

УДК 621:001.89

В.И. Курдюков, А.К. Остапчук, В.Е. Овсянников, Е.Ю. Рогов

РАЗРАБОТКА ФРАКТАЛЬНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ШЕРОХОВАТОСТИ ПОВЕРХНОСТИ

Введение. Для решения многих практических задач необходимо иметь надежную и точную модель шероховатости поверхности. К таким задачам можно отнести, например, определение действительных контактных напряжений и т.д. На сегодняшний день разработано достаточно много различных моделей шероховатости поверхности, основанных на Фурье-анализе, теории вероятности, корреляционном анализе и т.д. [1], однако недостатком всех этих моделей является то, что они не учитывают структурных свойств шероховатости. Данный факт служит причиной для поиска и разработки новых методик моделирования шероховатости.

Одним из самых перспективных направлений здесь является использование фрактальной геометрии, т.к. методы данной науки строятся именно на изучении структурных свойств объектов. На сегодняшний день во фрактальной геометрии выработаны основные подходы к построению моделей реальных объектов, однако вопросы практической реализации и оценки точности решений, предлагаемых в рамках этих подходов в литературе практически не затронуты.

Наиболее часто упоминаемым в литературе методом моделирования фрактальных объектов является метод случайных сложений (называемый иногда алгоритмом Фосса) [2,5]. Помимо указанного метода есть еще ряд методов (например, метод фильтрации Фурье [2,5]), но они используются значительно реже ввиду того, что их реализация требует большого количества вычислений по достаточно громоздким расчетным зависимостям. Что же касается самого метода случайных сложений, то в литературе по фрактальной геометрии даны лишь общие положения относительно его реализации, а точность вообще не затрагивается.

Постановка задачи. Главной задачей работы является построение фрактальной математической модели шероховатости поверхности, основанной на методе случайных сложений. Для решения данной задачи необходимо получить модель шероховатости поверхности при помощи классического метода случайных сложений, оценить точность полученной модели и, если потребуется, внести необходимые корректиры для повышения точности моделирования.

Основные результаты работы. На основании классического метода случайных сложений [2,5] нами был разработан алгоритм построения профиля шероховатости поверхности, который представлен на рис. 1.

Кратко коснемся сути выполняемых вычислений.

1. Выбираются начальные значения аргумента в долях от длины реализации, равной единице: $x_i = 0, 0.5, 1, \dots$

2. В этих точках значения функции принимаются равными нулю.

3. К значениям функции прибавляются случайные числа, выбранные из нормального распре-

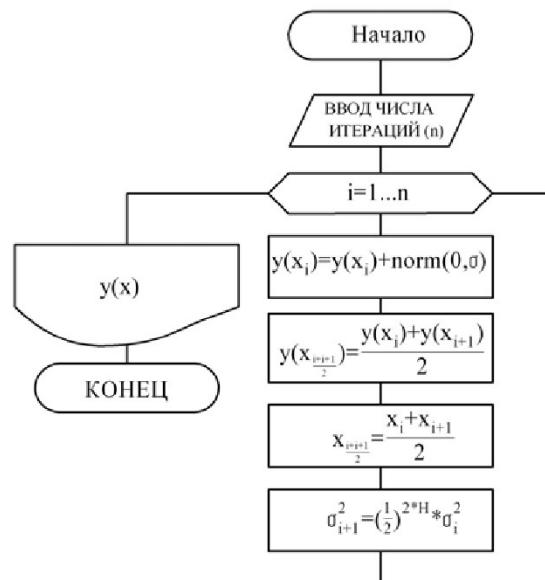


Рис. 1. Алгоритм построения кривой методом случайных сложений

деления с нулевым средним и дисперсией, которая равна дисперсии значений моделируемого объекта.

4. Производится линейная интерполяция этих значений:

$$y\left(\frac{x_{i+(i+1)}}{2}\right) = \frac{y(x_i) + y(x_{i+1})}{2}$$

5. После интерполяции исходная дисперсия σ_i уменьшается согласно зависимости:

$$\sigma_{i+1}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2H} \times \sigma_i^2 ,$$

где H – показатель Херста.

6. Выбираются новые значения аргумента усреднением предыдущих.

На основании данного алгоритма в программной среде MathCad была разработана программа «Моделирование кривой методом случайных сложений v 1.0» [3]. Пример профиля, полученного в данной программе, представлен на рис. 2.

Метод случайных сложений можно использовать и для моделирования трехмерных шерохова-

Таблица 1. Значения параметров шероховатости поверхности, полученные при помощи классического метода случайных сложений

Реальный профиль				Смоделированный профиль			
<i>R_a, мкм</i>	<i>R_z, мкм</i>	<i>R_q, мкм</i>	<i>S_m, мкм</i>	<i>R_a, мкм</i>	<i>R_z, мкм</i>	<i>R_q, мкм</i>	<i>S_m, мкм</i>
0.53	2.7	0.66	0.8	0.734	3.670	0.918	0.612
0.68	3.4	0.85	0.77	0.942	4.712	1.178	0.456
0.77	3.9	0.96	0.57	2.357	11.787	2.947	0.495
0.9	4.5	1.125	0.67	3.286	16.430	4.108	1.154
0.75	3.75	0.94	0.65	0.851	4.254	1.064	1.753
0.59	2.95	0.74	0.59	0.357	1.787	0.447	0.161
0.62	3.1	0.78	0.75	0.531	2.655	0.664	0.282
1.2	6	1.5	1.2	0.192	0.962	0.240	0.841
1.225	6.125	1.53	1.12	0.127	0.635	0.159	1.782
1.4	7	1.75	1.31	1.107	5.534	1.383	1.366

тых поверхностей. Отличие от двухмерного случая лишь в том, что интерполяция происходит в один, а в три шага.

Для моделирования фрактальных шероховатых поверхностей в программной среде MathCad была разработана программа «Моделирование трехмерной поверхности v 1.0» [4]. Пример смоделированной поверхности представлен на рис. 3.

Для того, чтобы оценить точность классического метода случайных сложений, были получены модели шероховатости поверхности с параметрами, взятыми с реальных профилограмм, а затем были сравнены параметры шероховатости смоделированных профилей и реальных. Результаты моделирования представлены в табл. 1.

Как можно видеть из табл. 1, погрешность классического метода случайных сложений достигает 70%, что неприемлемо, и метод нуждается в корректировке.

Главным затруднением при адаптации метода случайных сложений является то, что отсутствует четко выраженная расчетная зависимость, описывающая профиль. Ввиду отсутствия такой зависимости модернизация алгоритма производилась эмпирическим путем.

В результате компьютерного моделирования профилей с параметрами, взятыми с реальных профилограмм, было установлено, что в классический алгоритм метода случайных сложений необходимо внести ряд изменений, чтобы приспособить его к построению профилей шероховатости поверхности. Изменения эти следующие:

1. Выражение для σ в скорректированном ал-

горитме принимает вид:

$$\sigma_{i+1} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2H} \sigma_i} .$$

2. Введено условие корректировки дисперсии, которая используется при реализации алгоритма в зависимости от величины исходных данных:

$$\sigma_{alg}^2 = \begin{cases} \sigma_{dej}^2, \text{при } \sigma_{dej}^2 < 4 \\ 4\sigma_{dej}^2, \text{при } 4 < \sigma_{dej}^2 < 16 \\ 16\sigma_{dej}^2, \text{при } 16 < \sigma_{dej}^2 < 36 \end{cases} \quad (1)$$

3. В ходе выполнения вычислений в модифицированном алгоритме метода случайных сложений производится снижение зашумленности профиля с применением сглаживания на основе функции Гаусса [1]. Была установлена следующая зависимость ширины окна сглаживания b и от показателя Херста:

$$b = \begin{cases} 10, \text{при } H < 0.75 \\ 20, \text{при } 0.75 < H < 0.85 \\ 30, \text{при } 0.85 < H < 0.9 \end{cases} \quad (2)$$

Изменение ширины окна сглаживания объясняется тем, что форма кривой меняется с изменением показателя Херста. С его увеличением, исходный профиль становится менее зашумленным, и необходимо более сильное сглаживание. Такая зависимость не противоречит теории, т.к. приближении показателя Херста к 1 исходный про-

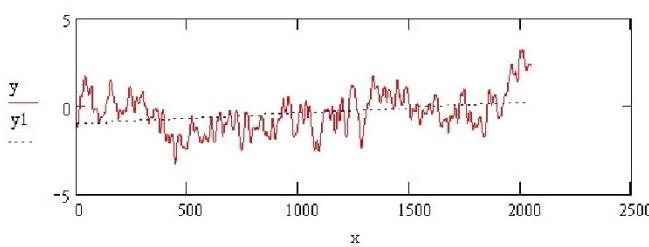


Рис. 2. Фрактальный профиль $D=1.4$

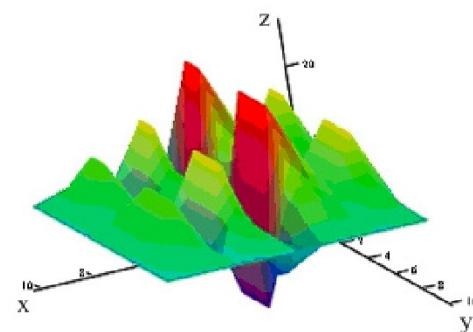


Рис. 3. Фрактальная поверхность $D_s=2.2$

Таблица 2. Значения параметров шероховатости поверхности, полученные при помощи модифицированного метода случайных сложений

Реальный профиль				Смоделированный профиль			
<i>Ra, мкм</i>	<i>Rz, мкм</i>	<i>Rq, мкм</i>	<i>Sm, мкм</i>	<i>Ra, мкм</i>	<i>Rz, мкм</i>	<i>Rq, мкм</i>	<i>Sm, мкм</i>
0.53	2.7	0.66	0.8	0.54	2.7	0.675	0.76
0.68	3.4	0.85	0.77	0.62	3.1	0.775	0.74
0.77	3.9	0.96	0.57	0.73	3.65	0.91	0.59
0.9	4.5	1.125	0.67	0.89	4.45	1.13	0.74
0.75	3.75	0.94	0.65	0.78	3.9	0.975	0.69
0.59	2.95	0.74	0.59	0.56	2.8	0.7	0.63
0.62	3.1	0.78	0.75	0.61	3.05	0.763	0.78
1.2	6	1.5	1.2	1.1	5.5	1.375	1.31
1.225	6.125	1.53	1.12	1.2	6.0	1.5	1.14
1.4	7	1.75	1.31	1.35	6.75	1.69	1.23

филь приближается к прямой линии.

4. В алгоритм был введен критерий адекватности модели. В ходе компьютерного моделирования было установлено, что при совпадении величины действительного среднеквадратического отклонения и среднеквадратического отклонения математической модели результаты получаются удовлетворительными:

$$\Delta_{\sigma} = \left| \frac{\sigma_{\text{мод}} - \sigma_{\text{дей}}}{\sigma_{\text{мод}}} \right| \times 100\% \leq 10\% \quad (3)$$

где $\sigma_{\text{мод}}$ - среднеквадратическое отклонение модели; $\sigma_{\text{дей}}$ - исходных данных.

В принципе можно увеличивать требуемую точность, но, как показывают результаты компьютерного моделирования, резко растет необходимое число итераций, а значит, снижается производительность алгоритма. Если при отклонении $\Delta_{\sigma} \leq 10\%$ среднее число обращений к алгоритму составляет 3-4, то при $\Delta_{\sigma} \leq 5\%$ это число составляет уже 15-20 и время работы значительно увеличивается, хотя точность моделирования при этом повышается, лишь на несколько процентов, поэтому оптимальным значением критерия адек-

ватности является именно значение, задаваемое выражением (3).

Результаты, полученные при помощи модифицированного метода случайных сложений представлены в табл.2.

Здесь видно, что погрешность по всем параметрам шероховатости лежит в пределах 10%, что вполне удовлетворительно для решения практических задач.

Основные выводы

1. В результате компьютерного моделирования было установлено, что классический метод случайных сложений хорошо работает только для теоретических объектов, а при моделировании реальных объектов дает большую погрешность и, следовательно, нуждается в модернизации.

2. Точность модифицированного метода случайных сложений вполне удовлетворительна для решения практических задач (погрешность модели не превышает 10%).

3. Полученный алгоритм является самооптимизирующимся по точности, нет необходимости во введении каких-либо дополнительных критериев адекватности модели. Точность моделирования регулируется лишь корректировкой величин в выражении (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Брандт З. Анализ данных. Статистические и вычислительные методы для научных работников и инженеров: Пер. с англ. – М.: Мир, ООО «Издательство АСТ», 2003. – 686 с., ил.
- Кроновер Р.М. Фракталы и Хаос в динамических системах: Основы теории, Москва. Постмаркет, 2000.-352 с.
- Остапчук А.К., Овсянников В.Е., Рогов Е.Ю. Моделирование кривой методом случайных сложений v 1.0. – М.: ВНТИЦ, 2008. - № 50200800790.
- Остапчук А.К., Овсянников В.Е., Рогов Е.Ю. Моделирование трехмерной поверхности v 1.0. – М.: ВНТИЦ, 2008. - № 50200800789.
- Федор Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991 - 261

□ Авторы статьи:

Курдюков Владимир Ильич -докт.техн.наук, проф каф. "Металлорежущие станки и инструмент" (Курган- ский гос. университет) Тел. 8-(3522) 53-33-77	Остапчук Александр Константинович -канд. техн.наук, доц. каф. "Технология машиностроения" (Курганский гос. уни- верситет) ostapchuk_ss@mail.ru	Овсянников Виктор Евгеньевич -асп. каф. "Технология машиностроения" (Кур- ганский гос. универси- тет) Тел. 8-(3522) 53-36-76	Рогов Евгений Юрьевич - асп. каф. "Технология машиностроения" (Кур- ганский гос. университет). e-mail: rogov@kgsu.ru; evro-evgen@yandex.ru
--	---	--	--