

Научная статья

УДК 622.279.6

DOI: 10.26730/1999-4125-2026-1-90-103

ТЕОРИЯ КАТАСТРОФ: БИФУРКАЦИОННЫЙ КРИТЕРИЙ РАЗРУШЕНИЯ КОНСТРУКЦИЙ В ЗАДАЧАХ ГЕОМЕХАНИКИ И РАСЧЕТА ГОРНОТЕХНИЧЕСКИХ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

Назаров Дмитрий Иванович

Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева

* для корреспонденции: ndi.spssh@kuzstu.ru



Информация о статье

Поступила:

14 августа 2025 г.

Одобрена после
рецензирования:

15 января 2026 г.

Принята к публикации:

12 февраля 2026 г.

Опубликована:

19 марта 2026 г.

Ключевые слова:

Теория катастроф, бифуркация, несущая способность, устойчивость, метод конечных элементов, разрушение, механика деформируемого твердого тела, геомеханика, строительная механика

Аннотация.

Основным инструментом моделирования геомеханических задач в последние четверть века стали пакеты специализированного конечно-элементного анализа, такие как Plaxis, Fidesys, Midas, Rocscience, для задач проектирования горнотехнических зданий и сооружений – Lira, SCAD-office, SAP2000, ETABS, для комплексных задач – ANSYS, Abaqus, Comsol. Достоверность результатов моделирования – не только актуальная научная проблема, но и требование федерального законодательства в области проектирования особо опасных, технически сложных и уникальных объектов. Обоснованность результатов отдельно взятой программы законодательно принимается недостоверной и требует сверки с альтернативным пакетом МКЭ, включая экспертное научно-техническое сопровождение как процесса проектирования, так и строительства. Анализ допущенных для расчетов задач геомеханики и проектирования горнотехнических зданий и сооружений программ МКЭ, основанных на современных физико-математических моделях теории конечно-элементного анализа, показывает отсутствие учета бифуркационного поведения конструкций. Исследование возможностей МКЭ для определения устойчивости и геометрически-нелинейного (деформированного) состояния показывает невозможность корректно определять предельную несущую способность по критерию бифуркации. Невозможность достоверного определения предельной несущей способности в геометрически-нелинейной (деформированной) модели показана примерами и обоснована отсутствием строгого физического определения и соответствующих математических формулировок для таких фундаментальных понятий, как статическая сила, статическое нагружение, устойчивость, несущая способность. Критерий бифуркации как физического процесса, приводящего к разрушению конструкций, исследованный как в аналитическом анализе, так и на примере реальных конструкций здания, подвергнувшихся разрушению (в форме не учитываемых как МКЭ, так и действующих норм по проектированию), показывает необходимость учета бифуркации как критерия предельной несущей способности.

Для цитирования: Назаров Д.И. Теория катастроф: бифуркационный критерий разрушения конструкций в задачах геомеханики и расчета горнотехнических зданий и сооружений // Вестник Кузбасского государственного технического университета. 2026. № 1 (173). С. 90-103. DOI: 10.26730/1999-4125-2026-1-90-103, EDN: UDXMYT

Введение

Геомеханическое моделирование объектов добычи полезных ископаемых обуславливает разработку методов анализа горного давления, удароопасности, устойчивости определяемых напряженно-деформированным состоянием массивов горных пород, грунтов, горнотехнических зданий и сооружений в связи с проведением горных выработок и строительством горнотехнических зданий и сооружений. Геомеханика формирует теоретические физические принципы и математические модели на их основе для обеспечения безопасности горных выработок, горнотехнических зданий и сооружений, предотвращения проявления опасных горно-геологических и техногенных явлений как при их строительстве, так и при эксплуатации.

За последние 20-30 лет фактически основным инструментом моделирования задач как геомеханики, так и проектирования горнотехнических зданий и сооружений стали программы конечно-элементного анализа, из множества отечественных и зарубежных экземпляров можно выделить наиболее массово используемые отечественными учеными и проектировщиками (прим.: некоторые разработчики и продавцы в рамках односторонних рестрикций прекратили деятельность и соответственно поддержку своих программ на отечественном рынке), такие как: специализированные для задач геомеханики – Plaxis, Fidesys, Midas, Rocscience, для задач проектирования горнотехнических зданий и сооружений – Liga, SCAD-office, SAP2000, ETABS, для комплексных задач – ANSYS, Abaqus, Comsol. Достоверность результатов моделирования – не только актуальная научная проблема, но и требование федерального законодательства в области проектирования особо опасных, технически сложных и уникальных объектов (см. ст. 16.1. №116-ФЗ «О промышленной безопасности опасных производственных объектов», ст. 16. №384-ФЗ «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений»).

Поскольку объекты, относящиеся к особо опасным (все объекты задач геомеханики в угольной и горнорудной промышленности, конструкции: крепей, копров, бункеров и т. д.), принадлежат к повышенному уровню ответственности (см. п. 12.4 и табл. 3 ГОСТ 27751-2014 «Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения»), соблюдение требований законодательства (см. №184-ФЗ «О техническом регулировании») обеспечивается выполнением требований специализированных нормативно-технических документов (основные требования, см. Постановление Правительства РФ от 5 марта 2007 г. №145 «О порядке организации и

проведения государственной экспертизы проектной документации и результатов инженерных изысканий», ФАУ «Главгосэкспертизы России» «Рекомендации по составу и оформлению отчетной документации по результатам расчетов строительных конструкций и оснований зданий и сооружений, представляемых на государственную экспертизу проектной документации», СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*», СП 22.13330.2016 «Свод правил. Основания зданий и сооружений. Актуализированная редакция СНиП 2.02.01-83*», СП 24.13330.2021 «Свайные фундаменты. СНиП 2.02.03-85», СП 43.13330.2012 «Сооружения промышленных предприятий. Актуализированная редакция СНиП 2.09.03-85», СП 63.13330.2018 «Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения», СП 91.13330.2012 «Подземные горные выработки. Актуализированная редакция СНиП II-94-80», СП 248.1325800.2016 «Сооружения подземные. Правила проектирования», СП 266.1325800.2016 «Конструкции сталежелезобетонные. Правила проектирования», СП 294.1325800.2017 «Конструкции стальные. Правила проектирования», СП 305.1325800.2017 «Правила проведения геотехнического мониторинга при строительстве», СП 385.1325800.2018. «Защита зданий и сооружений от прогрессирующего обрушения. Правила проектирования. Основные положения», СП 430.1325800.2018 «Монолитные конструктивные системы», СП 539.1325800.2024 «Научно-техническое сопровождение инженерных изысканий, проектирования и строительства. Общие положения»). При этом обоснованность результатов расчетов МКЭ программ (в рамках проектно-конструкторской деятельности) законодательно принимается недостоверной и требует сверки с альтернативным пакетом МКЭ, включая экспертное научно-техническое сопровождение как процесса проектирования, так и строительства, вышеуказанные нормативные и законодательные документы требуют:

– выполнения расчета (моделирования задач геомеханики или конструкций горнотехнического объекта) на конечно-элементной программе, допущенной к использованию (форма исполнения требований к сертификации, верификации, валидации – отдельная тема для дискуссии), по нелинейной модели напряженно-деформированного состояния;

– поверочного расчета на альтернативной программе, допущенной к использованию, иным лицом (т. е. и программа, и организация проектировщик должны быть другими);

– альтернативный расчет на иной МКЭ программе, допущенной к использованию, экспертной организацией в рамках научно-технического сопровождения проектирования и строительства;

– экспертиза расчетов в рамках государственной экспертизы проектной документации;

– мониторинг, в т. ч. геотехнический, соответствия результатов расчетов по проекту и фактического состояния и поведения конструкций, экспертной организацией в рамках научно-технического сопровождения инженерных изысканий, проектирования и строительства.

Отношение к достоверности моделирования на МКЭ программах, сформированное в большей степени даже не научным сообществом, активно развивающим данное направление [1-9], а законодательными органами, требующее фактически для расчета конструкций сооружений в геомеханическом моделировании на трех разных программах тремя разными коллективами, один из которых экспертного уровня, и дополнительной проверке еще одним коллективом экспертного уровня, обосновано не сильно афишируемым как среди проектировщиков, так и среди ученых низким качеством достоверности результатов МКЭ программ, что резко контрастирует с требованиями законодательства в других областях, например:

финансовая отчетность предприятий и уплата налогов осуществляется в одной программе (обычно 1С) и никто не требует выполнения дополнительных расчетов; в медицине диагноз, поставленный компьютерным прибором (узи, томограф, кардиограф и т. д.), не ставится под сомнение, не требует проверки на аналогичном по функционалу приборе с альтернативной программой диагностики (прим.: дополнительные анализы необходимы для назначения адекватного комплексного лечения и мониторинга состояния); проверка достоверности цифровой подписи при осуществлении юридически-значимых действий осуществляется в одной программе (например Криптопро, или сайт Госуслуг) и т. д.

Предложенный ранее для анализа набор из четырех тестовых задач [10, 11] наряду с выполненными исследованиями этих задач [12-16], анализирующих допущенные для расчетов

задач геомеханики и проектирования горнотехнических зданий и сооружений программы МКЭ, основанные на современных физико-математических моделях теории конечно-элементного анализа, показывает отсутствие учета бифуркационного поведения конструкций. Моделирование геометрически-нелинейных задач в статической постановке актуального метода конечных элементов не применимо с достаточной достоверностью [14, 17-19] для практического применения, обеспечивающего безопасность, поскольку бифуркация, приводящая к разрушению конструкций, в современной теории метода конечных элементов не высчитывается адекватно физической модели. Однако выполненные исследования не в полной мере раскрывают проблемность актуального метода конечных элементов и требуют для определения как ключевых проблем, так и основных направлений разработки корректного метода конечных элементов, дополнительного рассмотрения и изучения.

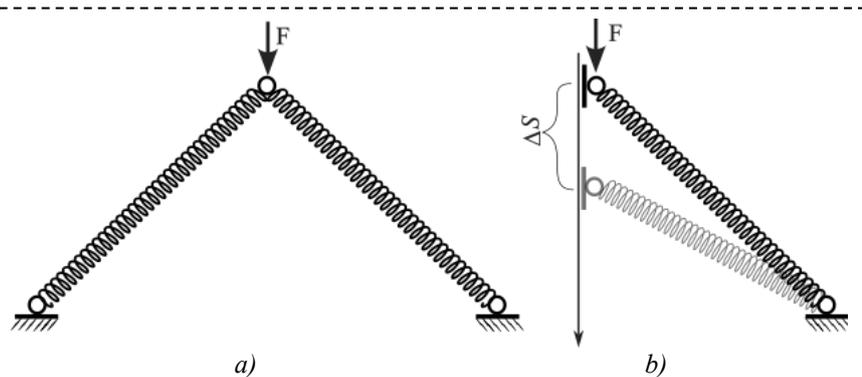


Рис. 1. Механическая модель анализа бифуркации:

а) ферма Мизеса, б) одноэлементная модель

Fig. 1. Mechanical schematics of von Mises Truss:

a) von Mises Truss, b) single element model von Mises Truss

Методика проведения исследования

Ранее выполненный анализ возможностей метода конечных элементов [14, 16, 19] для определения устойчивости и геометрически-нелинейного (деформированного) состояния показывает основное направление исследований с целью корректного определения предельной несущей способности по критерию бифуркации как математическому принципу. Невозможность актуальным МКЭ достоверно определять предельную несущую способность в геометрически-нелинейной (деформированной) модели, ранее показанная примерами, обоснована отсутствием строгого физического определения и соответствующих математических формулировок для таких фундаментальных понятий, как: статическая сила, статическое нагружение, устойчивость, несущая способность, указывает на необходимость формулирования физических определений и строго-

эквивалентных этим физическим определениям математических формулировок, в т. ч. и обратное (необходимо сформулировать

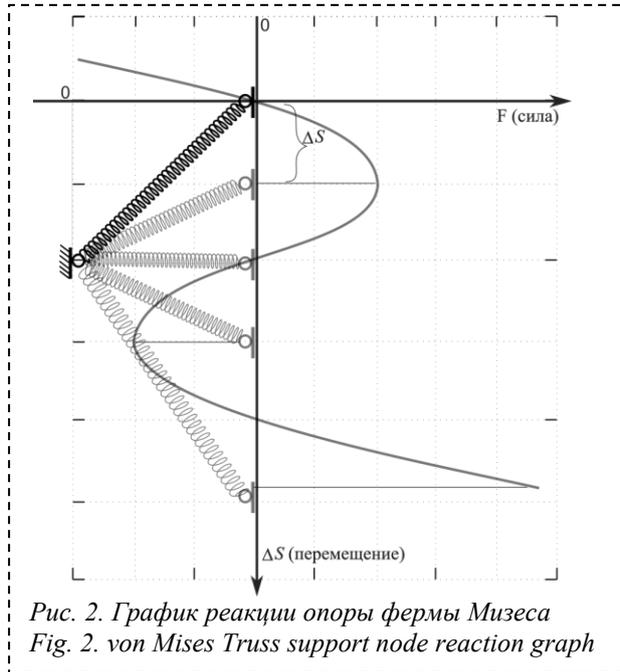


Рис. 2. График реакции опоры фермы Мизеса
Fig. 2. von Mises Truss support node reaction graph

физическое явление, которому соответствует математическое определения «бифуркация»).

Бифуркационные принципы теории катастроф указывают на не учитываемый в современной теории метода конечных элементов [20-22] фактор бифуркации при геометрически-нелинейном анализе конструкций, как при проектировании, так и при экспертизе промышленной безопасности. Теорию катастроф как раздел современной математики активно развивали и пропагандировали отечественные ученые, такие как академик Арнольд В.И. и его

ученики – продолжатели школы: Гивенталь А.Б., Закалюкин В.М. (ссылки на источники – см. [23]), теорию катастроф (отдельные ее прикладные элементы) в механике развивали Алфутов Н.А., Колесников К.С., однако без практической реализации применительно к конкретным техническим задачам, т. е. в большей степени как форму прикладной математики. Теоретическое развитие и практическую ориентацию математической теории катастроф развивают современные ученые [24-31] в основном на основе простейших математических моделей исследуемых физических явлений [32-36], геомеханики [37-39], и социальных вопросах [40-41].

Механическими моделями, используемыми в теории катастроф, являются машина катастроф Зимана (Zeeman Catastrophe machine) и ферма Мизеса (von Mises truss). Поведение фермы Мизеса удобнее исследовать (как бифуркационную задачу) не на двух стержнях (см. Рис. 1а), а на одном. Для конструкции, изображенной на Рис. 1б, состоящей всего из одного стержня с продольной жесткостью EA , проекциями x и y , длиной l зависимость вертикальной силы (P_y) от вертикального перемещения (Δy) определяется уравнением:

$$P_y = EA(y - \Delta y) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - \Delta y)^2}} - \frac{1}{l} \right) \quad (1)$$

график которого с характерными точками бифуркации представлен на Рис. 2.

График уравнения (1) (Рис. 3) изменения энергии внешней силы P_y и энергии деформации показывает, что точка бифуркации и соответствующий ей прыжок согласно математической теории катастроф соответствуют

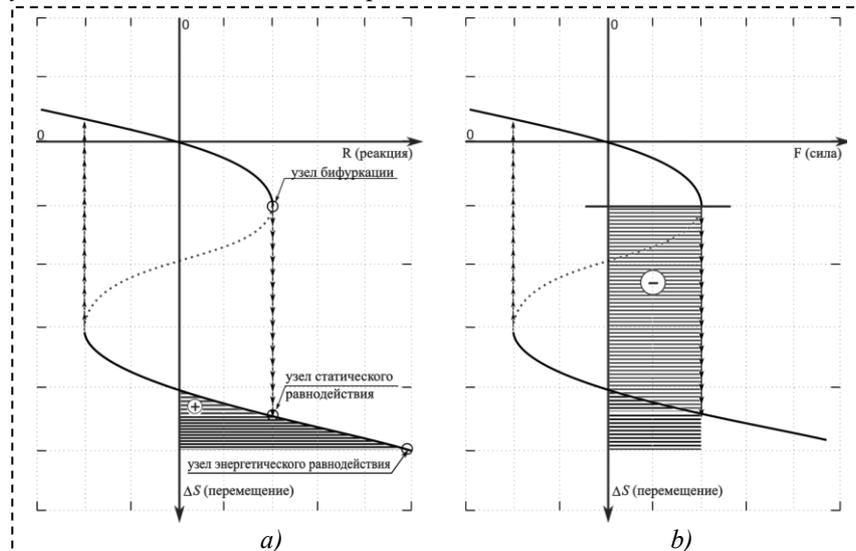


Рис. 3. График изменения энергии при бифуркации фермы Мизеса:

a) энергии деформации, b) энергии внешней силы

Fig. 3. Energy's graph of during von Mises truss bifurcation:

a) deflection energy, b) energy of out pressure

статической постановке задачи, соответствующей абсолютной диссипации «лишней» энергии при бифуркации, однако более фундаментальный закон сохранения энергии требует компенсации потраченной энергии внешней силы энергией деформации стержня, что приводит к положению энергетического равновесия (см. Рис. 3), которое по перемещению значительно более деформированное. Фактически возникает колебательный процесс, приводящий после диссипации энергии (на вязкое или сухое трение) к равновесию внешней

силы воздействия и противодействию реакции деформации в точке статического равновесия. Для расчета реальных конструкций по предельным состояниям критическим является максимальное пересечение. Более полный энергетический анализ (см. [14, 23]) одноэлементной бифуркации может показать, что точки статического равновесия системы (механика Ньютона), точка минимума энергии системы (механика Чаплыгина) и точка вариации энергии системы (механика Лагранжа) не совпадают, что косвенным образом свидетельствует о свойствах рассматриваемой системы как энергетического функционала, требующего вариационных принципов исследования.

Связь точки бифуркации с предельной несущей способностью на основе анализа на хрупкое разрушение исследуется по максимальной деформации. Саму точку бифуркации необходимо классифицировать как предельную точку статического равновесия. В терминологии времен Эйлера в формулировке Ломоносова об устойчивости кораблей «Тела, плавающего на воде, равновесное положение будет устойчиво, ежели оно тело, будучи несколько наклонено, опять справится, в противном случае положение будет падкое», применительно к современному состоянию механики следует сформулировать как: «Состояние статического равновесия – состояние, в котором система при вариационно-возможном отклонении положения от воздействия неизменно возвращается в исходное

состояние», соответственно, если система не возвращается, то это предел несущей способности (однако критерий подлежит дальнейшему анализу, а именно произошло разрушение, или изменение структуры системы приводящей к невозможности ее эксплуатации).

Исследуя точку бифуркации в анализе хрупкого (динамического) разрушения при статической нагрузке, исследуется конструкция в соответствии с классической теорией катастроф, пример конструкции анализа бифуркации коразмерности представлен на Рис. 2, график реакции расчетной схемы фермы Мизеса в зависимости от перемещения узла воздействия представлен на Рис. 3.

Моделируя бифуркацию с учетом динамических параметров системы, а именно для спаренного уголка №10 из стали ВСт3кп, длиной 150 см с отклонением 7 см, получаем критическую силу ≈ 500 кгс, перемещение до бифуркации – 3,172 см, перемещение узла после бифуркации соответствующее статической нагрузке ≈ 4500 кгс. При этом энергия удара при бифуркации ≈ 100 Дж/см², что соответствует ударной вязкости стали ≈ 100 Дж/см².

С точки зрения реальной (прикладной механики и проектирования конструкций) становится понятно, что точка бифуркации предельного состояния статического равновесия при анализе геометрически-нелинейного поведения несущих конструкции классифицируется по критерию относимого на сегодня к потере устойчивости, а следствием бифуркации может являться разрушение по хрупкой схеме.

Результаты исследования

Результаты исследований не только имеют высокую научную значимость, но и представляют значительный практический интерес по предотвращению реальных обрушений горнотехнических зданий и сооружений и аварий в задачах геомеханики [14, 15, 19, 23].

Примером разрушения реальных конструкций построенного здания от бифуркации является авария здания в г. Прокопьевск Кемеровской области (автор работы выступал и как эксперт, и как разработчик конструкции усиления/восстановления аварийных ферм). Следует отметить, что исследовались причины аварии несущих конструкций здания, произошедшей после года эксплуатации, построенного по проекту специализированной организации, с положительным заключением госэкспертизы, с постоянным техническим контролем строительства, изготовитель конструкций – специализированный завод. Особо учитывалось отсутствие превышения

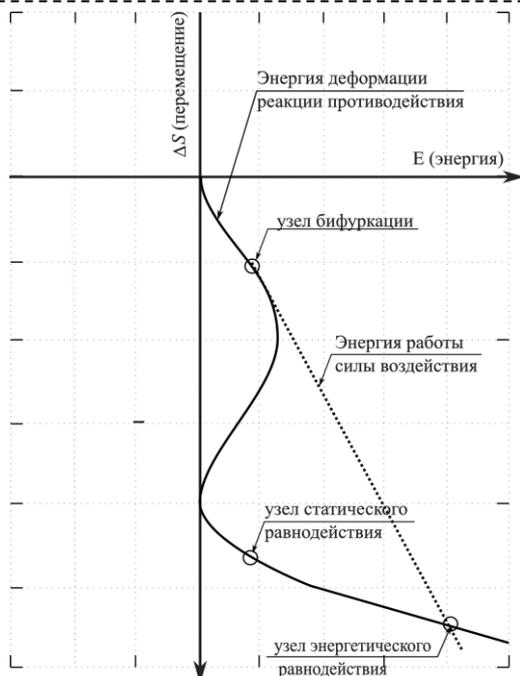


Рис. 4. График энергетического анализа бифуркации фермы Мизеса

Fig. 4. Energy analysis graph von Mises truss bifurcation

нормативных снеговых нагрузок (фактические нагрузки не превышали 50% от нормативных) в период эксплуатации, предшествующий аварии (по данным метеорологической станции г. Прокопьевск), а также отсутствие непосредственных динамических воздействий, в т. ч. сейсмического характера.

Аварийная деформация несущих ферм привела к разрушению элементов ферм, без общего обрушения крыши здания (см. Рис. 5), особенностью которого, кроме пластических деформаций элементов верхнего пояса и опорных узлов, являлось хрупкое разрушение элементов (см. Рис. 6) у четырех ферм (т. е. все, кроме торцевых, фермы здания).

В связи с уникальностью аварии здания, а также с целью исключения иных причин аварии строительных конструкций было выполнено тщательное инструментальное обследование. Результатом обследования стало выявление почти двух десятков дефектов, однако все отмеченные дефекты не являлись причиной хрупкого разрушения элементов фермы.

Несмотря на единственную причину возникновения динамического воздействия – бифуркация элементов конструкции, тщательное обследование и обмеры выполнялись с целью исключения иных причин обрушения конструкций, а также для разработки наиболее оптимального способа усиления конструкций.

По результатам качественного анализа и перерасчета конструкций было выполнено

усиление конструкций аварийного здания, данные конструкции эксплуатируются по настоящее время. Необходимо отметить, что усиление (восстановление) аварийных несущих конструкций выполнялось без демонтажа ограждающих конструкций здания, что сформировало значительный экономический эффект как по объему строительного-монтажных работ, так и по периоду исключения аварийного здания из производственного цикла предприятия.

Эксперты предлагали эксплуатирующей организации выполнить экспертизу рядом стоящего более крупного здания, участниками ведения которого были те же коллективы, но ссылаясь на то, что экспертиза уже проведена иной специализированной экспертной организацией, не обнаружившей недостатков, заказчик отказал (прим.: через несколько лет здание полностью рухнуло по аналогичной схеме – каскад бифуркаций, т. е. прогрессирующее обрушение). Данный случай, хоть он и трагический, можно отнести к удачному стечению обстоятельств, поскольку при выявлении недостатков, аналогичных недостаткам обследованного здания, возможность доказательства заказчику о необходимости финансовых затрат на усиление конструкций полностью соответствующим действующим нормам была существенно ограничена, т. к. даже на научном уровне данное обстоятельство не находит широкого понимания и требует тщательной проработки методологии

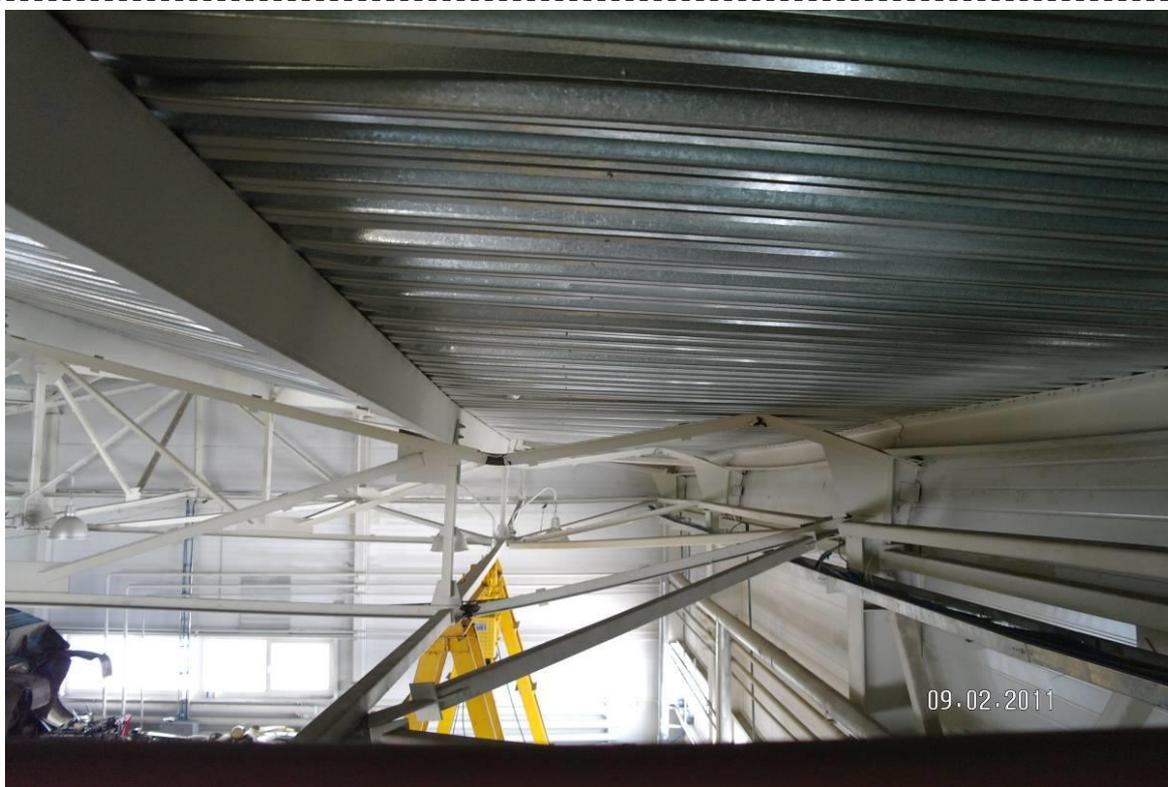


Рис. 5. Общий вид обрушенных несущих ферм покрытия здания
Fig. 5. General view of crashed load-bearing trusses of the building roof

объяснения. В настоящее время отсутствуют как аналитические, так и численные методы определения бифуркации и расчета энергии удара, приводящего к хрупкому разрушению конструкций. Во многом это связано с фактом наличия негомомогных накладываемых связей, что не позволяет использовать прямые методы решения дифференциальных уравнений.

Обсуждение результатов



Рис. 6. Хрупкое разрушение нижнего пояса фермы
Fig. 6. Brittle fracture trusses element

Высокая научная значимость достоверного конечно-элементного моделирования задачи учета бифуркации узлов в вопросах проектирования горнотехнических зданий и сооружений и задачах геомеханики обусловлена выполненным выше анализом и приведенными примерами практических результатов, что представляет значительный практический интерес по предотвращению реальных обрушений горнотехнических зданий и сооружений и аварий в задачах геомеханики. Данная тематика не просто актуальна, а критична, поэтому использование теории катастроф применительно к конечно-элементному анализу предельного состояния

несущих конструкций обеспечит при проектировании горнотехнических зданий и сооружений их промышленную безопасность.

Основной проблемой (как научной задачей) в данном случае является свойство задач геометрически-нелинейного анализа, как «задача трех тел», широко известная в математике и сформулированная более двух веков назад Эйлером и Лагранжем. Для решения подобных задач Эйлер первоначально использовал понятие «многозначная функция», а впоследствии совместно с Лагранжем стал применять термин «функционал» и синонимичное «функциональное уравнение», наиболее известное из которых на сегодняшний день – «Функционал Лагранжа», для анализа которых создали вариационные принципы исчисления.

Исходя из физических свойств геометрически-нелинейного анализа (на примере анализа График реакции опоры фермы Мизеса, см. Рис. 3) для равновесных состояний общее количество решений, как решение задачи трех тел, составляет для «силовых» решений 2^n , для «кинематических» решений 3^n , где n – количество стержней в системе, что показано на Рис. 7 (прим: для трех стержней показано одно из осесимметричных положений и не показано верхнее и нижнее симметричное положение аналогичное схеме для одного стержня). Без понимания физического смысла «статическое нагружение» и создания корректной физико-математической модели высказываться о верности одного решения и неверности другого преждевременно, поскольку математически все решения равноправны.

В связи с вышеизложенным необходимо указать, что без четкого физического определения и соответствующего математического описания таких терминов, как

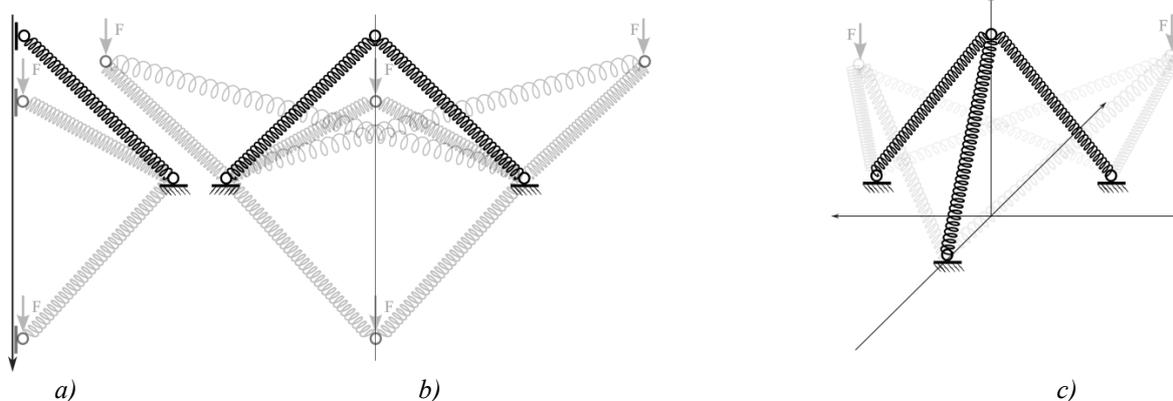


Рис. 7. Определение количества статически-равновесных форм для схем:

a) одноэлементная ферма – 2, b) двухэлементная ферма – 4, c) трехэлементная ферма – 8

Fig. 7. Calculation the count statically-equilibrium forms trusses:

a) single-element structure – 2; b) two-element structure – 4, c) tree-element structure – 8

«статическая сила», «статическое нагружение», «потеря устойчивости формы» невозможно адекватно описать бифуркации узлов конструкций и создать теорию метода конечных элементов, позволяющую предотвратить аварии конструкций, связанных с бифуркацией узлов.

Особо необходимо отметить, что проблема неучитываемых бифуркаций совершенно не описывается анализом устойчивости стержней (buckling analysis), а физическое явление «скачка» совершенно не отражается нелинейным анализом устойчивости стержней, т. е. не отражено как в теоретической, так и в нормативной литературе по определению предельной несущей способности конструкций.

В частности, если нелинейный анализ устойчивости стержней не отражает реального физического явления – скачка, с последующим хрупким разрушением от динамического воздействия, то проблема линейного анализа устойчивости стержней более математическая. В линейном анализе определяется критическая сила. Значение критической силы почти три века назад вывел Леонардо Эйлер из модели силы, при которой возникает возможное равновесное криволинейное состояние в добавление к существующему линейному. Леонардо Эйлер определил эту силу в 1743 году, опубликовав (см. Рис. 8) в работе «Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive, Solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accerti», что не только дало начало вариационному исчислению, но и позволило архитектору фон Кнобельсдорфу реализовать идеи короля Пруссии Фридриха II Великого по строительству дворца Сан-Суси (концепция двоянных колонн с габаритным размером, соответствующим классическим ордерам, что позволяло использовать дворец для непосредственного проживания, а не как помпезное сооружение, впрочем, это отдельная

тема для обсуждения, совершенно не обсуждаемая искусствоведами).

Проблема даже не в том, что это не критерий «необходимого и достаточного условия», а только «необходимое условие» – проблема в том, что разработанные в тридцатых годах прошлого столетия методы определения критической силы (см. уравнение 2) для систем стержней математически являются поиском собственных значений матрицы жесткости:

$$[K - \lambda K_N] \Delta s = 0 \quad (2)$$

где :

K – матрица жесткости системы (которая используется в статическом расчете),

K_N – геометрическая матрица жесткости системы (основанная на продольном изгибе стержня по Эйлеру, N – продольная сила, как элемент матрицы),

λ – вариационный параметр,

Δs – вектор перемещений узлов системы.

Критические силы для системы стержней – это точные математические значения для матрицы жесткости, никаких возможных потерь устойчивости при других значениях быть не может. При этом если логически обосновано для одного стержня, при превышении нагружением критической силы заявлять о потере устойчивости, т. к. критическая сила была превышена, то для системы из двух стержней – уже нет. Сама постановка задачи как поиск собственных значений матрицы жесткости даже с точки комбинаторики является неполноценной, т. к. количество собственных значений определяется рангом матрицы (количеством степеней свободы системы), а физически количество форм выгнутых элементов при потере устойчивости зависит от количества элементов и определяется выражением

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (3)$$

где:

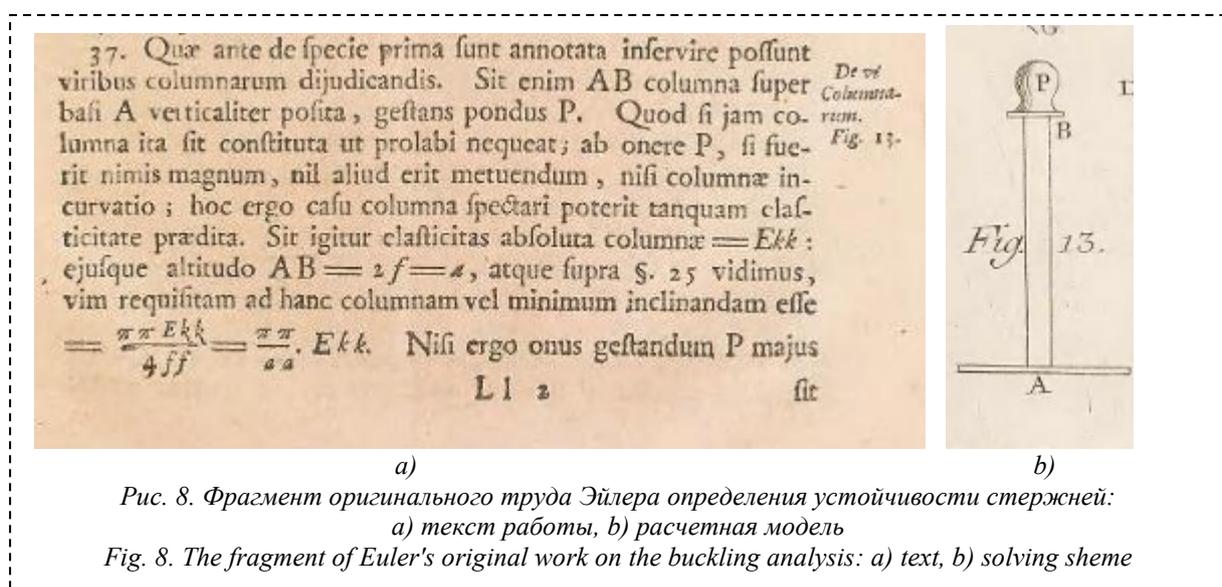


Рис. 8. Фрагмент оригинального труда Эйлера определения устойчивости стержней:

a) текст работы, b) расчетная модель

Fig. 8. The fragment of Euler's original work on the buckling analysis: a) text, b) solving sheme

n – количество элементов системы;
 k – количество неустойчивых элементов системы;
 C_n^k – количество комбинаций в системе из n элементов потери устойчивости k элементов, при этом общее количество всех комбинаций потерь устойчивости потерь элементов от одного до всех составляет $\sum C_n^k$ для $k \in [1, n]$, т. е. сочетание без повторов, например, система из четырех элементов с одним общим узлом, в плоской постановке задачи согласно современной теории имеет максимум две схемы загрузки при потере устойчивости, а согласно комбинаторике надо рассматривать: четыре варианта потери устойчивости каждого отдельного элемента, шесть вариантов потери устойчивости совместно двух элементов, четыре – для трех, один – для всех (четыре), т. е. необходимо рассмотреть 15 схем загрузки.

Множественность возможных реальных (вариационно допускаемых) решений при геометрически-нелинейном анализе, неопределенность современного физического определения критических сил при анализе устойчивости систем (предельного состояния статического равновесия), отсутствие физического эквивалента бифуркации (физического прощелкивания) при нелинейном конечно-элементном анализе ставит под сомнение физическую эквивалентность реальных объектов и математических моделей соответствующего математического описания таких терминов, как «статическая сила», «статическое нагружение», «потеря устойчивости формы» для адекватного моделирования аварий (предельной несущей способности) конструкций горнотехнических зданий и сооружений и задачах геомеханики.

Выводы

Бифуркационный критерий определяет исчерпание несущей способности по фактору обрушения (внезапное изменение формы конструкции) и является вероятной причиной хрупкого или пластического разрушения элементов конструкции.

Разработка физической модели и математической реализации достоверного конечно-элементного метода, реализующего геометрически-нелинейную схему деформирования с учетом бифуркационного критерия – достаточно важная научная задача, особенно с учетом практической значимости, обеспечивающей в вопросах проектирования горнотехнических зданий и сооружений и задачах геомеханики достоверность результатов, предотвращающих реальные обрушения горнотехнических зданий и сооружений и опасные геомеханические явления.

На пути к разработке физическо-математической реализации достоверного конечно-элементного метода, реализующего геометрически-нелинейную схему

деформирования с учетом бифуркации узлов, необходимо четко и явно, исключая метафизические определения и абстрактные понятия, сформулировать физическую суть и соответствующую математическую модель для используемых в механике (и подразделах: механика деформируемого твердого тела, строительная механика, строительная геотехнология, геомеханика и т. д.) базовых понятий и терминов:

- статическая сила (состояние статического равновесия);
- статическое нагружение (жесткое и мягкое нагружение);
- потеря устойчивости (как отдельно элемента, так и системы в целом: формы, состояния);
- бифуркация (как физическое явление в механических системах);
- предельная несущая способность.

Разработка достоверного конечно-элементного метода невозможна без опоры на классические фундаментальные работы в механике и математическом анализе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Серазутдинов М. Н., Убайдуллоев М. Н. Метод расчета монтажных напряжений в стержневых конструкциях, усиливаемых в деформированном состоянии // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 3. С. 197-210. DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-3-197-210. EDN KSBHBB.
2. Manuylov G. A. [et al.] On Errors When Replacing Non-Bifurcational Stability Problems for Elastic Frames with Bifurcational Ones // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2024. Vol. 20. № 1. Pp. 116-123. DOI: 10.22337/2587-9618-2024-20-1-116-123. EDN KСJPDR.
3. Муртазалиев Г. М., Пайзулаев М. М. Моделирование процесса нелинейного деформирования гибких оболочек // Актуальные проблемы механики и строительства в современных условиях : сб. науч. тр. Махачкала, 2025. С. 262-270. EDN JKXYRN.
4. Михальченко О. Ю. [и др.] Адаптивные модели управления строительной системой // Вестник евразийской науки. 2025. Т. 17. № 1. EDN AFWPUX.
5. Kayumov R. A. [et al.] On Energy Method for Solving the Problem of Stability and Postbuckling Bending of Beams Taking Into Account a Shear and Nonlinearly Elastic Supports // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. Vol. 45. № 10. Pp. 5055-5068. DOI: 10.1134/S1995080224606003. EDN RYNUVS.
6. Утебаев Д. [и др.] Разностные схемы метода конечных элементов повышенной точности для решения нестационарных уравнений // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложе-

ния. Тематические обзоры. 2023. Т. 221. С. 115-127. DOI: 10.36535/0233-6723-2023-221-115-127. EDN SZZRBO.

7. Mekhtiyev A. D. [et al.] Use of computer simulation to establish parameters of steel structure strengthening elements // *Metalurgija (Zagreb, Croatia)*. 2022. Vol. 61. № 1. Pp. 253-256. EDN OZURQU.

8. Харланов В. Л., Харланова С. В. Инкрементальные методы решения геометрически нелинейных задач // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2023. № 5(310). С. 64-69. DOI: 10.37538/0039-2383.2023.5.64.69. EDN EAM-HYY.

9. Alexandro S. [et al.] A new method of failure analysis // *Vietnam Journal of Science and Technology*. 2024. Vol. 62. № 1. Pp. 170-183. DOI: 10.15625/2525-2518/18622. EDN KIYJQJ.

10. Назаров Д. И. Современное состояние геометрически нелинейного конечно-элементного анализа конструкций // *Информационные и социально-экономические аспекты создания современных технологий*. 1999. № 3.

11. Назаров Д. И. Геометрически нелинейный анализ в метод конечных элементов, реальности и мифы // *Проблемы динамики, прочности и износостойкости машин*. 2000. № 6.

12. Dorofeev N. V. [et al.] The algorithm for complex processing of heterogeneous data at the local level in an automated geotechnical monitoring system // *CEUR Workshop Proceedings*. Barnaul, 2021. Pp. 34-45. EDN ZSIIQV.

13. Dorofeev N. [et al.] The location of hidden process in structure of building // *AIP Conference Proceedings*. Krasnoyarsk, 2022. EDN WQGXEQ.

14. Pershin V. V. Safety of mining engineering buildings and facilities under fern analysis and catastrophe theory // *Chinese Coal in the XXI Century: Mining, Green and Safety* : Taishan Academic Forum – Project on Mine Disaster Prevention and Control. Vol. 4. Qingdao : Atlantis Press, 2014. Pp. 428-432. EDN UGJQYJ.

15. Панькина Е. С. [и др.] Контроль образования деструктивных процессов в системе геотехническо-го мониторинга // *Южно-Сибирский научный вестник*. 2021. № 5(39). С. 43-50. DOI: 10.25699/SSSB.2021.39.5.001. EDN LLSMSJ.

16. Першин В. В. Бифуркационный анализ разрушения конструкций горнотехнического здания // *Известия высших учебных заведений. Горный журнал*. 2015. № 4. С. 124-129. EDN TUXPTN.

17. Абдуллах Х. [и др.] Прогрессирующее обрушение: факты, возможные причины, оценка методов анализа по расходу материалов // *Academia. Архитектура и строительство*. 2023. № 4. С. 153-158. DOI: 10.22337/2077-9038-2023-4-153-158. EDN NVCBWH.

18. Муцанов В. Ф. [и др.] Надежность пространственных стержневых металлических конструкций высокого уровня ответственности // *Вестник МГСУ*. 2024. Т. 19, № 5. С. 763-777. DOI: 10.22227/1997-0935.2024.5.763-777. EDN

GEAKOH.

19. Nazarov D. I. Design and expertising industrial safety mining buildings and structures with the catastrophe theory // *Miner's week-2015 : Reports of The XXIII International Scientific Symposium*, Москва, 26–30 января 2015 года. Москва : НИТУ МИСиС, 2015. Pp. 363-369. EDN TSDMVV.

20. Mitrofanov O. [et al.] Peculiarities of calculation and design of smooth orthotropic panels with considering geometric nonlinear behavior // *E3S Web of Conferences : Ural Environmental Science Forum "Sustainable Development of Industrial Region" (UESF-2023)*, Chelyabinsk, 25–28 апреля 2023 года. Vol. 389. Chelyabinsk : EDP Sciences, 2023. P. 06024. DOI: 10.1051/e3sconf/202338906024. EDN YICBKE.

21. Tsyarkin G. G. Bifurcations and Stability of Phase Transition Fronts in Geothermal Reservoirs // *Fluid Dynamics*. 2024. Vol. 59. № 4. Pp. 732-740. DOI: 10.1134/S0015462824603231. EDN NODLAG.

22. Мошинский А. И. Механическая система, демонстрирующая «катастрофическое поведение» // *Известия Академии наук. Механика твердого тела*. 2023. № 4. С. 83-96. DOI: 10.31857/S0572329923700034. EDN JMWCCY.

23. Назаров Д. И. Разрушение конструкций горнотехнического здания, энергетический и бифуркационный анализ // *Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал)*. 2015. № 7. С. 95-100. EDN UGCBKP.

24. Акманова С. В., Юмагулов М. Г. О локальных бифуркациях в нелинейных непрерывно-дискретных динамических системах / С. В. Акманова, // *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2025. № 2. С. 3-14. DOI: 10.26907/0021-3446-2025-2-3-14. EDN GHOFVZ.

25. Мустафина И. Ж. О безопасных и опасных точках бифуркации в периодических динамических системах // *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2024. № 3(66). С. 47-54. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-47-54. EDN BURDZI.

26. Akmanova S. V., Yumagulov M. G. On Local Bifurcations in Nonlinear Continuous-Discrete Dynamical Systems // *Russian Mathematics*. 2025. Vol. 69. № 2. Pp. 1-11. DOI: 10.3103/S1066369X25700094. EDN ZPRLH.

27. Басов В. В., Горелов В. С. Бифуркации в консервативной системе с тремя точками покоя в невозмущенной части // *Современные проблемы математики и математического образования* : Сб. науч. тр. межд. науч. конф. Санкт-Петербург : РГПУ им. А. И. Герцена, 2024. С. 217-227. EDN QFECEE.

28. Барабаш Н. В., Белых В. Н. Кусочно-гладкие модели хаотических динамических систем // *Транспорт. Горизонты развития : Труды 4-го Межд. науч.-пром. форума, 23–26 апреля 2024 года*. Нижний Новгород : ВГУВТ, 2024. С. 63. EDN HQZRDD.

29. Оморов Р. О. Метод топологической грубо-

сти динамических систем: приложения к исследованиям грубости, бифуркаций и хаоса в синергетических системах // XIV Всеросс. сов. по пробл. управл. : сб. науч. тр. Москва : ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН, 2024. С. 761-764. EDN AMUXGM.

30. Сулганов О. А. Стохастическая устойчивость модели авторезонанса с бифуркацией типа центр-седло // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32. № 2. С. 147-159. DOI: 10.18500/0869-6632-003090. EDN VEFWUJ.

31. Кудрявцева Е. А., Лерман Л. М. Бифуркации в интегрируемых системах с тремя степенями свободы. I // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. 2024. Т. 327. С. 140-219. DOI: 10.4213/tm4446. EDN TCGAJC.

32. Киселевич В. В. Электрическая долговечность полимеров с точки зрения теории катастроф // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2025. Т. 18. № 2. С. 93-108. DOI: 10.18721/JPM.18209. EDN GMOICG.

33. Kissikova N. [et al.] Review and Synthesis of the Main Contour of the Adaptive Control System for Unstable and Deterministic Chaotic Processes in the "Swallow Tail" Class of Catastrophes // Труды университета. 2023. № 2(91). Рр. 373-378. DOI: 10.52209/1609-1825_2023_2_373. EDN AAZAVJ.

34. Цвигун В. Н. [и др.] Механизм образования шаровой молнии // Вестник науки. 2025. Т. 5. № 3(84). С. 514-518. EDN IMQCMC.

35. Morgulis A. B. Instability and short waves in a hyperbolic predator-prey system // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2024. Vol. 65. № 5. Рр. 907-916. DOI: 10.1134/S0021894424050122. EDN LBOQKJ.

36. Морозов Н. Ф. [и др.] Ветвление форм равновесия кольцевой микропластинки в электростатическом поле двух электродов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2024. № 1. С. 110-132. DOI: 10.31857/S1026351924010063. EDN WALEPV.

37. Лопатин С. Н. [и др.] Комплексная оценка устойчивости подземных горных выработок при различных горнотехнических условиях // Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-технических наук. 2024. Т. 69. № 4. С. 340-352. DOI: 10.29235/1561-8358-2024-69-4-340-352. EDN EOBQMR.

38. Ивлев Д. Д. [и др.] Предельное состояние деформируемых тел и горных пород. М. : ООО Издательская фирма «Физико-математическая литература», 2008. 832 с. ISBN 978-5-9221-0914-7. EDN MUWSFR.

39. Володченков Ц. Л., Гуц А. К. Теоретико-катастрофическая модель X1,0 антропогенного воздействия на почву в Калининградской области // Математическое и компьютерное моделирование : сб. мат. XII межд. науч. Конф. Омск : ОГУ им. Ф. М. Достоевского, 2025. С. 94-96. EDN VPJFBF.

40. Сачков И. Н., Плотникова Е. А. Поиск бифуркаций в развитии делового кризиса 2008 года // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Экономика и управление. 2025. № 1(69). С. 213-220. DOI: 10.26456/2219-1453/2025.1.213-220. EDN VTTAOJ.

41. Котенко И. В. [и др.] Методы теории катастроф для оценки и прогнозирования уровня защищенности объектов, использующих технологию Интернета вещей // Математические методы в технологиях и технике. 2025. № 1. С. 46-49. EDN CVAKLN.

© 2026 Авторы. Эта статья доступна по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Об авторах:

Назаров Дмитрий Иванович, доцент кафедры разработки месторождений полезных ископаемых, Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева (650000, г. Кемерово, ул. Весенняя, 28, Российская Федерация), канд. техн. наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6803-8564>, e-mail: ndi.spssh@kuzstu.ru

Заявленный вклад авторов:

Назаров Дмитрий Иванович – постановка исследовательской задачи, научный менеджмент, обзор соответствующей литературы, концептуализация исследования, сбор и анализ данных, обзор соответствующей литературы, выводы, написание текста.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Original article

CATHASTROPHE THEORY: A CONSTRUCTION CRASH BIFURCATION PRINCIPLE IN GEOMECHANICS PROBLEMS AND STRUCTURAL ANALYSIS MININGS BUILDING AND STRUCTURES

Dmitriy I. Nazarov

T. F. Gorbachev Kuzbass State Technical University

* for correspondence: ndi.spssh@kuzstu.ru

**Article info**

Received:

14 August 2025

Accepted for publication:

15 January 2026

Accepted:

12 February 2026

Published:

19 March 2026

Keywords: Catastrophe theory, bifurcation, critical load, buckling, finite element method, crash, mechanics of materials, geomechanics, structural analysis

Abstract.

Major designing tool for geomechanical engineering in the last time has become specialized FEA computer program such as: Plaxis, Fidesys, Midas, Rocscience, for structural analysis mining buildings and structures - Lira, SCAD-office, SAP2000, ETABS, and for complex problems - ANSYS, Abaqus, Comsol. The accuracy of modeling results is not only actualizing scientific problem, but also a requirement of federal laws in the part of designing very dangerous, technically complex and unique objects. The validity of the results of a FEA program is legally accepted as unreliable and needed verification with another FEM program, and including scientific and technical support by experts of both the design and building processes. Current FEM programs used for designs geomechanical problem and structural analysis mining buildings and structures is based on modern physical and mathematical models of finite element analysis theory, and don't using the bifurcation model of structures. Analyzing the skill FEM program for solving buckling and geometric nonlinear (large deflection) state shows the impossibility of correctly determining the crash criterion excluding using the bifurcation criterion. The impossibility authentically solves the crash structure for buckling and geometric nonlinear (large deflection) model is shown by examples and is grounded by useless exactly physical definition and corresponding mathematical formulations for these bases definition: static force, static loading, buckling, crash capacity. The bifurcations criterion as a physical process leading to the structures crash, show both in analytical analysis and in the example of real building structures to crash subjected, this criterion (unfortunately don't uses by either FEM or current design standards) shows the need to take it into structural analysis as crash criterion.

For citation: Nazarov D.I. Catastrophe theory: a construction crash bifurcation principle in geomechanics problems and structural analysis minings buildings and structures. *Vestnik Kuzbasskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*=Bulletin of the Kuzbass State Technical University. 2026; 1(173):90-103. (In Russ., abstract in Eng.). DOI: 10.26730/1999-4125-2026-1-90-103, EDN: UDXMYT

REFERENCES

1. Serazutdinov M.N., Ubaydullov M.N. Method for calculating assembly stresses in frame structures strengthened in deformed state. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(3):197–210. (In Russian). DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-3-197-210.
2. Manuylov G.A. [et al.] On Errors When Replacing Non-Bifurcational Stability Problems for Elastic Frames with Bifurcational Ones. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2024; 20(1):116-123. DOI: 10.22337/2587-9618-2024-20-1-116-123.
3. Murtuzaliev G.M., Paizulaev M.M. Modeling the process of nonlinear deformation of flexible shells.

Current issues of mechanics and construction in modern conditions. 2025. P. 262-270. EDN JKXYRN.

4. Mikhalchenko O.Yu., Lapidus A.A., Tkach A.A. Adaptive models of construction system management. *The Eurasian Scientific Journal*. 2025; 17(1): 29SAVN125 (In Russ., abstract in Eng.). EDN AFW-PUX.
5. Kayumov R.A. [et al.] On Energy Method for Solving the Problem of Stability and Postbuckling Bending of Beams Taking Into Account a Shear and Nonlinearly Elastic Supports. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2024; 45(10):5055-5068. DOI: 10.1134/S1995080224606003.
6. Utebaev D. [et al.] Difference schemes of the finite element method of increased accuracy for solving

nonstationary equations. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023; 221:115-127. DOI: 10.36535/0233-6723-2023-221-115-127.

7. Mekhtiyev A.D. [et al.] Use of computer simulation to establish parameters of steel structure strengthening elements. *Metalurgija*. Zagreb, Croatia. 2022; 1:253-256. –EDN OZURQU.

8. Harlanov V.L., Harlanova S.V. Incremental methods for solving geometrically nonlinear problems. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2023; 5:64–69. (In Russian). DOI: 10.37538/0039-2383.2023.5.64.69.

9. Alexandrov S. [et al.] A new method of failure analysis. *Vietnam Journal of Science and Technology*. 2024; 62(1):170-183. DOI: 10.15625/2525-2518/18622.

10. Nazarov D.I. Modern view of geometrically nonlinear finite element analysis of structures. *Information and socio-economic aspects of the creation of modern technologies*. 1999. № 3. (In Russian)

11. Nazarov D.I. Geometric Nonlinear Analysis in Finite Element Method, Reality and Myths. *Problems of Dynamics, Stability and Durability of Machines*. 2000. № 6. (In Russian).

12. Dorofeev N.V. [et al.] The algorithm for complex processing of heterogeneous data at the local level in an automated geotechnical monitoring system. *CEUR Workshop Proceedings*. Barnaul, 2021. Pp. 34-45. EDN ZSIIQV.

13. Dorofeev N. [et al.] The location of hidden process in structure of building. *AIP Conference Proceedings*. Krasnoyarsk, 2022. EDN WQGXEQ.

14. Pershin V.V. Safety of mining engineering buildings and facilities under fern analysis and catastrophe theory // *Chinese Coal in the XXI Century: Mining, Green and Safety* : Taishan Academic Forum - Project on Mine Disaster Prevention and Control. № 4. Qingdao: Atlantis Press; 2014. Pp. 428-432. EDN UGJQYJ.

15. Pankina E.S. [et al.] Control of the formation of destructive processes in the geotechnical monitoring system. *South Siberian scientific bulletin*. 2021; 5(39):43-50. (In Russian). DOI: 10.25699/SSSB.2021.39.5.001.

16. Persgin, V.V. Bifurcation analysis of mining-technical building construction fracture. *News of universities. Mining magazine*. 2015; 4:124-129. EDN TUXPTN.

17. Abdullah H., Alekhin V.N., Pletnev M.V. Progressive Collapse: Facts, Potential Causes, Evaluation of Analysis Methods by Materials Consumption. In: *Academia. Architecture and Construction*. 2023; 4:153-158. DOI: 10.22337/2077-9038-2023-4-153-158.

18. Mushchanov V.F., Orzhekhovskiy A.N., Mushchanov A.V., Tseplyaev M.N. Reliability of spatial rod metal structures of high level of responsibility. *Vestnik MGSU*. 2024;19(5):763-777. (In Russ.) DOI:10.22227/1997-0935.2024.5.763-777.

19. Nazarov D.I. Design and expertising industrial safety mining buildings and structures with the catastrophe theory. *Miner's week-2015 : Reports of the XXIII*

International scientific symposium. Moscow, 2015. Pp. 363-369. EDN TSDMVV.

20. Mitrofanov O. [et al.] Peculiarities of calculation and design of smooth orthotropic panels with considering geometric nonlinear behavior. *E3S Web of Conferences : Ural Environmental Science Forum "Sustainable Development of Industrial Region" (UESF-2023)*. Chelyabinsk: EDP Sciences; 2023. Vol. 389. P. 06024. DOI: 10.1051/e3sconf/202338906024.

21. Tsyppin G.G. Bifurcations and Stability of Phase Transition Fronts in Geothermal Reservoirs. *Fluid Dynamics*. 2024; 59(4):732-740. DOI:10.1134/S0015462824603231.

22. Moshinskii A.I. A mechanical system exhibiting "catastrophic behavior". *Mechanics of solids*. 2023; 4:83-96. (In Russian) DOI: 10.31857/S0572329923700034.

23. Nazarov D.I. Destruction of the structures of the mining building, energy and bifurcation analysis. *Mining Inf. and Analytical Bulletin (Science and Technic. Journal)*. 2015; 7:95-100. (In Russian) EDN UGCBKP.

24. Akmanova S.V., Yumagulov M.G. On local bifurcations in nonlinear continuous-discrete dynamical systems. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*. 2025;(2):3-14. (In Russian) DOI: 10.26907/0021-3446-2025-2-3-14.

25. Mustafina I.I. Zh. Safe and Dangerous Bifurcation Points in Non-Autonomous Dynamical Systems. *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*. 2024; 3(66):47-54. (In Russian) DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-47-54.

26. Akmanova S.V., Yumagulov M.G. On Local Bifurcations in Nonlinear Continuous-Discrete Dynamical Systems. *Russian Mathematics*. 2025; 69(2):1-11. (In Russian). DOI: 10.3103/S1066369X25700094.

27. Basov V.V., Gorelov V.S. Bifurcations in a conservative system with three rest points in the unperturbed part. *Modern problems of mathematics and mathematical education*. Spb, 2024. Pp. 217-227. (In Russian) EDN QFEECE.

28. Barabash N.V., Belykh V.N. Piecewise smooth models of chaotic dynamical system. *Development Horizons*. 2024. P. 63. (In Russian) EDN HQZRDD.

29. Omorov R.O. Method of topological roughness of dynamic systems: applications to studies of roughness, bifurcations and chaos in synergetic systems. *XIV All-Russian Conference on Problems of Control: collection of scientific papers*. Moscow, June 17–20, 2024. Moscow: V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences; 2024. Pp. 761-764. (In Russian) EDN AMUXGM.

30. Sultanov O.A. Stochastic stability of an auto-resonance model with a center–saddle bifurcation. *Izvestiya vuzov. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(2):147–159. DOI 10.18500/0869-6632-003090.

31. Kudryavtseva, E.A., Lerman L.M. Bifurcations in Integrable Systems with Three Degrees of Freedom. *I. Proc. Steklov Inst. Math*. 2024; 327:130–207. DOI: 10.1134/S0081543824060129.

32. Kiselevich V.V. An electrical lifetime of polymers in terms of the catastrophe theory, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 2025; 18(2):93-108. (In Russ., abstract in Eng.). DOI: 10.18721/JPM.18209.

33. Kissikova N. [et al.] Review and Synthesis of the Main Contour of the Adaptive Control System for Unstable and Deterministic Chaotic Processes in the "Swallow Tail" Class of Catastrophes. University works. 2023; 2(91):373-378. DOI: 10.52209/1609-1825_2023_2_373.

34. Tsvigun V.N. [et al.] The mechanism of formation of ball lightning. Herald of Science. 2025; 5(3(84)):514-518. (In Russian). EDN IMQCMC.

35. Morgulis A.B. Instability and short waves in a hyperbolic predator-prey system. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2024; 65(5):907-916. DOI: 10.1134/S0021894424050122.

36. Morozov N.F., Lukin A.V., Popov I.A. Symmetry Breaking and Multistability of Electrostatically Actuated Annular Microplates. Solid mechanics. 2024; 1:110-132. DOI: 10.31857/S1026351924010063.

37. Lopatin S.N. [et al.] Complex estimation of the underground excavations stability in various mining and

geological conditions. Bulletin of the National Academy of Sciences of Belarus. Series of physical and technical sciences. 2024; 69(4):340-352. DOI: 10.29235/1561-8358-2024-69-4-340-352.

38. Ivlev D.D. [et al.] Limit state of deformable bodies and rocks. Moscow : Fiz-math lit.; 2008. 832 p. ISBN 978-5-9221-0914-7. (In Russian). EDN MUWSFR.

39. Volodchenkov C.L., Gutz A.K. Theoretical-catastrophic model X1.0 of anthropogenic impact on soil in the Kaliningrad region. Mathematical and computer modeling. Omsk: OSU; 2025. Pp. 94-96. (In Russian). EDN VPJFBF.

40. Sachkov I.N., Plotnikova E.A. Search for bifurcations in the development of business crisis in 2008. Bulletin of Tver State University. Series: Economics and Management. 2025; 1(69):213-220. (In Russian) DOI: 10.26456/2219-1453/2025.1.213-220.

41. Kotenko I.V. [et al.] Theory catastrophe methods for assessing and forecasting security level of the objects, using internet of things technologies. Mathematical methods in technology and engineering. 2025; 1:46-49. (In Russian). EDN CVAKLN.

© 2026 The Authors. This is an open access article under the CC BY license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

The authors declare no conflict of interest.

About the authors:

Dmitriy I. Nazarov, Ph.D. in Engineering, associate professor, T.F. Gorbachev Kuzbass State Technical University, (650000, Russia, Kemerovo, Vesennaya st., 28), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6803-8564>, e-mail: ndi.spssh@kuzstu.ru

Contribution of the authors:

Dmitriy I. Nazarov – research problem statement; scientific management, reviewing the relevant literature; conceptualisation of research, data collection, data analysis, reviewing the relevant literature, drawing the conclusions, writing the text.

All authors have read and approved the final manuscript.

