

ISSN 1999-4125 (Print)

ISSN 2949-0642 (Online)

**ТЕХНОЛОГИЯ И ОБОРУДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ
И ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ
TECHNOLOGY AND EQUIPMENT FOR MECHANICAL
AND PHYSICAL-TECHNICAL PROCESSING**

Научная статья

УДК 621.9.06-229.33.001.24

DOI: 10.26730/1999-4125-2026-1-15-25

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ШПИНДЕЛЯ
МЕТАЛЛОРЕЖУЩЕГО СТАНКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРИВЕДЕНИЯ
МАСС И КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЛИЯНИЯ**

Денисенко Александр Федорович*,
Ладыгин Роман Владимирович

Самарский государственный технический университет

* для корреспонденции: sammortor@yandex.ru

**Информация о статье**

Поступила:

15 октября 2025 г.

Одобрена после
рецензирования:

15 января 2026 г.

Принята к публикации:

12 февраля 2026 г.

Опубликована:

19 марта 2026 г.

Ключевые слова:

шпиндель станка,
собственные частоты,
коэффициенты влияния,
приведение масс, консольная
часть, упругие опоры,
конечно-элементное
моделирование

Аннотация.

В статье рассматривается задача определения собственных частот шпинделя металлорежущего станка, актуальная в связи с возрастанием вибраций при высокоскоростной обработке. Существующие подходы, такие как конечно-элементное моделирование, обладают высокой точностью, однако являются трудоемкими на этапе предварительного проектирования из-за неопределенности геометрических параметров. Целью работы является разработка адаптированных аналитических методик, позволяющих оперативно оценивать динамические характеристики шпиндельных узлов с учетом их ключевых конструктивных особенностей: асимметричности, наличия массивной консольной части и различия жесткостей передней и задней опор. В основе предлагаемого подхода лежит комбинация метода коэффициентов влияния и приведения масс, учитывающая как распределенную, так и сосредоточенную массы шпинделя. Особое внимание уделено моделированию консольной части: проведено сравнение двух схем приведения ее массы – к середине и к концу консоли. Исследуется также влияние упругости опор на собственные частоты. Верификация методики выполнена путем сопоставления расчетных результатов с данными модального анализа в среде ANSYS Workbench для реального шпинделя с различными вариантами комплектации подшипников. Установлено, что модель с приведением массы консоли к ее концу обеспечивает наилучшую точность: расхождение с конечно-элементным моделированием составляет всего 1,2–1,6%. Показано, что учет упругости опор приводит к снижению собственных частот почти вдвое по сравнению с моделью на жестких опорах. Конструктивная особенность шпинделя в виде концентрации масс на короткой консоли обуславливает близость значений первой и второй собственных частот с разницей в 6,3–13,8%. Разработанные аналитические зависимости представляют собой эффективный инструмент для инженерного анализа и динамического проектирования шпиндельных систем на ранних стадиях, обеспечивая компромисс между достаточной точностью и вычислительной простотой

Для цитирования: Денисенко А.Ф., Ладягин Р.В. Определение собственных частот шпинделя металлорежущего станка с использованием приведения масс и коэффициентов влияния // Вестник Кузбасского государственного технического университета. 2026. № 1 (173). С. 15-25. DOI: 10.26730/1999-4125-2026-1-15-25, EDN: XQDQVC

Введение

Одним из ключевых направлений современного машиностроения является внедрение высокоэффективных режимов резания, минимизация вспомогательных операций и холостых ходов, что влечет за собой рост скоростных показателей оборудования. Однако увеличение скорости обработки сопровождается усилением вибрационных явлений, что зачастую ведет к снижению виброустойчивости, связанному с возникновением резонансных явлений, когда частота источников вынужденных колебаний (вращающихся валов, зубчатых передач привода, ременных передач, подшипников качения и др.) совпадает с собственными частотами шпинделя.

Учет динамического критерия при проектировании станков является неотъемлемой частью процесса проектирования. Отсутствие результатов анализа влияния проектных параметров на динамику станка не позволяет создать систему с обеспечением прогнозируемых динамических характеристик и затрудняет мониторинг технического состояния оборудования по динамическому критерию [1-3].

При рассмотрении динамических явлений, сопровождающих работу приводов станков, можно воспользоваться богатым опытом моделирования динамических характеристик роторных систем в виде вращающихся валов, накопленным к настоящему времени как отечественными учеными [4-6], так и зарубежными исследователями [7, 8].

Вместе с тем в металлорежущих станках вращающиеся элементы вследствие конструктивных особенностей не позволяют использовать в полной мере полученные ранее результаты моделирования роторных систем, которые, как правило, рассматривались как симметричные, имеющие центр тяжести, расположенный в середине межопорного расстояния и опоры с одинаковой конструкцией и, соответственно, с одинаковыми упругими характеристиками.

Наиболее существенно это наблюдается в шпиндельном узле, который имеет следующие конструктивные особенности:

1) поскольку диаметральные размеры шпинделя имеют «пирамидальный» вид (постепенно возрастают от заднего конца шпинделя к переднему), то центр тяжести сильно смещен к передней опоре.

2) шпиндель, как правило, выполняется полым;

3) жесткостные характеристики опор имеют существенное различие вследствие конструктивного и компоновочного решения и отличия действующих радиальных нагрузок (на передней – значительно больше).

4) шпиндель имеет короткую, но достаточно массивную консольную часть.

Как показывают теоретические и экспериментальные исследования [9, 10, 11], характеристики колебательных процессов на собственных частотах шпиндельных узлов зависят от инерционных, упругих и конструктивных параметров как самих шпинделей, так и их опор.

Несмотря на большое количество исследований, посвященных динамике шпиндельных систем, в которых рассматриваются вопросы динамики при высокоскоростной обработке [12], анализируется виброустойчивость шпинделя при различных видах обработки [13], изучаются влияния вариаций предварительного натяга подшипников на динамику шпинделя [14] и др., многие аспекты остаются недостаточно изученными из-за необходимости учета значительного числа действующих факторов. Поэтому разработка методик определения собственных частот колебаний шпиндельных узлов, необходимых для динамического анализа на этапе проектирования, представляет собой важную научно-практическую задачу в современном машиностроении.

Применение конечно-элементного (КЭ) моделирования затруднительно в связи с трудоемкостью подготовки расчетной КЭ модели на стадии предварительного проектирования, когда еще не до конца определены геометрические характеристики шпинделя. Несмотря на получение в этом случае достаточно точных результатов, предпочтение следует отдать приближенным методам, использующим апробированные аналитические зависимости.

В связи с указанным разработка методик определения собственных частот шпиндельных систем является актуальной задачей, позволяющей существенно ускорить процесс проектирования с обеспечением широкой вариативности рассматриваемых конструкций.

Таким образом, цель исследования – разработка и верификация расчетных методов определения собственных частот шпиндельных систем, учитывающих конструктивные, геометрические и жесткостные параметры.

Методика проведения исследований

В большинстве случаев, особенно при применении численных методов, расчет систем с сосредоточенными параметрами оказывается более простым, чем расчет систем с распределенной массой [15]. Поэтому при составлении расчетной схемы конструкции ее распределенную массу часто заменяют некоторым количеством сосредоточенных. Однако при этом необходимо оценить влияние принимаемой расчетной модели и ее характеристик на получаемые результаты.

При моделировании динамики шпинделя возможно использование трех моделей:

- 1) рассмотрение абсолютно жесткого (недеформируемого) шпинделя на упругих опорах;
- 2) рассмотрение деформируемого шпинделя на жестких опорах;
- 3) рассмотрение деформируемого шпинделя на упругих опорах.

Влияние шпинделя как абсолютно жесткого или деформируемого вала на определение его собственных частот кардинально различается. Это связано с фундаментальными различиями в физике колебаний таких систем.

Если шпиндель считается абсолютно жестким (недеформируемым), то отсутствуют изгибные деформации и шпиндель перемещается как твердое тело, совершая колебательные поступательные или вращательные (угловые) движения (или их комбинации) за счет упругости опор.

При расчете собственных частот абсолютно жесткого шпинделя как ступенчатого недеформируемого вала его ступенчатость влияет на распределение масс и моментов инерции.

Чаще всего для расчета собственных частот многоступенчатого несимметричного недеформируемого шпинделя с консольной передней частью на двух упругих опорах разной жесткости используется матричный метод.

Для решения вычисляются матрица жесткости K и матрица масс M :

$$K = \begin{vmatrix} j_A + j_B & j_A l_A - j_B l_B \\ j_A l_A - j_B l_B & j_A l_A^2 + j_B l_B^2 \end{vmatrix}; M = \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{vmatrix},$$

где $j_A; j_B$ – жесткости опор, Н/м; $l_A; l_B$ – расстояние от центра масс до соответствующих опор, м; m – масса шпинделя, кг; J – момент инерции шпинделя относительно центра масс, кг·м².

При оценке радиальной жесткости опор шпиндельного узла на подшипниках качения следует учитывать большое число параметров, влияющих на упругие характеристики опор [16–18]: тип, материал, количество и размер тел качения; угол контакта; величину предварительного натяга; переменное

количество зон контакта, воспринимающих нагрузку; смещение зон контакта относительно неподвижного кольца; перераспределение давления в зонах контакта и т. д.

Центр масс шпинделя находится из рассмотрения его как набора цилиндрических участков диаметра d_i и использования значений масс (m_i) и координат центров масс каждого участка (x_i):

$$x_{ЦМ} = \frac{\sum(m_i x_i)}{\sum m_i}.$$

Момент инерции J определяется с учетом теоремы Штейнера:

$$J = \sum(J_i + m_i s_i^2),$$

где $s_i = |x_{ЦМ} - x_i|$ – расстояние между центром масс i -го цилиндрического участка и общим центром масс шпинделя.

Для полого шпинделя с диаметром отверстия d_0

$$J_i = m_i \left(\frac{l_i^2}{12} + \frac{d_i^2 + d_0^2}{16} \right),$$

где l_i – длина i -го цилиндрического участка.

Собственные частоты, рад/с, находятся по формуле

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}},$$

где $A = mJ$; $B = m(j_A l_A^2 + j_B l_B^2) + J(j_A + j_B)$;

$$C = (j_A + j_B)(j_A l_A^2 + j_B l_B^2) - (j_A l_A - j_B l_B)^2.$$

Собственные частоты, Гц: $f_{1,2} = 0,5\omega_{1,2}/\pi$.

Низкочастотная мода – поступательные колебания, высокочастотная – угловые.

Результат расчета является весьма приближенным, но указанный подход позволяет оценить влияние анизотропии жесткости опор на значения собственных частот [19].

Если шпиндель рассматривается деформируемым, то в этом случае при определении собственных частот участвуют изгибные колебания, и формы колебаний шпинделя (1-я, 2-я, ... гармоники) зависят от распределения масс и жесткостей.

В практике анализа колебаний валов широкое применение нашел метод, основанный на использовании коэффициентов влияния и приведения распределенных и сосредоточенных масс [15, 20], позволяющий определить две собственные частоты. Однако адаптация указанного метода для проектирования ШУ имеет весьма ограниченное упоминание, например, в работах [21, 22], в которых отсутствует общая методика определения коэффициентов влияния и приведения масс.

Под коэффициентом влияния \square_{ij} понимается перемещение в точке i от единичной силы, приложенной в точке j . При этом в соответствии с теоремой Максвелла $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Знание коэффициентов влияния позволяет привести любую сосредоточенную массу системы к какой-либо точке системы по следующему правилу: масса m_k умножается на

квадрат отношения ее перемещения от единичной силы к перемещению точки приведения [15], то есть

$$m_{прив,i} = m_k \cdot \left(\frac{\delta_{ik}}{\delta_{ii}} \right)^2,$$

где δ_{ii} – прогиб в точке i (точка приведения) от единичной силы в ней;

δ_{ik} – прогиб в точке i от единичной силы в точке k (место расположения массы m_k).

Вопрос по выбору точек приведения в имеющихся источниках однозначно решается только относительно межопорной части шпинделя: точка приведения выбирается в середине пролета. На консольной части точка приведения выбирается посередине длины консоли или (при наличии массивных элементов шпинделя, необходимых для крепления приспособлений (патрона, борштанги и т. д.)) на конце консоли.

Поскольку отсутствуют четкие рекомендации по выбору точки приведения на консольной части, то необходимо рассмотреть оба случая для оценки влияния выбора точки приведения на консольной части на собственную частоту шпинделя.

Предварительно рассмотрим коэффициенты приведения для моделирования шпинделя на жестких опорах.

Рассмотрим расчетную модель собственных частот колебаний шпинделя для следующего общего случая: шпиндель приводится к двухопорной балке с наружным диаметром D , выбираемым по минимальному значению диаметра ступени, и диаметром отверстия d с пролетом длиной l и одной консолью длиной a (передний конец шпинделя). Масса балки между опорами m_1 сосредоточена посередине пролета, а масса консольной части m_2 сосредоточена посередине консоли или на ее конце (Рис. 1). В качестве сосредоточенных масс могут выступать не только расположенные на шпинделе зубчатые колеса, внутренние кольца подшипников, приспособления для закрепления заготовки или инструмента, но и геометрические особенности в виде участков при изменении наружного диаметра шпинделя. В последнем случае сосредоточенной массой будет масса кольца с наружным диаметром D_i ($D_i > D$), виртуально смонтированного на балке диаметром D .

Рассмотрим случай, когда на шпинделе имеется несколько сосредоточенных масс, например, две сосредоточенные массы m_{011} и m_{012} на расстоянии соответственно l_{01} и l_{02} от опоры, разделяющей пролетную и консольную части, и три сосредоточенные массы m_{021} , m_{022} и m_{03} на консоли, расположенные соответственно на расстояниях L_{01} , L_{02} и L_{03} от опоры (Рис. 1).

Распределение масс (начало отсчета координат x – левая опора A):

1) Пролетная часть ($0 < x < l$):

- сосредоточенная масса m_1 (эквивалент распределенной массы балки) в середине пролета ($x_1 = l/2$);

- две дополнительные массы m_{011} и m_{012} с координатами $x_{01} = l - l_{01}$ и $x_{02} = l - l_{02}$ соответственно;

2) Консольная часть ($l < x < l + a$):

- сосредоточенная масса m_2 (эквивалент распределенной массы консоли) в середине консоли ($x_2 = l + a/2$) или на конце консоли ($x_2 = l + a$);

- три дополнительные массы m_{021} , m_{022} и m_{03} с координатами $x_{021} = l + L_{01}$; $x_{022} = l + L_{02}$ и $x_{023} = l + L_{03}$.

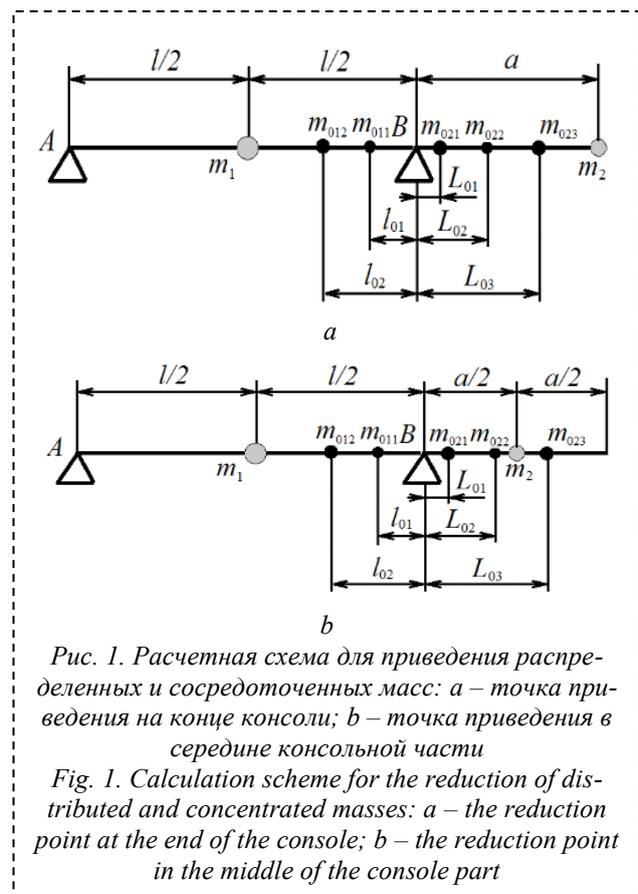


Рис. 1. Расчетная схема для приведения распределенных и сосредоточенных масс: а – точка приведения на конце консоли; б – точка приведения в середине консольной части

Fig. 1. Calculation scheme for the reduction of distributed and concentrated masses: a – the reduction point at the end of the console; b – the reduction point in the middle of the console part

Найдем коэффициенты влияния $\square_{x,\xi}$ (прогиб в точке x от единичной силы в точке ξ) для сосредоточенных масс (m_1 и m_2) расчетной модели Рис. 1, а. В качестве точек приложения силы рассматриваются точки $\xi = 0,5l$; $\xi = l + a$, а точек наблюдения прогиба – точки $x = 0,5l$ и $x = l + a$ (начало отсчета координат x и ξ – левая опора (опора A). В связи с этим возможны следующие случаи.

Случай 1: $\xi = 0,5l$; $x = 0,5l$:

$$\delta_{x,\xi} = \delta_{11} = \frac{l^3}{48EI}.$$

Случай 2: $\xi = 0,5l$; $x = l + a$:

$$\delta_{x,\xi} = \delta_{21} = \frac{al^2}{16EI}.$$

Случай 3: $\xi = l + a$; $x = 0,5l$:

$$\delta_{x,\xi} = \delta_{12} = \frac{al^2}{16EI}.$$

Случай 4: $\xi = l + a; x = l + a$:

$$\delta_{x,\xi} = \delta_{22} = \frac{a^2(l+a)}{3EI}.$$

Определим коэффициенты влияния для дополнительных сосредоточенных масс в межопорной части (m_{011} и m_{012}).

Случай 1: $\xi = l - l_{0k}$, где $k=1; 2; x = 0,5l$:

$$\delta_{1101k} = \frac{l_{0k}(3l^2 - 4l_{0k}^2)}{48EI}.$$

Случай 2: $\xi = l - l_{0k}$, где $k=1; 2; x = 0,5l + a$:

$$\delta_{2101k} = \frac{(l-l_{0k})(2l-l_{0k})l_{0k}a}{6EI}.$$

Определим коэффициенты влияния для дополнительных сосредоточенных масс на консольной части (m_{021} ; m_{022} и m_{023}).

Случай 1: $\xi = l + L_{0k}$, где $k=1; 2; 3; x = 0,5l$:

$$\delta_{1202k} = \frac{L_{0k}l^2}{16EI}.$$

Случай 2: $\xi = l + L_{0k}$, где $k=1; 2; 3; x = l + a$:

$$\delta_{2202k} = \frac{L_{0k}}{3EI} \left[L_{0k}(l + L_{0k}) + \frac{(3L_{0k}+2l)(a-L_{0k})}{2} \right].$$

Для расчетной модели Рис. 1, **b** при определении коэффициентов влияния для сосредоточенных масс m_1 и m_2 в качестве точек приложения силы рассматриваются точки $\xi = 0,5l$; $\xi = l + 0,5a$, а точек наблюдения прогиба – точки $x = 0,5l$ и $x = l + 0,5a$. Возможны следующие случаи.

Случай 1: $\xi = 0,5l; x = 0,5l$:

$$\delta_{x,\xi} = \delta_{11} = \frac{l^3}{48EI}.$$

Случай 2: $\xi = 0,5l; x = l + 0,5a$:

$$\delta_{x,\xi} = \delta_{21} = \frac{al^2}{32EI}.$$

Случай 3: $\xi = l + 0,5a; x = 0,5l$:

$$\delta_{x,\xi} = \delta_{12} = \frac{al^2}{32EI}.$$

Случай 4: $\xi = l + 0,5a; x = l + 0,5a$:

$$\delta_{x,\xi} = \delta_{22} = \frac{a^2(2l+a)}{24EI}.$$

Рассмотрим коэффициенты влияния для дополнительных сосредоточенных масс в межопорной части (m_{011} и m_{012}).

Случай 1: $\xi = l - l_{0k}$, где $k=1; 2; x = 0,5l$:

$$\delta_{1101k} = \frac{l_{0k}(3l^2 - 4l_{0k}^2)}{48EI}.$$

Случай 2: $\xi = l - l_{0k}$, где $k=1; 2; x = l + 0,5a$:

$$\delta_{2101k} = \frac{(l-l_{0k})(2l-l_{0k})l_{0k}a}{12EI}.$$

Рассмотрим коэффициенты влияния для дополнительных сосредоточенных масс на консольной части (m_{021} ; m_{022} и m_{023}).

Случай 1: $\xi = l + L_{0k}$, где $k=1; 2; 3; x = 0,5l$:

$$\delta_{1202k} = \frac{L_{0k}l^2}{16EI}.$$

Случай 2: $\xi = l + L_{0k}$, где $k=1; 2; 3; x = l + 0,5a$:

$$\delta_{2202k} = \frac{L_{0k}}{3EI} \left[L_{0k}(l + L_{0k}) + \frac{(3L_{0k}+2l)(0,5a-L_{0k})}{2} \right].$$

Для каждой формы колебаний вычисляется приведенная масса.

Первая форма колебаний (изгиб пролета):

- точка приведения – середина пролета ($x = l/2$).

- приведенная масса:

$$m_{прив,1} = m_1 + \sum_{k=1}^2 m_{01k} \left(\frac{\delta_{1101k}}{\delta_{11}} \right)^2 + m_2 \left(\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} \right)^2 + \sum_{k=1}^3 m_{02k} \left(\frac{\delta_{1202k}}{\delta_{11}} \right)^2.$$

- собственная частота: $f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{m_{прив,1} \delta_{11}}}$.

Вторая форма колебаний (изгиб консоли):

- точка приведения – середина ($x = l + 0,5a$) или конец консоли ($x = l + a$).

- приведенная масса:

$$m_{прив,2} = m_2 + \sum_{k=1}^2 m_{01k} \left(\frac{\delta_{2101k}}{\delta_{22}} \right)^2 + m_1 \left(\frac{\delta_{21}}{\delta_{22}} \right)^2 + \sum_{k=1}^3 m_{02k} \left(\frac{\delta_{2202k}}{\delta_{22}} \right)^2.$$

- собственная частота: $f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{m_{прив,2} \delta_{22}}}$.

При учете упругости опор (жесткость левой (задней) опоры – j_A , Н/м, и жесткость правой (передней) опоры – j_B , Н/м) необходимо ввести поправку на податливость опор в расчет коэффициентов влияния.

Поправка может быть найдена из условия, что коэффициент влияния определяется как сумма двух слагаемых, вычисляемых для деформируемого вала на жестких опорах $\delta_{x,\xi}$, и для жесткого вала, установленного на упругих опорах $\delta_{опор,x,\xi}$: $\delta_{x,\xi}^{ynp} = \delta_{x,\xi} + \delta_{опор,x,\xi}$.

Коэффициенты влияния для распределенных масс, приведенных к сосредоточенным (в середине пролета и на конце консоли):

$$\delta_{опор,11} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{j_A} + \frac{1}{j_B} \right); \delta_{11}^{ynp} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{j_A} + \frac{1}{j_B} + \frac{l^3}{12EI} \right);$$

$$\delta_{опор,12} = \delta_{опор,21} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{j_B} - \frac{a}{l} \left(\frac{1}{j_A} - \frac{1}{j_B} \right) \right]; \delta_{12}^{ynp} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{l} \left(\frac{a}{j_A} + \frac{l+a}{j_B} \right) + \frac{al^2}{8EI} \right]; \delta_{21}^{ynp} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{l} \left(\frac{l+a}{j_B} - \frac{a}{j_A} \right) - \frac{al^2}{8EI} \right];$$

$$\delta_{опор,22} = \frac{1}{l} \left[\frac{a^2}{j_A l} + \frac{a(l+a)}{j_B l} + \frac{l+a}{j_B} \right]; \delta_{22}^{ynp} = \frac{a^2}{j_A l^2} + \frac{a(l+a)}{j_B l^2} + \frac{l+a}{j_B l} + \frac{a^2(l+a)}{3EI}.$$

Коэффициенты влияния $\delta'_{опор,x,\xi}$ для дополнительных масс в межопорной части (m_{011} и m_{012}) (точки приведения в середине пролета и на конце консоли):

$$\delta'_{опор,11} = \frac{\delta_B l + (l_k - a)(\delta_A - \delta_B)}{l - a(\delta_A - \delta_B)}; \delta'_{опор,21} = \frac{\delta_B \left[1 - \frac{a(\delta_A - \delta_B)}{\delta_B l - a(\delta_A - \delta_B)} \right]}{\delta_B l - a(\delta_A - \delta_B)},$$

где $\delta_A = \frac{1}{2j_A}; \delta_B = \frac{1}{2j_B};$

$k=01$ – для массы m_{011} ; $k=02$ – для массы m_{012} .

Коэффициенты влияния $\delta''_{опор,x,\xi}$ для дополнительных масс на консольной части (m_{021} ; m_{022} и m_{023}) (точки приведения в середине пролета и на конце консоли):

$$\delta''_{опор,12} = \frac{\delta_B - \delta_A}{2}; \delta''_{опор,22} = \delta_B + \frac{a(\delta_A + \delta_B)}{l},$$

где $\delta_A = \frac{a}{j_A l}$; $\delta_B = \frac{l+a}{j_B l}$.

Коэффициенты влияния для распределенных масс, приведенных к сосредоточенным (в середине пролета и в середине консоли):

$$\delta_{опор,11} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{j_A} + \frac{1}{j_B} \right); \delta_{11}^{ynp} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{j_A} + \frac{1}{j_B} + \frac{l^3}{12EI} \right);$$

$$\delta_{опор,12} = \delta_{опор,21} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{j_B} - \frac{0,5a}{l} \left(\frac{1}{j_A} - \frac{1}{j_B} \right) \right]; \delta_{12}^{ynp} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{l} \left(\frac{0,5a}{j_A} + \frac{l+0,5a}{j_B} \right) + \frac{0,5al^2}{8EI} \right];$$

$$\delta_{21}^{ynp} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{l} \left(\frac{l+0,5a}{j_B} - \frac{0,5a}{j_A} \right) - \frac{0,5al^2}{8EI} \right];$$

$$\delta_{опор,22} = \frac{1}{l} \left[\frac{0,25a^2}{j_A l} + \frac{0,5a(l+0,5a)}{j_B l} + \frac{l+0,5a}{j_B} \right];$$

$$\delta_{22}^{ynp} = \frac{0,25a^2}{j_A l^2} + \frac{0,5a(l+0,5a)}{j_B l^2} + \frac{l+0,5a}{j_B l} + \frac{0,25a^2(l+0,5a)}{3EI}$$

Коэффициенты влияния $\delta_{опор,x,\zeta}$ для дополнительных масс в межопорной части (m_{011}

и m_{012}) (точки приведения в середине пролета и в середине консоли):

$$\delta'_{опор,11} = \frac{\delta_B l + (l_k - 0,5a)(\delta_A - \delta_B)}{l - 0,5a(\delta_A - \delta_B)}; \delta'_{опор,21} = \delta_B \left[1 - \frac{0,5a(\delta_A - \delta_B)}{\delta_B l - 0,5a(\delta_A - \delta_B)} \right],$$

где $\delta_A = \frac{1}{2j_A}$; $\delta_B = \frac{1}{2j_B}$;

$k = 0$ – для массы m_{011} ; $k = 02$ – для массы m_{012} .

Коэффициенты влияния $\delta_{опор,x,\zeta}$ для дополнительных масс на консольной части (m_{021} ; m_{022} и m_{023}) (точки приведения в середине пролета и в середине консоли):

$$\delta'_{опор,12} = \frac{\delta_B - \delta_A}{2};$$

$$\delta''_{опор,22} = \delta_B + \frac{0,5a(\delta_A + \delta_B)}{l};$$

где $\delta_A = \frac{0,5a}{j_A l}$; $\delta_B = \frac{l+0,5a}{j_B l}$.

Формулы расчета приведенных масс сохраняют вид, но с учетом модифицированных

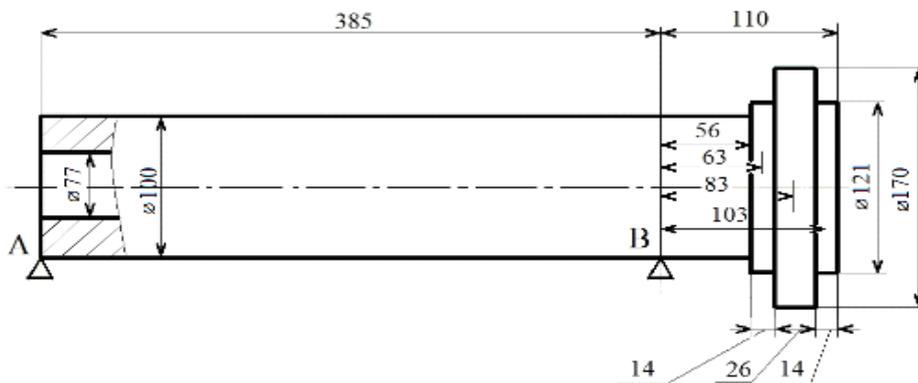


Рис. 2. Эскиз шпинделя
Fig. 2. Sketch of the spindle

Таблица 1. Собственные частоты шпинделя на жестких опорах

Table 1. Natural frequencies of the spindle on rigid supports

Расчетная схема	f_1 , Гц	f_2 , Гц
	1009	1048
	1073	1216

Таблица 2. Собственные частоты шпинделя на упругих опорах

Table 2. Natural frequencies of the spindle on elastic supports

Компоновка опор	Расчетная схема	f_1 , Гц	f_2 , Гц
		574,7	629,3
		612,6	697,3
		549,8	584,3
		586,6	638,8

Таблица 3. Собственные частоты шпинделя, полученные при модельном анализе методом конечных элементов
 Table 3. Spindle natural frequencies obtained from finite element model analysis

Расчетная схема	Компоновка опор	f_1 , Гц	f_2 , Гц
Жесткие опоры		1368,4	2222,2
Упругие опоры		581,81	619,38
		531,82	619,27

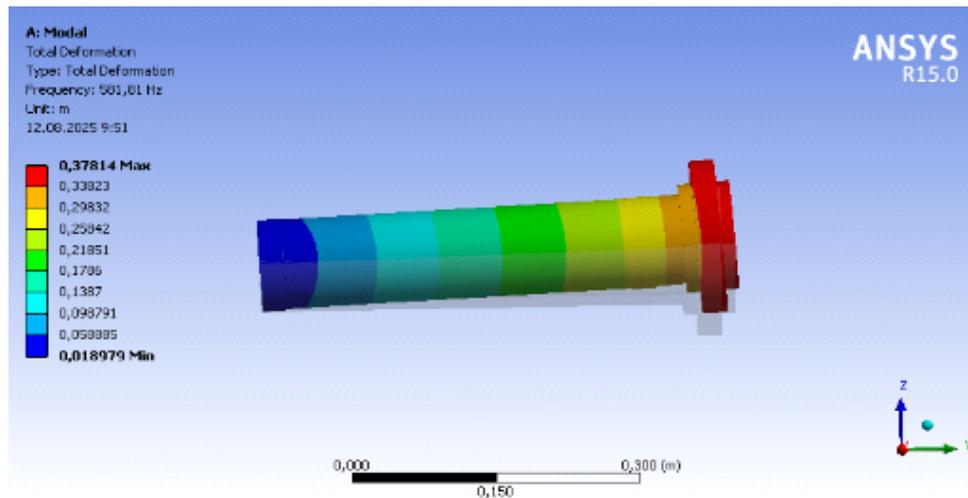


Рис. 3. Форма колебаний шпинделя с 4 подшипниками в передней опоре на частоте 581,81 Гц
 Fig. 3. The vibration form of the spindle with 4 bearings in the front support at a frequency of 581.81 Hz

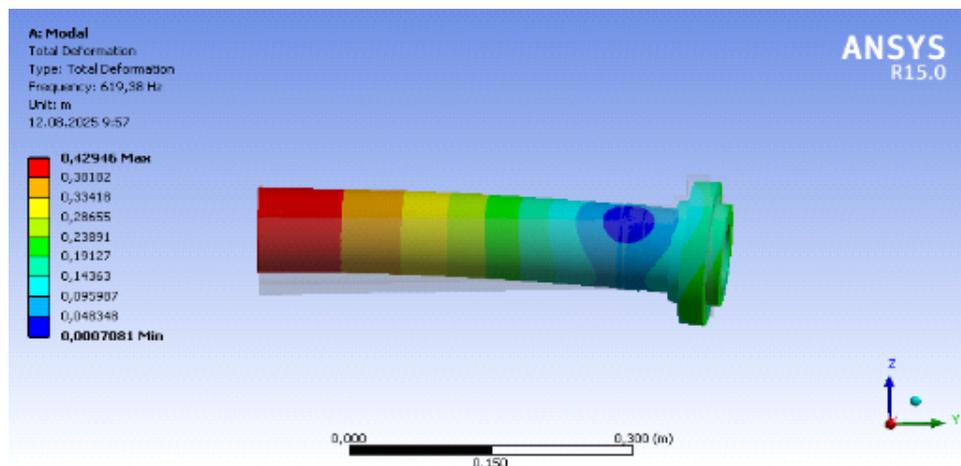


Рис. 4. Форма колебаний шпинделя с 4 подшипниками в передней опоре на частоте 619,38 Гц
 Fig. 4. The vibration shape of the spindle with 4 bearings in the front support at a frequency of 619.38 Hz

коэффициентов влияния: $m_{прив,i}^{ynp} = m_k \cdot \left(\frac{\delta_{ik}^{ynp}}{\delta_{ii}^{ynp}}\right)^2$.

Частоты рассчитываются по стандартной формуле, но с новыми коэффициентами:

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{m_{прив,i}^{ynp} \delta_{ii}^{ynp}}}$$

Результаты исследований

Апробация приведенных выше методик осуществлялась для шпинделя, показанного на рис. 2. Опоры шпинделя комплектовались радиально-упорными подшипниками.

Поскольку в соответствии с зависимостями, приведенными в [23], радиальная жесткость подшипника нелинейно зависит от нагрузки, то она определялась только от действия веса

шпинделя при его работе на холостом ходу (без учета сил резания). Жесткость задней опоры (дуплекс радиально-упорных подшипников) составляла $j_A=90,9 \cdot 10^6$ Н/м. Для передней опоры рассматривалось два варианта комплектации опоры: 3 и 4 радиально-упорных подшипника. Соответственно, жесткость опор составляла $j_{B3}=192,3 \cdot 10^6$ Н/м и $j_{B4}=222,2 \cdot 10^6$ Н/м.

Результаты расчета по приведенным выше зависимостям приведены в Таблицах 1 и 2.

Обсуждение результатов

Сравнение данных Таблиц 1 и 2 показывает, что учет упругости опор снижает собственные частоты почти в 2 раза.

Особенности конструкции шпинделя (сосредоточение значительных масс на конце короткой консольной части) приводит к тому, что первая и вторая собственные частоты отличаются только на 6,3...13,8% (в зависимости от компоновки передней опоры и расчетной схемы). При этом отличие первой и второй частот снижается с уменьшением жесткости передней опоры. Разница в значениях первой и второй собственных частот более существенна для расчетной схемы с точкой приведения в середине консольной части.

Уменьшение радиальной жесткости передней опоры за счет уменьшения числа подшипников в опоре с 4-х до 3-х приводит к снижению собственных частот: для расчетной схемы с точкой приведения на конце консоли частоты f_1 на 4,3% и частоты f_2 на 7,1%, а для расчетной схемы с точкой приведения в середине консоли, соответственно, на 4,2% и 8,4%.

Верификация расчетных собственных частот проводилась путем их сравнения со значениями, полученными при модальном анализе методом конечных элементов (МКЭ) в среде ANSYS Workbench, результатами которого были собственные частоты и формы колебаний шпинделя (Табл. 3 и Рис. 3, 4).

Упругость опор задавалась указанием объемной жесткости (Elastic Support): для задней опоры – $18425 \cdot 10^6$ Н/м³, для передней опоры из четырех подшипников – $44413 \cdot 10^6$ Н/м³, из трех подшипников – $36666 \cdot 10^6$ Н/м³. Жесткие опоры обеспечивались увеличением объемной жесткости в 10^6 раз.

Численное моделирование МКЭ шпинделя на жестких опорах показало существенное превышение полученных собственных частот над расчетными: для частоты f_1 примерно на 30%, а для частоты f_2 – почти в два раза.

Сравнение значений, приведенных в Таблице 3, со значениями, полученными по аналитическим зависимостям, показало, что при выборе схем приведения сосредоточенных масс предпочтение следует отдать схеме с сосредоточенной массой на конце консоли. В этом случае отличия значений собственных

частот, полученных расчетом и численным моделированием, для частоты f_1 составляют 1,2%, а для частоты f_2 – 1,6%.

Основные результаты и выводы

В результате проведенных исследований получены аналитические зависимости, базирующиеся на использовании метода коэффициентов влияния и приведения масс, адаптированного под специфику шпиндельного узла. Замена распределенной массы шпинделя сосредоточенными массами на пролетной и консольной частях позволяет определить две собственные частоты шпинделя. Адекватность полученных зависимостей подтверждена результатами верификации расчетных значений с полученными методом конечных элементов (МКЭ), которые показали, что модель с приведением массы консоли к ее концу обеспечивает наилучшую точность: расхождение с МКЭ составило всего 1,2% для первой частоты и 1,6% для второй. Конструктивные особенности шпинделя, включая концентрацию масс на короткой консоли, приводят к малой разнице между первой и второй собственными частотами (6,3–13,8% в зависимости от расчетной схемы и жесткости опор). Полученные аналитические зависимости подтвердили необходимость учета не только деформируемости тела шпинделя, но и его опор, поскольку учет упругости опор снижает собственные частоты шпинделя почти в 2 раза по сравнению с моделью на жестких опорах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голикова В. В., Александров А. С., Васильков Д. В. Критерий виброустойчивости при оценке динамического качества и предельных возможностей металлорежущих станков // Металлообработка. 2024. № 3(141). С. 28–37.
2. Гвинджилия В. Е., Фоминов Е. В., Моисеев Д. В., Гамалева Е. И. Влияние динамических характеристик процесса резания на шероховатость поверхности детали при токарной обработке // Обработка металлов (технология, оборудование, инструменты). 2024. Т. 26. № 2. С. 143–157.
3. Емельянова И. В. Повышение динамического качества станков с ЧПУ // Евразийский Союз Ученых. Серия: технические и физико-математические науки. 2023. № 11(114). С. 24–28.
4. Миронов Д. А., Сальников А. Ф. Анализ исследований динамического поведения роторных систем в процессе эксплуатации (обзор) // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника. 2023. № 73. С. 41–51.
5. Балабанов В. И., Куйчиев О. Р. Анализ динамики и устойчивости роторных систем в условиях высокоскоростного вращения // Экономика и социум. 2025. № 1-1 (128). С. 386–389.
6. Царенко С. Н., Голованев Е. А. Исследование

параметрических колебаний жесткого ротора на упругих опорах // Вестник Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. 2024. № 3 (167). С. 26–31.

7. Hong S., Kang J., Shin Y. Dynamic Analysis of Rotor Systems with Angular Contact Ball Bearings Subject to Axial and Radial Loads // Int. J. of the Korean Society of Precision Engineering. 2002. Vol. 3. № 2. Pp. 61–71.

8. Lee D., Choi D. A dynamic analysis of a flexible rotor in ball bearings with nonlinear stiffness characteristics // International Journal of Rotating Machinery. 1997. Vol. 3. Pp. 73–80.

9. Брунгардт А. В., Щепин А. Н., Брунгардт М. В., Брюховецкая Е. В. Оценка динамического качества шпинделя // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2024. № 7 (772). С. 29–39.

10. Хомяков В. С., Кочинев Н. А., Сабиров Ф. С. Моделирование и расчет динамических характеристик шпиндельных узлов // Вестник УГАТУ. 2007. № 2(31). С. 69–75.

11. Бойко И. А. Разработка математической модели и модальный анализ шпиндельного узла высокоскоростного обрабатывающего центра // Вестник ГТТУ им. П.О. Сухого. 2016. № 4. С. 13–20.

12. Liu Y., Zhang J., Wang S., Liu X. Dynamic modeling and vibration analysis of a motorized spindle system with coupled thermo-mechanical effects under high-speed operation // Journal of Manufacturing Processes. 2023. Vol. 101. Pp. 1283–1296.

13. Denkena B., Bergmann B., Witt M. Model-based prediction of spindle dynamics for stability analysis in milling // Production Engineering. 2021. Vol. 15(1). Pp. 117–127.

14. Rantatalo M., Aidanpää J. O., Schmidt C. Experimental and numerical investigation of the effects of bearing preload variations on spindle dynamics //

Machining Science and Technology. 2022. Vol. 26(1-2). Pp. 1–22.

15. Бидерман В. Л. Прикладная теория механических колебаний. М. : Высш. школа, 1972. 416 с.

16. Bourdon A., Rigal J., Play D. Static rolling bearing models in a cad. environment for the study of complex mechanisms: Part I: Rolling bearing model // Journal of Tribology. 1999. Vol. 12. Pp. 205–214.

17. Guo Y., Parker R. Stiffness matrix calculation of rolling element bearings using a finite element/contact mechanics model // Mechanism and Machine Theory. 2012. Vol. 51. Pp. 32–45.

18. Lazarus B., Perun G., Sławomir Bucki S. Application of the finite-element method for determining the stiffness of rolling bearings // Transport problems. 2008. Vol. 3. Pp. 33–40.

19. Денисенко А. Ф., Якимов М. В. Определение собственных изгибных частот шпинделя металлорежущего станка с учетом анизотропной упругости опор // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Технические науки». 2015. № 1(45). С. 159–166.

20. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Л. : Машиностроение, 1976. 320 с.

21. Чернянский П. М., Схиртладзе А. Г. Проектирование и ремонт шпиндельных узлов. М. : ИНФРА-М, 2018. 272 с.

22. Бондарь С. Е., Вергелис И. С. Шпиндельные узлы прецизионных станков. М. : НИИМАШ, 1975. 120 с.

23. Проектирование металлорежущих станков и станочных систем: Справочник-учебник. В 3 т. Т. 1. Проектирование станков / А. С. Проников, О.И. Аверьянов, Ю. С. Аполлонов [и др.]; Под общ. ред. А. С. Проникова. М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана: Машиностроение, 1994. 444 с.

© 2026 Авторы. Эта статья доступна по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Об авторах:

Денисенко Александр Федорович, профессор, Самарский государственный технический университет, 443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244, доктор технических наук, профессор, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6393-2831>, e-mail: sammortor@yandex.ru

Ладагин Роман Владимирович, аспирант, Самарский государственный технический университет, 443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244, б/с, б/з., ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0260-8032>, e-mail: ladoshman@yandex.ru

Заявленный вклад авторов:

Денисенко Александр Федорович – постановка исследовательской задачи, аналитические исследования, написание текста

Ладагин Роман Владимирович – обзор соответствующей литературы, сбор и анализ данных, численное моделирование, выводы.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Original article

DETERMINATION OF NATURAL FREQUENCIES OF A METAL-CUTTING MACHINE SPINDLE USING MASS REDUCTION AND INFLUENCE COEFFICIENTS

Alexander F. Denisenko*, Roman V. Ladyagin

Samara State Technical University

* for correspondence: sammortor@yandex.ru



Article info

Received:
15 October 2025

Accepted for publication:
15 January 2026

Accepted:
12 February 2026

Published:
19 March 2026

Keywords: machine spindle, natural frequencies, influence coefficients, mass reduction, console part, elastic supports, finite element modeling.

Abstract.

This article considers the problem of determining the natural frequencies of a machine tool spindle, a pressing issue due to the increase in vibration during high-speed machining. Existing approaches, such as finite element modeling, offer high accuracy but are labor-intensive at the preliminary design stage due to the uncertainty of geometric parameters. The aim of this work is to develop adapted analytical methods for quickly assessing the dynamic characteristics of spindle assemblies, taking into account their key design features: asymmetry, the presence of a massive cantilever section, and the difference in the stiffness of the front and rear supports. The proposed approach is based on a combination of the influence coefficient method and mass reduction, taking into account both the distributed and concentrated masses of the spindle. Particular attention is paid to modeling the cantilever section: two schemes for reducing its mass—to the middle and to the end of the cantilever—are compared. The effect of support elasticity on natural frequencies is also studied. The methodology was verified by comparing the calculated results with modal analysis data in ANSYS Workbench for a real spindle with various bearing configurations. It was found that the model with the console mass reduced to its end provides the best accuracy: the discrepancy with finite element modeling is only 1.2–1.6%. Accounting for support elasticity is shown to reduce natural frequencies by almost half compared to the model with rigid supports. The spindle's design feature of mass concentration on a short console results in close values of the first and second natural frequencies, with a difference of 6.3–13.8%. The developed analytical relationships represent an effective tool for engineering analysis and dynamic design of spindle systems at early stages, providing a compromise between sufficient accuracy and computational simplicity.

For citation: Denisenko A.F., Ladyagin R.V. Determination of natural frequencies of a metal-cutting machine spindle using mass reduction and influence coefficients. *Vestnik Kuzbasskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*=Bulletin of the Kuzbass State Technical University. 2026; 1(173):15-25. (In Russ., abstract in Eng.). DOI: 10.26730/1999-4125-2026-1-15-25, EDN: XQDQVC

REFERENCES

1. Golikova V.V., Aleksandrov A.S., Vasilkov D.V. Vibration resistance criterion in assessing the dynamic quality and ultimate capabilities of metal-cutting machines. *Metalworking*. 2024; 3(141):28–37.
2. Gvindzhiliya V.E., Fominov E.V., Moiseev D.V., Gamaleeva E.I. Influence of dynamic characteristics of the cutting process on the surface roughness of a part during turning. *Metalworking (technology, equipment, tools)*. 2024; 26(2):143–157.
3. Emelyanova I.V. Improving the dynamic quality of CNC machines. *Eurasian Union of Scientists. Series: technical and physical-mathematical sciences*. 2023; 11(114):24–28.
4. Mironov D.A., Salnikov A.F. Analysis of studies of the dynamic behavior of rotor systems during operation (review). *Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Aerospace engineering*. 2023; 73:41–51.
5. Balabanov V.I., Kuichiev O.R. Analysis of the dynamics and stability of rotor systems under high-speed rotation. *Economy and Society*. 2025; 1-1(128):386–389.
6. Tsarenko S.N., Golovanev E.A. Study of parametric vibrations of a rigid rotor on elastic supports. *Bulletin of the Donbass National Academy of Civil Engineering and Architecture*. 2024; 3(167):26–31.
7. Hong S., Kang J., Shin Y. Dynamic Analysis of Rotor Systems with Angular Contact Ball Bearings

Subject to Axial and Radial Loads. *Int. J. of the Korean Society of Precision Engineering*. 2002; 3(2):61–71.

8. Lee D., Choi D. A dynamic analysis of a flexible rotor in ball bearings with nonlinear stiffness characteristics. *International Journal of Rotating Machinery*. 1997; 3:73–80.

9. Brungardt A.V., Shchepin A.N., Brungardt M.V., Bryukhovetskaya E.V. Evaluation of the dynamic quality of the spindle. *Bulletin of higher educational institutions. Mechanical engineering*. 2024; 7(772):29–39.

10. Khomyakov V.S., Kochinev N.A., Sabirov F.S. Modeling and calculation of dynamic characteristics of spindle units. *Bulletin of Ufa State Agrarian University*. 2007; 2(31):69–75.

11. Boyko I.A. Development of a mathematical model and modal analysis of the spindle unit of a high-speed machining center. *Bulletin of the Sukhoi State Technical University*. 2016; 4:13–20.

12. Liu Y., Zhang J., Wang S., Liu X. Dynamic modeling and vibration analysis of a motorized spindle system with coupled thermo-mechanical effects under high-speed operation. *Journal of Manufacturing Processes*. 2023; 101:1283–1296.

13. Denkena B., Bergmann B., Witt M. Model-based prediction of spindle dynamics for stability analysis in milling. *Production Engineering*. 2021; 15(1):117–127.

14. Rantatalo M., Aidanpää J.O., Schmidt C. Experimental and numerical investigation of the effects of bearing preload variations on spindle dynamics. *Machining Science and Technology*. 2022; 26(1-2):1–22.

15. Biderman V.L. *Prikladnaya teoriya mekhanicheskikh kolebaniy*. [Applied Theory of Mechanical Oscillations]. Moscow: Higher School; 1972. 416 p.

16. Bourdon A., Rigal J., Play D. Static rolling bearing models in a cad. environment for the study of

complex mechanisms: Part I: Rolling bearing model. *Journal of Tribology*. 1999; 12:205–214.

17. Guo Y., Parker R. Stiffness matrix calculation of rolling element bearings using a finite element/contact mechanics model. *Mechanism and Machine Theory*. 2012; 51:32–45.

18. Lazarus B., Perun G., Sławomir Bucki S. Application of the finite-element method for determining the stiffness of rolling bearings. *Transport problems*. 2008; 3:33–40.

19. Denisenko A.F., Yakimov M.V. Determination of natural bending frequencies of the spindle of a metal-cutting machine taking into account the anisotropic elasticity of supports. *Bulletin of the Samara State Technical University. Series "Technical Sciences"*. 2015; 1(45):159–166.

20. Panovko Ya.G. *Osnovy prikladnoy teorii kolebaniy i udara*. [Fundamentals of the Applied Theory of Oscillations and Impact]. L.: Mashinostroenie; 1976. 320 p.

21. Chernyansky P.M., Skhirtladze A.G. *Proyektirovaniye i remont shpindel'nykh uzlov*. [Design and Repair of Spindle Assemblies]. M.: INFRA-M; 2018. 272 p.

22. Bondar S.E., Vergelis I.S. *Shpindel'nyye uzly pretsizionnykh stankov*. [Spindle Assemblies of Precision Machine Tools]. M.: NIIMASH; 1975. 120 p.

23. *Proyektirovaniye metallovezhushchikh stankov i stanochnykh sistem: Spravochnik-uchebnik. V 3 t. T. 1. Proyektirovaniye stankov*. [Design of metal-cutting machines and machine-tool systems: Handbook and textbook. In 3 volumes. Volume 1. Design of machines]. / A.S. Pronikov, O.I. Averyanov, Yu.S. Apollonov [et al.]; Under the general editorship of A.S. Pronikov. Moscow: Publishing house of Bauman Moscow State Technical University, Mechanical Engineering; 1994. 444 p.

© 2026 The Authors. This is an open access article under the CC BY license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

The authors declare no conflict of interest.

About the authors:

Alexander F. Denisenko, Professor, Samara State Technical University, 443100, Russia, Samara, Molodogvar-deyskaya St., 244, Doctor of Technical Sciences, Professor, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6393-2831>, e-mail: sammortor@yandex.ru

Roman V. Ladyagin, postgraduate student, Samara State Technical University, 443100, Russia, Samara, Molod-ogvardeyskaya st., 244, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0260-8032>, e-mail: ladoshman@yandex.ru

Contribution of the authors:

Alexander F. Denisenko – research problem formulation, analytical research, writing

Roman V. Ladyagin – literature review, data collection and analysis, numerical modeling, and conclusions.

All authors have read and approved the final manuscript.

