любой схемы водоснабжения или электроснабжения, и на этой основе оценить ее надежность либо по абсолютной величине показателя, либо с помощью экономического выражения надежности в виде, например, математического ожидания убытка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гук Ю.Б., Рудакова Р.М.* Выбор критериев для расчета надежности схем высоковольтных подстанций. // Известия ВУЗов, Энергетика, № 4, 1969.
2. *Гук Ю.Б., Казак Н.А., Мясник А.В.* Теория и расчет надежности систем электроснабжения. -М.: Энергия, 1970.
3. *Шишонок Н.А. и др.* Основы теории надежности и эксплуатации радиоэлектронной техники. -М.: Советское радио, 1969.
4. *Муравьев В.П., Разгильдеев Г.И.* Надежность систем электроснабжения и электрооборудования подземных разработок шахт. -М.:Недра, I970.
5. *Сорокин А.С.* Преобразование Лапласа и его приложение к решению разностных уравнений. Новокузнецк, СибГГМА. 1994. – 89 С.
6. Баруча-Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их применение. –М..: Наука, 1969. 511С.
7. *Цыпкин Я.З.* Теория линейных импульсных систем. - М.: Физматгиз. 1963. -761 С.
8. *Королюк В.С., Томусяк А.А.* Описание функционирования резервированных систем посредством полумарковских процессов. //Кибернетика, вып.5, 1965.
9. *Разгильдеев Г.И.* Надежность электрооборудования и электроснабжения угольных шахт. Дис. докт. … техн. наук. Л., 1971.
10. *Сорокин А.С.* Алгоритм решения систем уравнений Колмогорова (Оценка качества системы). //Вторая Всероссийская научная конф. Проектирование инженерных и научных приложений в среде MATLAB. -М., 2004. С. 389 – 397.
11. *Сорокин А. С.* Применение полумарковских процессов к определению характеристик надежности технологических схем. // Вестн. Кузбасского гос. тех. унив., 2005. № 1. С. 3 -9.
12. *Черчлин У., Акоф Л.* Введение в исследование операций. - Киев: Наукова Думка, 1968.

 Автор статьи:

Сорокин
Андрей Семенович
- канд. физ.-мат.наук, доцент, ст.н.с.
(филиал КузГТУ в г. Новокузнецке),
тел.: 8 (3843) 725007

УДК 519.6

А.В Смольянинов

УСЛОВНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ В НЕЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ С ПОМОЩЬЮ ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ

Как правило, решение задач нелинейного программирования представляет достаточно сложную численную процедуру итерационного типа, часто с непредсказуемым результатом. В приложениях, где математические модели имеют сложную структуру, применение классических методов нереально и потому появление новых численных методов условной оптимизации или модификаций существующих представляет определенный интерес.

Ниже рассмотрен один из таких, относительно новых методов – «генетические алгоритмы» (ГА) с применением штрафных функций. В основе ГА лежит метод случайного поиска, время решения задачи априори неизвестно и во многом зависит от использованных его модификаций.

Недостатком классических эволюционных алгоритмов является отсутствие механизма учета ограничений оптимизационной задачи [2] и нами устранения этой проблемы были использованы некоторые модификации метода штрафных функций.

Как известно из курса классического численного анализа [5], основная идея методов штрафных функций состоит в преобразовании задачи минимизации функции с соответствующими ограничениями в задачу поиска минимума функции без ограничений. Для каждого ограничения определяется несколько уровней его нарушения, для каждого уровня нарушений каждого ограничения определяется коэффициент штрафа, который может выбираться в динамике в зависимости от степени нарушения ограничений (эта модификация называется методом динамических штрафов).

Нами была предложена модификация метода динамических штрафов, названная методом адаптивных штрафов. В отличие от предыдущего, в данном методе штрафные функции зависят не