

УДК 621:001.89

В.И. Курдюков, А.К. Остапчук, В.Е. Овсянников, Е.Ю. Рогов

АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Введение. Интерес к использованию методов фрактальной геометрии сегодня возрастает с каждым днем ввиду того, что они позволяют более эффективно решать задачи, которые вызывают значительные затруднения в рамках классических методологических концепций.

Одним из центральных понятий фрактальной геометрии является фрактальная размерность, т.е. мера структурности объекта, его самоподобия. Во фрактальной геометрии четко определены значения размерности лишь для классических фракталов (ковер Серпинского, снежинка Коха и т.д.).

Для вычисления фрактальной размерности других объектов, в рамках данной науки предложен ряд методов, основными среди которых являются: покрытие объекта некими заранее определенными геометрическими метриками; определение значения фрактальной размерности при помощи функции спектра мощности и при помощи

тестового объекта для анализа было выбрано классическое броуновское движение, т.к. его фрактальная размерность четко определена теоретически [3]: $D_{бр.дв.} = 1.5$. С целью формирования массива исходных данных для последующего анализа методов определения фрактальной размерности в программной среде MatchCad 13 была разработана компьютерная программа «Моделирование броуновского движения v 1.0» [4]. В данной программе моделирование броуновского движения производилось при помощи метода срединных смещений [3]. В результате моделирования был получен массив исходных данных, графическая интерпретация которого представлена на рис. 1.

Для вычисления фрактальной размерности покрытием объекта в программной среде Borland Delphi 7.0 была разработана компьютерная программа «Определение фрактальной размерности

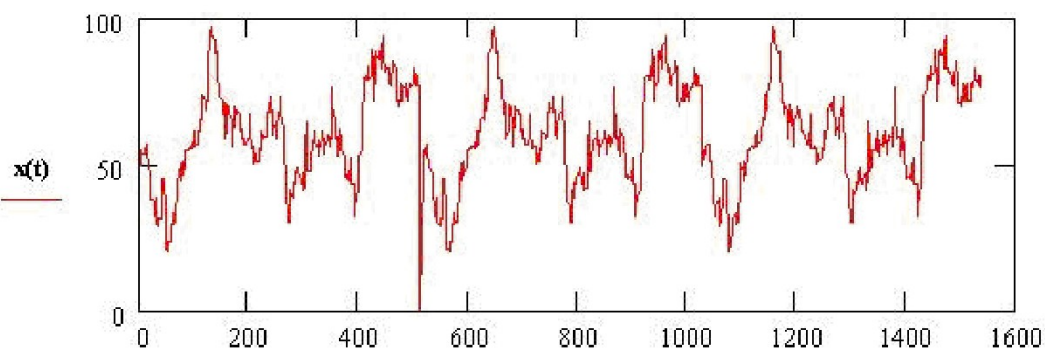


Рис. 1. График классического броуновского движения

эмпирического показателя Херста.

Однако вопросы практической реализации данных методов в литературе освещены весьма поверхностно и точность их не оценивалась.

Постановка задачи. Главной задачей данной работы является исследование основных методов определения фрактальной размерности, анализ их точности.

Для получения адекватных результатов необходимо сравнивать значения вычисленной фрактальной размерности для такого объекта, у которого они четко определены теоретически, а значит, для решения главной задачи исследования необходимо выбрать такой объект. После выбора объекта для тестирования методов необходимо определить его фрактальную размерность каждым из рассматриваемых методов (покрытием объекта, при помощи функции спектра мощности и с помощью эмпирического показателя Херста) и сравнить их точность.

Основные результаты работы. В качестве

клеточным методом v 1.0», т.к. данный метод является самым простым в реализации [5].

В качестве геометрической метрики были выбраны квадратные клетки, размер которых задается пользователем. Рекомендованный начальный размер клетки определяется выражением [3]:

$$L_{max} = R / 10, \quad R = y_{max} - y_{min}.$$

После задания размера клетки производится интерпретация исходного планарного объекта в бинарную карту высот. Процесс интерпретации представлен на рис. 2.

Затем полученная карта высот покрывается квадратными клетками и происходит расчет количества единиц в каждой из клеток $N(l)$, далее размер клетки уменьшается на единицу $l = l - 1$. Алгоритм повторяется до тех пор, пока значение размера клетки не будет равным 1. После этого значения $N(l)$ логарифмируются, и строится график $\lg(N(l)) = f(\lg(l))$.

По графику находится угол наклона путем ли-

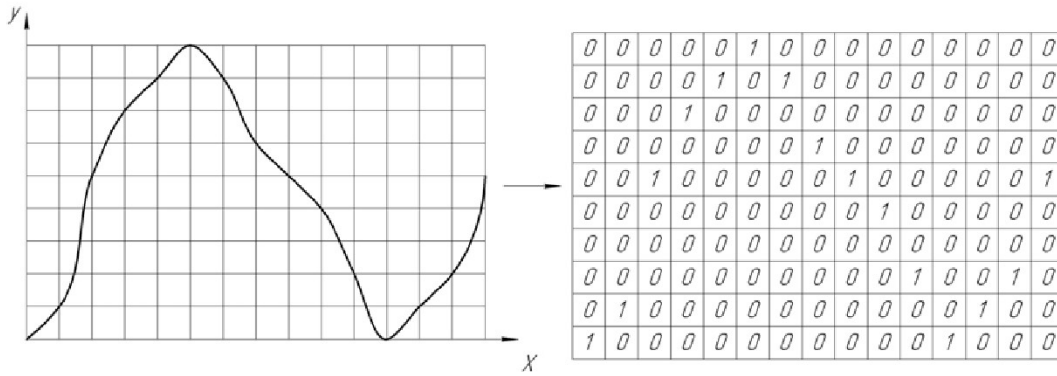


Рис. 2. Интерпретация исходных данных

нейной регрессии. Тангенс этого угла и является фрактальной размерностью.

Результат определения фрактальной размерности для броуновского движения представлен на рис. 3.

Расчет фрактальной размерности при помощи функции спектра мощности проводился в программе «Определение фрактальной размерности временного ряда при помощи функции спектра мощности v 1.0» [7]. В данной программе вычисление функции спектра мощности производится по методу Кули-Тьюки [1,2] с применением сглаживающего окна Хеннинга [1,2]. После вы-

числения значений функции спектра мощности $S(w)$ ее значения логарифмируются, и строится график $\lg(S(w)) = f(\lg(w))$. По графику находится угол наклона S путем линейной регрессии. Фрактальная размерность определялась следующим образом [3]:

$$D = \begin{cases} \frac{3+s}{2}, & \text{при } s > 0 \\ \frac{5+s}{2}, & \text{при } s < 0 \end{cases}$$

Результат определения фрактальной раз-

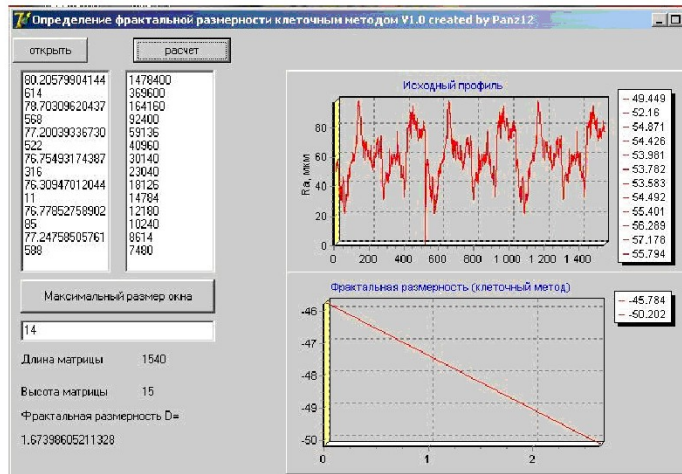


Рис. 3. Фрактальная размерность броуновского движения, вычисленная покрытием объекта $D=1.673$

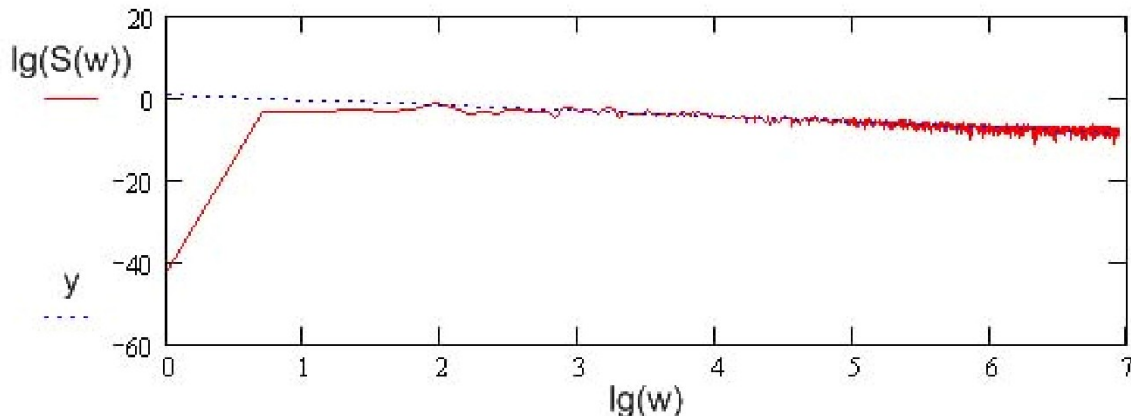


Рис. 4. Функция спектра мощности броуновского движения

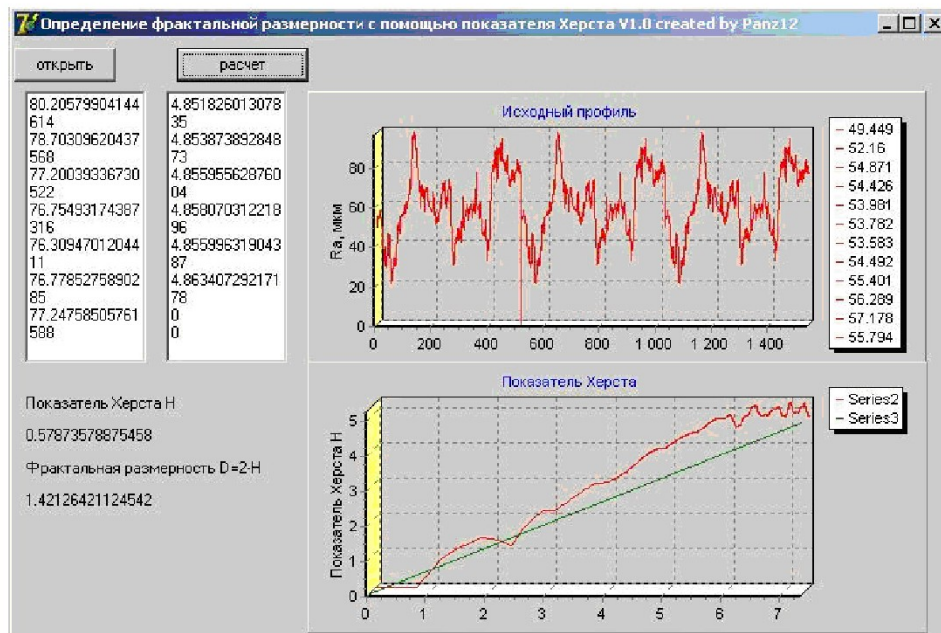


Рис. 5. Показатель Херста броуновского движения $H=0.58$
(фрактальная размерность $D=1.421$)

мерности броуновского движения представлен на рис. 4.

Фрактальная размерность:

$$D = \frac{5+s}{2} = \frac{5-1.33}{2} = 1.8$$

Вычисление фрактальной размерности при помощи показателя Херста проводилось в программе «Определение фрактальной размерности временного ряда при помощи показателя Херста v 1.0» [6]. Вычисление показателя Херста (H) в программе производится стандартным R/S - методом [3]. Значение фрактальной размерности связано с показателем Херста следующим образом:

$$D = D_T - H,$$

где D_T - евклидова (топологическая) размерность объекта, $D_T = 2$ - для плоских фигур; $D_T = 3$ - для пространственных объектов.

Результат определения фрактальной размерности для броуновского движения представлен на рис. 5.

Основные выводы по работе

1. В результате анализа полученных результатов вычисления фрактальной размерности броуновского движения (рис. 3-5) можно сделать вывод о том, что наиболее точным среди рассмотренных методов является метод, использующий показатель Херста. Точность, которую он дает ($\delta \leq 5\%$) вполне подходит для решения практических задач анализа и синтеза фрактальных объектов.

2. В ходе работы было установлено, что метод, где используется покрытие объекта очень чувствителен к начальным размерам клетки (l_{max}). При последовательном изменении l_{max} значения фрактальной размерности менялись

следующим образом:

l_{max}	D
10	1.854
13	1.8543
15	1.66

Из-за такого разброса значений искомой величины методы покрытия профиля в практике использовать весьма затруднительно, т.к. для реального объекта оптимальный начальный размер окна l_{max} подобрать очень трудно.

3. В ходе анализа литературных источников [1,2] и компьютерного моделирования было установлено, что низкая точность метода, использующего функцию спектра мощности объясняется тем, что он базируется на Фурье-анализе, а данный математический аппарат дает хорошие результаты лишь для стационарных процессов, анализируемый же процесс является нестационарным. Кроме того, данный метод подвержен влиянию целого ряда случайных факторов (таких как эффект усечения сигнала или наличие тренда в исходных данных, влияние которых нельзя исключить полностью).

4. В ходе компьютерного моделирования было установлено, что определение фрактальной размерности покрытием профиля и с помощью функции спектра мощности требует больших затрат аппаратных ресурсов, т.к. время работы программ, необходимое для вычисления фрактальной размерности было значительным. Это объясняется тем, что сами по себе эти методики достаточно сложны и требуют большого количества вычислений. Вычисление же показателя Херста производится по достаточно простым расчетным зависимостям и быстродействие работы программы несоизмеримо выше.

5. Таким образом, определение фрактальной размерности при помощи показателя Херста является наиболее предпочтительным из всех рассмотренных методов, т.к. этот метод дает

самую высокую точность и алгоритм, реализующий этот метод, является наиболее простым и производительным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брандт З.* Анализ данных. Статистические и вычислительные методы для научных работников и инженеров: Пер. с англ. – М.: Мир, ООО «Издательство АСТ», 2003. – 686 с., ил.
2. *Гайдышев И.* Анализ и обработка данных: специальный справочник. – СПб.: Питер, 2001. – 752 с. ил.
3. *Кроновер Р.М.* Фракталы и Хаос в динамических системах: Основы теории, Москва. Постмаркет, 2000.-352 с.
4. *Остапчук А.К., Овсянников В.Е., Rogov E.Yu.* Моделирование броуновского движения v 1.0. – М.: ВНИИЦ, 2008. - № 50200801851.
5. *Остапчук А.К., Овсянников В.Е., Rogov E.Yu.* Определение фрактальной размерности клеточным методом v 1.0. – М.: ВНИИЦ, 2008. - № 50200801859.
6. *Остапчук А.К., Овсянников В.Е., Rogov E.Yu.* Определение фрактальной размерности временного ряда при помощи показателя Херста v 1.0. – М.: ВНИИЦ, 2008. - № 50200801858.
7. *Остапчук А.К., Овсянников В.Е., Rogov E.Yu.* Определение фрактальной размерности временного ряда при помощи функции спектра мощности v 1.0. – М.: ВНИИЦ, 2008. - № 50200801860.

□ Авторы статьи:

Курдюков
Владимир Ильич
-докт.техн.наук, проф каф.
"Металлорежущие станки
и инструмент" (Курган-
ский государственный
университет)
Тел. 8-(3522) 53-33-77

Остапчук
Александр Константинович
-канд. техн.наук, доц. каф.
"Технология машиностро-
ения" (Курганский государст-
венный университет)
ostapchuk_ss@mail.ru

Овсянников
Виктор Евгеньевич
-асп. каф. "Технология
машиностроения" (Кур-
ганский государствен-
ный университет)
Тел. 8-(3522) 53-36-76

Рогов
Евгений Юрьевич
- асп. каф. "Технология
машиностроения" (Кур-
ганский государственный
университет) . e-mail: [evro-
evgen@yandex.ru](mailto:evro-
evgen@yandex.ru) ;
rogov@kgsu.ru